

## Spis wszystkich zadań napisanych po polsku w Gezmat

Adresy autorów znajdziesz na stronie projektu (linki - nagłówek, stopka) oraz w pliku `gezmat.cxx`

Instrukcję, jak używać GEZMAT, by tworzyć własne zestawy zadań i dodawać własne zadania, znajdziesz na stronie projektu. Ten plik został wygenerowany po wywołaniu w konsoli systemu Linux polecenia: `./gezmat.bash def/all_problems_pl.gzm`

**Ważne!** Plik `def/all_problems_pl.gzm` jest tworzony po wywołaniu

```
./gezmat.bash def/pl-prepare-all-problems-config.gzm
```

Nie edytuj tych plików! Możesz zmienić nazwę pliku `def/all_problems_pl.gzm` i wtedy go edytować jako swój własny plik konfiguracyjny.

### 1 Zadanie – Ogrzewanie wody

Ile ciepła należy dostarczyć 900 g wody, aby ogrzać ją o 15 K? Wynik wyraż w kJ. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K).

**Odpowiedź:** Należy dostarczyć 56,7 kJ.

### 2 Zadanie – Ochładzanie sali

W pomieszczeniu są klimatyzatory o maksymalnej mocy chłodniczej 3 kW. W sali znajduje się 45 studentów. Można przyjąć, że każdy z nich wydziela ciepło z szybkością około 320 kJ/godz. W pomieszczeniu znajduje się także 17 żarówek, każda o mocy 80 W. Ponieważ na zewnątrz panuje wysoka temperatura, przez ścianę przenika ciepło z szybkością 7 MJ/godz. Ile klimatyzatorów powinno być włączonych, jeśli powietrze w pomieszczeniu ma być utrzymywane w stałej temperaturze 23°C?

**Odpowiedź:** Powinny być włączone 3 klimatyzatory.

### 3 Zadanie – Kolektor słoneczny

Na dachu zamontowany jest kolektor słoneczny o sprawności  $n = 24\%$ . Energia słoneczna docierająca do kolektora przekazywana jest do wody krążącej w rurach kolektora. Jaka jest powierzchnia kolektora, jeśli w ciągu godziny ogrzewa 189 litrów wody, zwiększając jej temperaturę o 20°C? Przyjmij, że w danej godzinie natężenie promieniowania słonecznego wynosi 760 W/m<sup>2</sup>. Ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K), a jej gęstość 1000 kg/m<sup>3</sup>.

**Odpowiedź:** Powierzchnia kolektora słonecznego wynosi 24,2 m<sup>2</sup>.

### 4 Zadanie – Ciepło właściwe ciała

Do aluminiowego kalorymetru o masie 200 g włożono kulę o masie 390 g. Następnie do naczynia wiano 21 g wrzącej wody i zamknięto kalorymetr, aby zminimalizować wymianę ciepła z otoczeniem. Po ustaleniu się równowagi termicznej układu zmierzono temperaturę wody, wyniosła ona 37°C. Temperatura początkowa kalorymetru i kuli jest równa temperaturze otoczenia i wynosi 21°C. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200

$J/(kg \cdot K)$ , a ciepło właściwe aluminium  $900 J/(kg \cdot K)$ . Oblicz ciepło właściwe kuli, a następnie sprawdź w tablicy, z jakiego materiału jest najprawdopodobniej zbudowana. Zastanów się, dlaczego otrzymana wartość różni się od wartości podanej w tablicy.

substancja	ciepło właściwe $J/(kg \cdot K)$
cyna	220
miedź	380
nikiel	460
glin	900

**Odpowiedź:** Ciepło właściwe kuli wynosi  $429 J/(kg \cdot K)$ . Otrzymana wartość ciepła właściwego różni się od wartości podanych w tablicy. W obliczeniach nie uwzględniliśmy wymiany ciepła między otoczeniem a układem, która występuje mimo zastosowania kalorymetru. Kula jest prawdopodobnie zbudowana z miedzi.

## 5 Zadanie – Topienie złota

Jubiler na stopienie złota zużył  $6080 J$  energii. Oblicz, ile złota stopił jubiler, wiedząc, że złoto było już podgrzane do temperatury topnienia oraz że ciepło topnienia złota wynosi  $64 kJ/kg$ .

**Odpowiedź:** Złotnik stopił  $95 g$  złota.

## 6 Zadanie – Parowanie wody

Do naczynia zawierającego  $0,4 kg$  wody włożono grzałkę o mocy  $600 W$ , a następnie doprowadzono wodę do wrzenia. Ile wody wyparowało w ciągu  $3$  minut wrzenia? Przyjmij, że ciepło parowania wody wynosi  $2270 kJ/kg$ .

**Odpowiedź:** Wyparowało  $47,6 g$  wody.

## 7 Zadanie – Silnik spalinowy

Samochód jedzie po autostradzie ze stałą prędkością. By utrzymać prędkość, silnik pracuje z mocą  $29 kW$ . Sprawność silnika wynosi  $28\%$ . Ile zapłacimy za benzynę zużytą przez samochód jadący przez  $3$  godziny? Cena benzyny na stacji paliw wynosi  $4,58 zł/l$ , ciepło spalania wynosi  $42 MJ/kg$ , a jej gęstość  $0,7 g/cm^3$ .

**Odpowiedź:** Za benzynę zapłacimy  $174,25 zł$ .

## 8 Zadanie – Lód w ciepłej wodzie

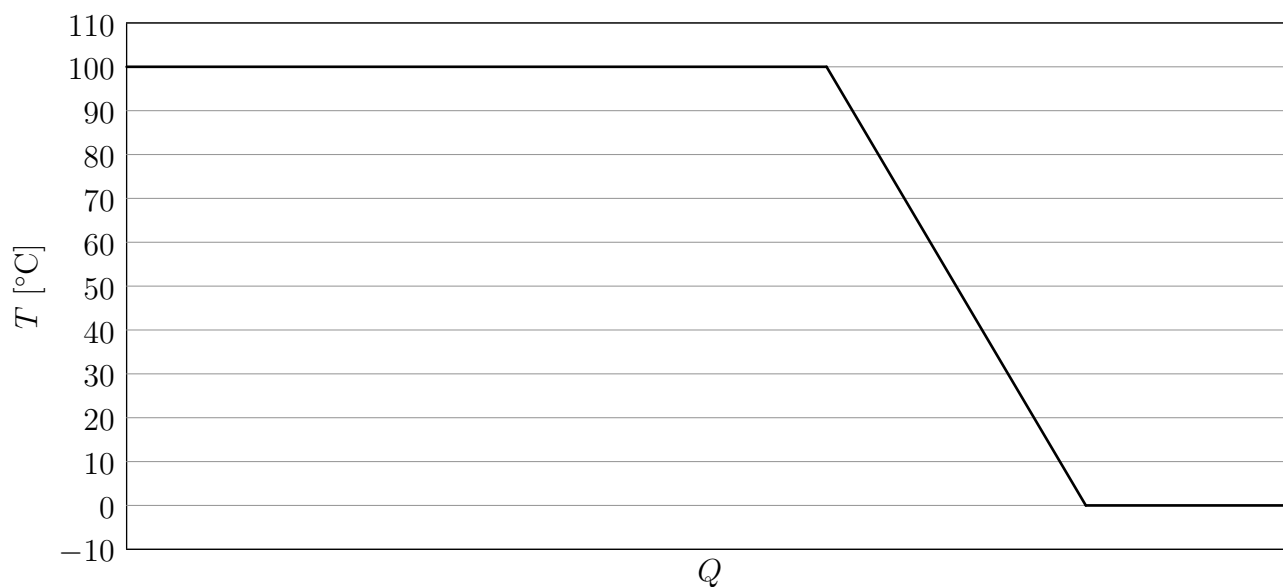
Blok lodu o temperaturze  $-10^\circ C$  i masie  $210 g$  włożono do  $770 g$  wody o temperaturze  $55^\circ C$ . Oblicz końcową temperaturę układu, zakładając, że nie następuje wymiana ciepła z otoczeniem. Przyjmij wartości: ciepła właściwego lodu  $2050 J/(kg K)$ , ciepła topnienia lodu  $334 kJ/kg$ , ciepła właściwego wody (cieczy)  $4200 J/(kg K)$ .

**Odpowiedź:** Końcowa temperatura układu  $T_f = (T_w m_w c_w + (T_i c_i - l_i) m_i) / [(m_i + m_w) c_w] \approx 25,1^\circ C$ .

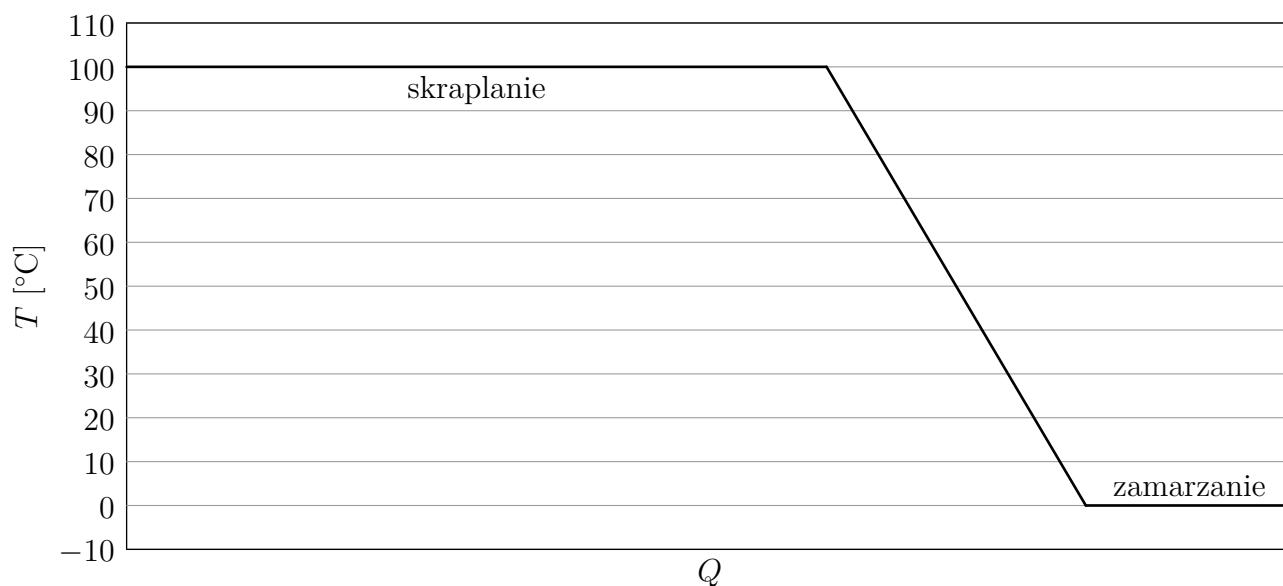
## 9 Zadanie – Zjawiska cieplne

Na rysunku poniżej przedstawiono zależność temperatury próbki 2 g H<sub>2</sub>O od wymienionego z otoczeniem ciepła. Rozpoznaj i podpisz przedstawione zjawiska cieplne. Oblicz, ile kalorii próbka wymieniła z otoczeniem podczas całego procesu przedstawionego na rysunku. Potrzebne dane znajdują się w tabeli. Przyjmij, że na diagramie został przedstawiony cały proces przemiany fazowej. Uwaga, rysunek nie zachowuje skali.

ciepło topnienia/zamarzania	336000 J/kg
ciepło parowania/skraplania	2270000 J/kg
ciepło właściwe (woda)	4200 J/(kg·K)
ciepło właściwe (lód)	2100 J/(kg·K)
ciepło właściwe (para wodna)	2000 J/(kg·K)



**Odpowiedź:**



Całkowita ilość ciepła wymienionego z otoczeniem, podczas wszystkich procesów ukazanych na rysunku, jest równa w przybliżeniu 1440 cal.

## 10 Zadanie – Granitowa płyta

Powierzchnia płyty granitowej to  $114 \cdot 10^3 \text{ m}^2$ , a jej grubość 3 m. Pod płytą panuje temperatura  $60^\circ\text{C}$ , a nad płytą  $-2^\circ\text{C}$ . Oblicz ciepło przepływające przez płytę w trakcie jednej minuty, jeśli współczynnik przewodnictwa cieplnego granitu jest równy  $2,41 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m})$ .

**Odpowiedź:** Ciepło:  $Q \approx 341 \text{ MJ}$ .

## 11 Zadanie – Ceglany dom

Ceglany dom ma ściany o grubości 30 cm. Wewnątrz domu utrzymywana jest stała temperatura  $19^\circ\text{C}$ . Temperatura powietrza na zewnątrz wynosi  $15^\circ\text{C}$ .

- Oblicz, ile ciepła stracimy w ciągu sekundy przez jedną ze ścian o powierzchni  $24 \text{ m}^2$ . Przyjmij, że przewodnictwo cieplne cegły wynosi  $0,8 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m})$ .
- Aby zapobiec utracie ciepła, ocieplono budynek z zewnątrz warstwą styropianu o grubości 30 cm. Ile teraz tracimy ciepła przez tę samą ścianę? Przyjmij, że przewodnictwo cieplne styropianu wynosi  $0,04 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m})$ .
- Jaka temperatura panuje na złączeniu materiałów?

**Odpowiedź:** Przez ceglany mur tracimy około  $256 \text{ J}$  na sekundę, a przez mur ocieplony warstwą styropianu  $12,2 \text{ J}$  na sekundę. Temperatura między cegłą a styropianem jest równa  $18,1^\circ\text{C}$ .

## 12 Zadanie – Wydłużenie szyny

Oblicz, o ile zmieni się długość stalowej szyny po ogrzaniu jej do temperatury  $13^\circ\text{C}$ , jeśli jej długość przy temperaturze  $8^\circ\text{C}$  jest równa  $14 \text{ m}$ . Współczynnik rozszerzalności cieplnej użytej stali jest równy  $0,99 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

**Odpowiedź:** Wydłużenie szyny:  $\Delta l = \alpha \Delta T l \approx 0,693 \text{ mm}$ .

## 13 Zadanie – Zegar

Pewien zegar, posiadający wahadło ze złota, odmierza dokładnie czas w temperaturze  $19^\circ\text{C}$ . Temperatura spadła do  $-2^\circ\text{C}$ . O ile więcej wahań w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej złota wynosi  $14 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ . Jeden koniec pręta ze złota zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt ze złota jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

**Odpowiedź:** Zegar wykona o  $12,7$  więcej wahań na dobę.

## 14 Zadanie – Spadająca kulka

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z indu, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu  $n = 41\%$  energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi  $298 \text{ K}$ . Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232
ind	233	28	156
ołów	128	25	328

**Odpowiedź:** Kulka powinna spadać z prędkością około 5,34 m/s.

## 15 Zadanie – Spadająca kulka (1 wiersz tabeli)

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z cyny, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu  $n = 34\%$  energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 296 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232

**Odpowiedź:** Kulka powinna spadać z prędkością około 7,87 m/s.

## 16 Zadanie – Lodowiec

Oszacuj masę stopionego lodu z lodowca, który zsunął się i zatrzymał w dolinie. Początkowo lodowiec spoczywał na wysokości 326 m nad doliną i miał masę  $14 \cdot 10^9$  kg. Załóż, że energia tracona przez zsuwający się lodowiec i spływającą wodę powstałą podczas topnienia lodowca powoduje dalsze topnienie lodu. Przyjmij ciepło topnienia lodu 334 kJ/kg. Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Odpowiedź:** Masa stopionego lodu to około  $m_i = m_0 g h / l \approx 130 \cdot 10^6$  kg, gdzie  $m_0$  jest początkową masą lodowca,  $h$  zmianą wysokości lodowca,  $l$  ciepłem topnienia lodu, a  $g$  wartością przyspieszenia ziemskiego. Oszacowanie to m.in. zakłada, że  $h$  jest zmianą wysokości środka masy lodowca razem z powstałą z niego wodą.

## 17 Zadanie – Promieniowanie kuli

Gorąca kula o promieniu 7 cm, temperaturze powierzchni 900 K i względnej zdolności emisyjnej 0,75 wysyła energię w postaci promieniowania. Ile energii zaabsorbują w ciągu 3 minut ciało doskonale czarne, które odbiera  $3 \cdot 10^{-3}$  energii promieniowania wyemitowanego przez kulę? Stała Stefana-Boltzmana wynosi  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$ .

**Odpowiedź:** Ciało odbierze około 928 J energii.

## 18 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercyjnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie  $14,6 \cdot 10^3$  kg porusza się z szybkością 2,5 m/s. Druga część o masie  $26,7 \cdot 10^3$  kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 6,2 m/s.

**Odpowiedź:** Z zasady zachowania pędu układu,  $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ , oraz z  $\vec{p}_0 = 0$  i  $\vec{p}_2 = 0$  otrzymujemy:  $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$ . Obliczając wartość obu stron,  $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$ , otrzymujemy równanie  $p_3 = p_1$ , czyli  $m_3v_3 = m_1v_1$ , co prowadzi do wyniku:  $m_3 = m_1v_1/v_3 \approx 5,89 \cdot 10^3$  kg.

## 19 Zadanie – Spadochroniarz

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 137 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 7,3 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyspieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s<sup>2</sup>. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

**Odpowiedź:** Spadochroniarz porusza się z zerowym przyspieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka:  $Q = mg \approx 1340$  N.

## 20 Zadanie – Zderzenie wagonów

Wagon kolejowy o masie 25 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 1,5 m/s, uderzył w stojący skład 4 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:

- wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
- o ile zmniejszyła się na skutek szepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

**Odpowiedź:**

- Po szepieniu skład porusza się z prędkością  $v = 0,3$  m/s.
- Energia kinetyczna ruchu postępowego zmniejszyła się o  $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n+1)v^2)/2 \approx 22,5$  kJ.

## 21 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Kula o masie 7 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s<sup>2</sup>. Wartość siły elektrostatycznej to 93 N. Oblicz:

- wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
- wartość przyspieszenia kuli,
- wartość prędkości kuli po czasie 9 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

**Odpowiedź:**

- Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 116 N.
- Wartość przyspieszenia to  $a = F/m \approx 16,5$  m/s<sup>2</sup>.
- Wartość prędkości po czasie  $t$  to  $v = at \approx 149$  m/s.

## 22 Zadanie – Kula w cieczy

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 1700 kg/m<sup>3</sup> pływa w cieczy o gęstości 2900 kg/m<sup>3</sup>. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

**Odpowiedź:** Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy  $1 - d_b/d_l \approx 0,414$ .

### 23 Zadanie – Ołów, lód i woda

Kulę o masie 5,6 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię  $0,29 \text{ m}^2$ . Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa  $10300 \text{ kg/m}^3$ , a gęstość wody  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

**Odpowiedź:** Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left( \frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -17,4 \text{ mm}$$

A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

### 24 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3800 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 2 kg, a każdy student może wykonać pracę 31000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 13 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu  $9,8 \text{ N/kg}$ .

**Odpowiedź:** Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 32.

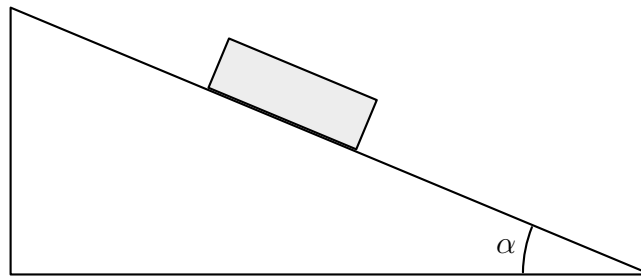
### 25 Zadanie – Wahadło

Kulkę o masie 60 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 3 cm. Nic cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zanedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne jest równe  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Odpowiedź:** Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok.  $0,767 \text{ m/s}$ .

### 26 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu  $\alpha = 35^\circ$  zsuwa się cegła o masie 4,8 kg. Oblicz przyspieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Wartość kąta  $\alpha$  na rysunku może być inna od podanej.



**Odpowiedź:** Cegła porusza się z przyspieszeniem równoległym do równi o wartości  $a = g \sin \alpha \approx 5,62 \text{ m/s}^2$ , w dół równi.

## 27 Zadanie – Równia pochyła

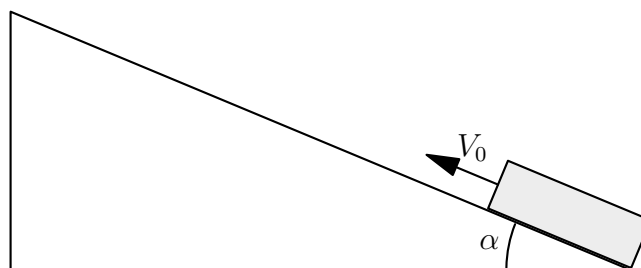
Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu  $34^\circ$  zsuwa się cegła o masie  $4,7 \text{ kg}$ . Oblicz przyspieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Odpowiedź:** Cegła porusza się z przyspieszeniem równoległym do równi o wartości  $a = g \sin \alpha \approx 5,48 \text{ m/s}^2$ , w dół równi.

## 28 Zadanie – Kłoczek na równi pochyłej

U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej  $768 \text{ g}$ , który został wystrzelony z prędkością początkową  $V_0 = 8 \text{ m/s}$  wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy  $\alpha = 35^\circ$ . Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi  $1,4$ .

- Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
- Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
- Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



**Odpowiedź:**

- Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi  $a = g(f \cos \alpha + \sin \alpha) \approx 16,9 \text{ m/s}^2$ , gdzie  $\alpha$  to kąt nachylenia równi, a  $f$  to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
- Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to  $t = \frac{V_0}{a} \approx 0,48 \text{ s}$ .
- Droga hamowania to  $s = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} V_0 t \approx 1,9 \text{ m}$ .

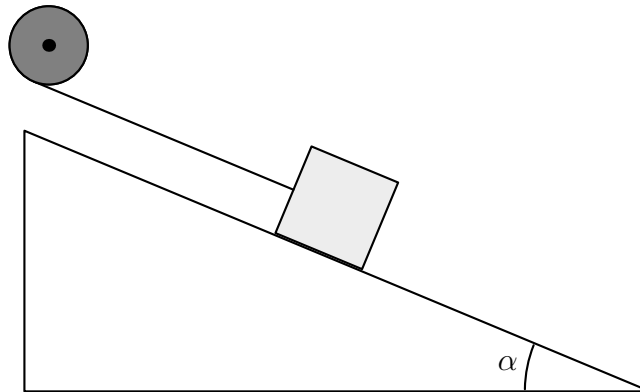
## 29 Zadanie – Sześcián na równi

Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia  $\alpha = 40^\circ$ , która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie  $34 \text{ dag}$  i o długości krawędzi  $6 \text{ cm}$ . Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie  $66 \text{ dag}$ , który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześciánu znajduje się  $40 \text{ cm}$  nad stołem.



- a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?  
 b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?

Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,42.

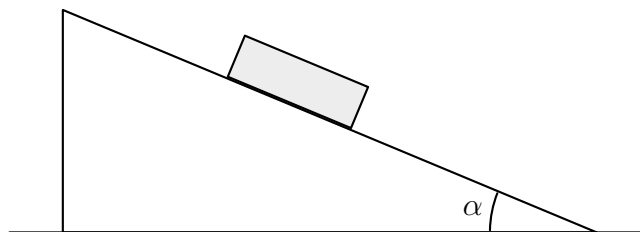


### Odpowiedź:

- a) Przyśpieszenie sześcianu o masie  $m_s$  wyniesie  $a = m_s g \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{m_s + \frac{1}{2} m_w} = 1,6 \text{ m/s}^2$ , gdzie  $f$  to współczynnik tarcia klocka o równię, a  $m_w$  to masa walca.  
 b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie  $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0,883 \text{ s}$ , gdzie  $s$  to droga jaką pokona sześcian.

### 30 Zadanie – Jeżdżąca równia

Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie naczylenia  $\alpha = 35^\circ$ , aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,2.



**Odpowiedź:** Wartość przyśpieszenia minimalnego wynosi  $a_{min} = g \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = 4,3 \text{ m/s}^2$ , a wartość przyśpieszenia maksymalnego wynosi  $a_{max} = g \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = 10,3 \text{ m/s}^2$ , gdzie  $f$  to współczynnik tarcia klocka o równię.

### 31 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 63 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 33 N na drodze 3,6 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 8 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

**Odpowiedź:** Końcowa szybkość łyżwiarza o masie  $m$  będzie równa  $v = \sqrt{2(F - T)S/m} \approx 1,69 \text{ m/s}$ .

### 32 Zadanie – Pocisk

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 47 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 40 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 636 m/s, a po przejściu przez drzewo zmniejszyła się do 516 m/s.

- Ile wynosi praca sił oporu?
- Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
- Ile wynosi czas przebijania drzewa?

Założ, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

#### Odpowiedź:

- Praca sił oporu wynosi  $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -3250$  J, gdzie  $V_1$  i  $V_2$  to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie  $m$  przed wbiciem w drzewo i po przebicciu drzewa.
- Wartość opóźnienia kuli wynosi  $a = \frac{W}{md} \approx 173$  km/s<sup>2</sup>, gdzie  $d$  to średnica drzewa.
- Czas wynosi  $t = \frac{V_1 - V_2}{a} \approx 0,694$  ms.

### 33 Zadanie – Krążek hokejowy

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 5 m, a po zderzeniu przebył drogę 3 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,08. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

**Odpowiedź:** Szybkość początkowa wynosi  $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 3,54$  m/s, gdzie  $s_1$  to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę,  $s_2$  to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a  $f$  to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

### 34 Zadanie – Droga hamowania

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 80 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

**Odpowiedź:** Droga, jaką pokona samochód, wynosi  $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 47,4$  m, gdzie  $V_0$  to prędkość początkowa samochodu,  $t_1$  to czas reakcji kierowcy, a  $f$  to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

### 35 Zadanie – Spacer z sankami

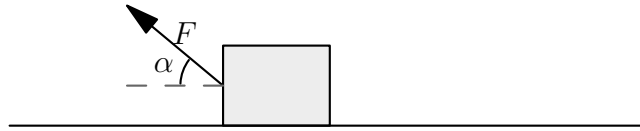
Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 70 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 59 N i tworzy on kąt 35° z poziomem.

**Odpowiedź:** Dziecko wykona pracę równą  $W = Fs \cos \alpha \approx 3380$  J.

### 36 Zadanie – Ukośna siła

Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,8 kg. Przykładamy do niego siłę  $F = 5$  N skierowaną pod kątem  $\alpha = 45^\circ$  do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,09.

- Oblicz przyśpieszenie klocka.
- Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
- Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



#### Odpowiedź:

- Przyśpieszenie klocka wynosi  $a \approx 3,94$  m/s<sup>2</sup>.
- Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi  $s_{0 \rightarrow 5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 49,2$  m, gdzie  $t$  to czas.
- Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi  $s_3 = s_{0 \rightarrow 3} - s_{0 \rightarrow 2} \approx 9,84$  m.

### 37 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio  $2,25 \cdot 10^{24}$  kg i  $4,69 \cdot 10^{30}$  kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości  $405 \cdot 10^6$  km od gwiazdy. Stała grawitacji  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Zagadnienie rozważ w układzie inercyjnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

**Odpowiedź:** Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości  $a = GM/r^2 \approx 1,91 \cdot 10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>.

### 38 Zadanie – Samochód na moście

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 72 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 70% ciężaru samochodu?

**Odpowiedź:** Prędkość wynosi  $V = \sqrt{gR(1 - k)} \approx 14,5$  m/s, gdzie  $k = 70\%$ , a  $R$  to promień krzywizny mostu.

### 39 Zadanie – Obrót Ziemi

Oblicz:

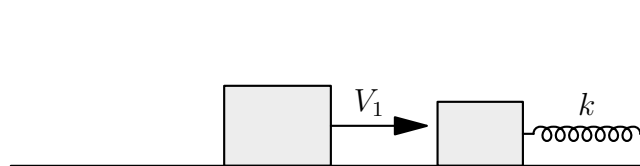
- z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 76% siły grawitacji działającej na niego.
- ile wynosi ciężar człowieka o masie 52 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

#### Odpowiedź:

- Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić  $V = \sqrt{Rg(1 - k)} \approx 3870$  m/s, gdzie  $R$  to promień Ziemi, a  $k = 0,76$ .
- Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 508 N.

## 40 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,8 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości  $k = 153$  N/m, której drugi koniec jest przytwierdzony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześciąt o masie 1,2 kg, poruszający się z prędkością  $V_1 = 4$  m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



**Odpowiedź:** Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi  $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}} = 27,4$  cm, gdzie  $m_1$  to masa uderzającego klocka, a  $m_2$  to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

## 41 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,3 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 0,9 cm.

a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 0,9 kg.

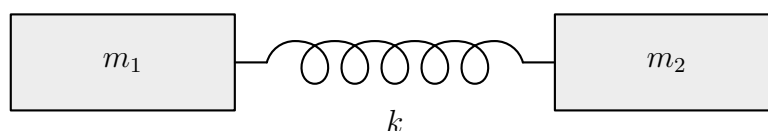
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 1,35 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

**Odpowiedź:** a) Gdy podwieszono odważnik o masie  $m_1$  to okres drgań wahadła wynosił  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0,33$  s, gdzie  $m_2$  to masa kulki, a  $x$  to wydłużenie sprężyny.

b) Okres drgań wahadła wynosi  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0,285$  s, gdzie  $m_3$  to masa klocka.

## 42 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości  $k$ . Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla  $k = 59$  N/m,  $m_1 = 2$  kg oraz  $m_2 = 3$  kg.



**Odpowiedź:** Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy  $T \approx 0,896$  s.

### 43 Zadanie – Ciężarek na lince

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,79 s zakreśla okrąg o promieniu 112 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 70 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

**Odpowiedź:** Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z  $r_1$  do  $r_2$  jest równy  $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx 0,309$  s.

### 44 Zadanie – Tarcza

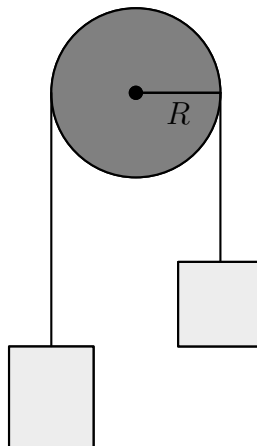
Na środku tarczy o średnicy 3 m i masie 117 kg, znajduje się człowiek o masie 76 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,6 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

**Odpowiedź:** Częstotliwość układu wyniesie  $f_2 = f_1 \frac{Md^2}{8mr^2 + Md^2} = 0,248$  Hz, gdzie  $d$  to średnica tarczy o masie  $M$ ,  $f_1$  to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a  $r$  to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie  $m$  od osi obrotu.

### 45 Zadanie – Maszyna Atwooda

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu  $R = 0,7$  m i masie 4 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszono są dwa obciążniki o masach 1,24 kg i 0,44 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pominij. Oblicz wartość przyspieszenia obciążników w dwóch przypadkach:

- załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
- załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



**Odpowiedź:**

a) Przyspieszenie układu wynosi  $a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 4,67$  m/s<sup>2</sup>, gdzie  $m_1$  i  $m_2$  to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.

b) Przyspieszenie układu wynosi  $a_2 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3} = 2,13$  m/s<sup>2</sup>, gdzie  $m_3$  to masa walca.

## 46 Zadanie – Naturalny satelita

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie  $84 \cdot 10^3$  kg okrążającego w czasie 35,3 h jednorodną planetę o masie  $823 \cdot 10^{22}$  kg. Stała grawitacji  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

**Odpowiedź:** Promień orbity jest równy  $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 60,8 \cdot 10^3$  km.

## 47 Zadanie – Zmiana orbity

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 600 kg znajduje się w odległości 5800 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8000 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyspieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi 3,69 m/s<sup>2</sup>, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

**Odpowiedź:** Praca wyniesie  $W = \frac{GMm}{2} \left( \frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2} \right) = 257$  MJ, gdzie  $G$  to stała grawitacji,  $M$  i  $m$  to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity,  $R$  to promień Marsa, a  $h_1$  i  $h_2$  to odległości satelity od powierzchni planety.

## 48 Zadanie – Prędkość ucieczki

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety Z90, stanowi 60% masy Ziemi, a jej promień wynosi 13300 km. Oblicz:

- prędkość ucieczki ciała z planety Z90.
- ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie Z90 do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 15 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

**Odpowiedź:**

- Prędkość ucieczki wyniesie  $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 6$  km/s, gdzie  $G$  to stała grawitacji,  $R$  to promień planety Z90 o masie  $M$ .
- Stosunek wysokości wyniesie  $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 7,24$ , gdzie  $h$  i  $h_z$  to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie Z90 i na Ziemi, a  $g$  i  $g_z$  to odpowiednio przyspieszenie na planecie Z90 i na Ziemi.

## 49 Zadanie – Tunel średnicowy

Oblicz szybkość, z jaką poruszałyby się jednoosobowa kapsuła w odległości 3600 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa  $8,07 \cdot 10^{24}$  kg, a jej promień 7100 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Zagadnienie rozważ w układzie inercyjnym, w którym planeta spoczywa.

**Odpowiedź:** Korzystam z zasady zachowania energii  $E_{k2} - E_{k1} = W_{1 \rightarrow 2}$ , gdzie  $E_{k2}$  jest energią kinetyczną kapsuły na końcu,  $E_{k1}$  energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a  $W_{1 \rightarrow 2}$  pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie  $\vec{F}(r) = -GMm \frac{r}{R^3} \vec{e}_r$ , gdzie  $M$  jest masą planety,  $R$  jej promieniem,  $m$  masą kapsuły,

a  $\vec{r}$  wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}' = - \int_R^r F(r') dr' = - \frac{GMm}{R^3} \int_R^r r' dr' = \frac{1}{2} GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście  $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ , gdzie  $v$  jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 7510 \text{ m/s}$$

## 50 Zadanie – Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach  $M_a$  oraz  $M_b$  wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi  $T$ . Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.

- Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
- Uprość wyniki w przypadku, gdy  $M_a/M_b \rightarrow 0$ , oraz w przypadku, gdy  $M_a = M_b$ .
- Uzyskaj również wyniki liczbowe dla  $M_a = 39 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ ,  $M_b = 80 \cdot 10^{22} \text{ kg}$  oraz  $T = 760 \text{ h}$ . Stała grawitacji  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

**Odpowiedź:** a) Dla odległości między środkami obiektów  $d \equiv r_a + r_b$ , gdzie  $r_a$  i  $r_b$  są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie  $v_a$  i  $v_b$  oznaczają szybkości ciał. Ponieważ  $v_i = 2\pi r_i/T$ , otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie  $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$ . Prawe strony równań są identyczne, więc  $r_a M_a = r_b M_b$  (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania  $r_b$  i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku  $M_a/M_b \rightarrow 0$ :

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy  $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe:  $r_a \approx 166 \cdot 10^3 \text{ km}$ ,  $r_b \approx 80,9 \cdot 10^3 \text{ km}$ ,  $d \approx 247 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

## 51 Zadanie – Dwie gwiazdy

Gwiazda  $A$  ma masę  $M_A$ , a gwiazda  $B$  masę  $M_B$ . Gdy były w odległości  $d_1$  od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercyjnym wynosiły odpowiednio  $v_{A1}$  oraz  $v_{B1}$ . Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy  $A$  w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do  $d_2$ , jeśli szybkość gwiazdy  $B$  była wtedy równa  $v_{B2}$ . Uzyskaj również wyniki liczbowe dla  $M_A = 8 \cdot 10^{30}$  kg,  $M_B = 13 \cdot 10^{30}$  kg,  $v_{A1} = 93$  km/s,  $v_{B1} = 72$  km/s,  $d_1 = 3 \cdot 10^{11}$  m,  $v_{B2} = 62$  km/s,  $d_2 = 17 \cdot 10^{11}$  m. Stała grawitacji  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

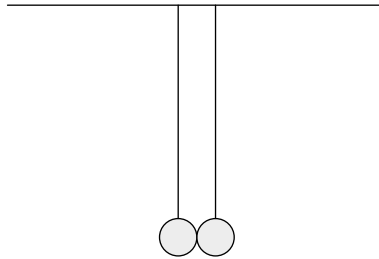
**Odpowiedź:** Szybkość gwiazdy  $A$  w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)}$$

$$\approx 77,9 \text{ km/s}$$

## 52 Zadanie – Dwie kulki na linkach

Dwie stykające się małe kulki o masach 0,6 kg i 0,3 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 1,3 m. Lżejsza kulka zostaje odchylna w płaszczyźnie linek o kąt  $55^\circ$  od pionu i zostaje puszczone. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?

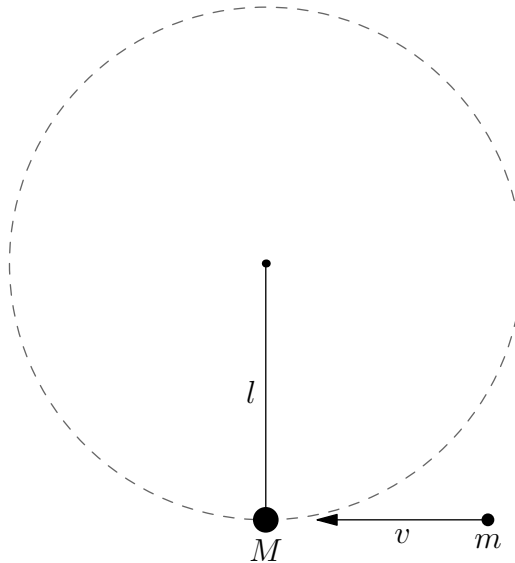


**Odpowiedź:** Wysokość wyniesie  $H = \frac{m^2 l (1 - \cos \alpha)}{(m + M)^2} = 6,2$  cm, gdzie  $m$  i  $M$  są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki,  $l$  to długość linki, a  $\alpha$  to kąt odchylenia.



### 53 Zadanie – Postrzelone wahadło

Metalowy ciężarek o masie  $M = 338$  g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości  $l = 50$  cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości  $v$  pocisk o masie  $m = 42$  g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu  $l$  w płaszczyźnie pionowej? Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe  $9,8$  m/s<sup>2</sup>. Pomiń opory ruchu bryły.



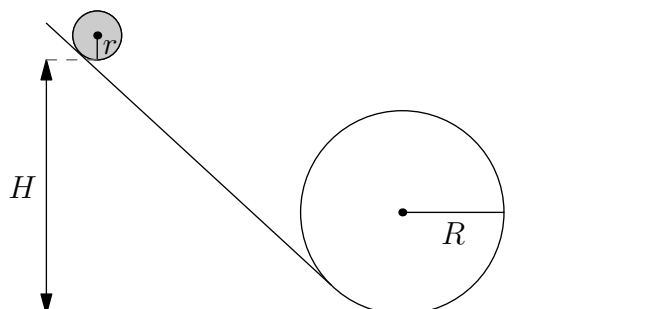
**Odpowiedź:** Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech  $\mu \equiv m + M$ . Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned}mv &= \mu v_1 \\ \frac{1}{2}\mu v_1^2 &= \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l \\ \frac{v_2^2}{l} &= g\end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest  $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 44,8$  m/s.

### 54 Zadanie – Pętla śmierci

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu  $r = 0,08$  m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu  $R = 0,6$  m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczone.



**Odpowiedź:** Minimalna wysokość wynosi  $H = 2,7(R - r) = 1,4$  m.

## 55 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Proton porusza się z prędkością o wartości 2700 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 1,9 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyspieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy  $1,602 \cdot 10^{-19}$  C, a jego masa jest równa  $1,673 \cdot 10^{-27}$  kg.

**Odpowiedź:** Proton porusza się z przyspieszeniem o wartości  $a = F/m \approx 49,1 \cdot 10^{10}$  m/s<sup>2</sup>.

## 56 Zadanie – Natężenie pola elektrycznego

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 15 nm od jądra atomowego o liczbie atomowej 5. Opisz również kierunek i zwrot wektora natężenia pola elektrycznego względem jądra. Pomiń wpływ innych obiektów.

**Odpowiedź:** Wartość natężenia pola elektrycznego  $|\vec{E}| = kne/r^2 \approx 32 \cdot 10^6$  N/C, gdzie  $n$  jest liczbą atomową,  $e$  ładunkiem protonu, a  $k$  stałą elektryczną. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest taki sam jak prosta przechodząca przez jądro i punkt, w którym określamy pole. Zwrot  $\vec{E}$  jest *od jądra*.

## 57 Zadanie – Przyciągnięty elektron

Oblicz pracę siły elektrostatycznej ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku  $+3e$ , gdzie  $e$  jest ładunkiem protonu, podczas przyciągania elektronu z odległości 4 mm do 7 nm. Przyjmij, że elektron na początku i na końcu procesu spoczywa. Wynik wyraż w elektronowoltach oraz w dżulach.

**Odpowiedź:** Praca

$$W_{1 \rightarrow 2} = -k n e e \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx 0,617 \text{ eV} \approx 98,9 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

gdzie  $n = +3$ .

## 58 Zadanie – Praca nad ładunkiem w polu dipola elektrycznego

Oblicz pracę, jaką wykonała zewnętrzna siła, przemieszczając proton po półokręgu w polu trwałego, nieruchomego dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego  $4,4 \cdot 10^{-30}$  Cm. Początkowo proton spoczywał na symetralnej dipola w odległości 2,3 nm od tego dipola. Na końcu proton również spoczywał na symetralnej dipola, ale w odległości 4,1 nm od tego dipola i po jego drugiej stronie.

**Odpowiedź:** Praca zewnętrznej siły jest równa 0.

## 59 Zadanie – Obrót molekuly w polu innej cząsteczki

Oblicz, ile energii zostanie przekazane otoczeniu, gdy molekula posiadająca moment dipolowy o wartości  $4,7 \cdot 10^{-30}$  Cm ustawi się tak, by jej moment dipolowy był skierowany przeciwnie do momentu dipolowego drugiej, unieruchomionej molekuly znajdujacej się w odległości 1,2 nm. Wartość momentu dipolowego drugiej molekuly jest równa  $17,7 \cdot 10^{-30}$  Cm. Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle i mają zgodne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł. Przyjmij, że molekuly są trwałymi dipolami punktowymi. Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych jest równa

$$E_p = k \left( \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3 \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r} \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r} \right) \frac{1}{r^3}$$

gdzie  $k$  jest stałą elektryczną,  $\vec{p}_i$  momentem dipolowym, a  $\vec{r}$  wektorem względnego położenia dipoli. Korzystając z tego wzoru, uzasadnij, które jego składowe są istotne w rozważanym problemie. Wynik wyraż w elektronowoltach oraz w dżulach.

**Odpowiedź:** Energia przekazana otoczeniu

$$W_{A \rightarrow B} = E_{pA} - E_{pB} = 2k p_1 p_2 / r^3 \approx 5400 \mu\text{eV} \approx 8650 \cdot 10^{-25} \text{ J}$$

## 60 Zadanie – Cewka i magnes

Układ składa się z wykonanej z miedzianego drutu, podłączonej tylko do amperomierza cewki oraz trwałego, silnego magnesu. Cewka i magnes mogą być niezależnie przesuwane wzdłuż prostej, która jest jednocześnie osią cewki i magnesu (bieguny magnesu leżą na tej prostej). W poniższej tabeli, w wymienionych trzech przypadkach opisz zachowanie wartości bezwzględnej natężenia prądu,  $|I|$ , płynącego przez cewkę (*maleje, rośnie, stała i różna od 0, równa 0*) oraz wypadkowe oddziaływanie elektromagnetyczne między cewką a magnesem (*przyciągają się, odpychają się, nie oddziałują*).

opis	$ I $	oddziaływanie
Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki		
Magnes spoczywa w środku nieruchomej cewki		
Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu		

**Odpowiedź:**

opis	$ I $	oddziaływanie
Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki	maleje	przyciągają się
Magnes spoczywa w środku nieruchomej cewki	równa 0	brak oddziaływania
Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu	maleje	przyciągają się

## 61 Zadanie – Dźwięk w piaskowcu

Prędkość dźwięku w piaskowcu jest równa 2600 m/s. Oblicz okres oraz częstotliwość fali rozchodzącej się w płycie z tego piaskowca, jeśli długość fali jest równa 1,5 km.

**Odpowiedź:** Okres fali  $T = \lambda/v \approx 0,577$  s, a jej częstotliwość  $f = 1/T \approx 1,73$  Hz.

## 62 Zadanie – Częstotliwość światła

Wiązka światła o długości fali 470 nm w próżni pada na powierzchnię szkła o bezwzględnym współczynniku załamania tego światła równym 1,48. Oblicz częstotliwość i długość fali tego światła w szkle. Przyjmij wartość prędkości światła w próżni  $3 \cdot 10^8$  m/s.

**Odpowiedź:** Częstotliwość fali w szkle  $f_2 = f_1 = c/\lambda_1 \approx 638$  THz, gdzie  $f_1$  i  $\lambda_1$  to odpowiednio częstotliwość i długość fali w próżni. Długość fali w szkle  $\lambda_2 = v_2 T = cT/n = \lambda_1/n \approx 318$  nm, gdzie  $v_2$  to prędkość fali w szkle.

## 63 Zadanie – Fala podłużna w pręcie

Oblicz prędkość rozchodzenia się podłużnej fali w długim, metalowym pręcie. Długość fali jest znacznie większa od średnicy pręta. Gęstość metalu, z którego wykonano pręt, jest równa 9100 kg/m<sup>3</sup>, a moduł Younga tego metalu jest równy 216 GPa. Jeśli nie pamiętasz zależności prędkości fali od modułu Younga i gęstości, to w opisanym przypadku możesz ją uzyskać, rozważając wymiary tych wielkości.

**Odpowiedź:** Prędkość fali jest równa  $v = \sqrt{E/\rho} \approx 4870$  m/s.

## 64 Zadanie – Interferencja fal dźwiękowych

W jednorodnym ośrodku umieszczono dwa głośniki. Pierwszy głośnik znajduje się w odległości 14,65 m, a drugi w odległości 4,65 m od mikrofonu. Każdy z głośników oddzielnie wytwarzał w okolicy mikrofonu falę o takiej samej amplitudzie, a w obszarze między tym głośnikiem a mikrofonem zmiany ciśnienia można było w przybliżeniu opisać jako falę płaską o długości fali 250 cm. Następnie włączono oba głośniki. Drgają one w taki sam sposób, czyli w zgodnej fazie. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ, czy w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, nastąpi wzmocnienie czy osłabienie dźwięku w porównaniu z sytuacją, gdy był włączony tylko jeden z głośników.

**Odpowiedź:** Iloczyn wartości bezwzględnej różnicy odległości i długości fali  $|d_1 - d_2|/\lambda = 4$ , a więc w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, fale spotykają się w zgodnej fazie – nastąpi wzmocnienie.

## 65 Zadanie – Czy to fala?

W otoczeniu strefy subdukcji wychylenie powierzchni Ziemi opisano następującą funkcją zależną od położenia  $x$  oraz czasu  $t$ :

$$f(x, t) = N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) + K$$

gdzie  $N$ ,  $L$ ,  $T$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $K$  są stałymi. Funkcja opisywała wychylenie dla  $x \in (0, L)$  oraz  $t \in (0, T)$ . Sprawdź, czy ta funkcja spełnia równanie falowe, a więc czy opisywane wychylenie było falą.

**Odpowiedź:**

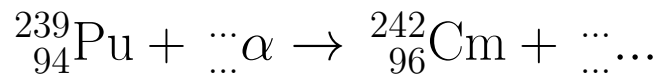
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / L^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / T^2$$

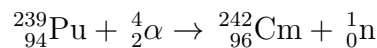
Funkcja  $f(x,t)$  spełnia równanie falowe, a więc opisuje falę.

## 66 Zadanie – Zderzenie z $\alpha$

Z jądrem  ${}^{239}_{94}\text{Pu}$  zderza się cząstka  $\alpha$ . Uzupełnij zapis tej reakcji, wpisując właściwe liczby lub symbole w 5 miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

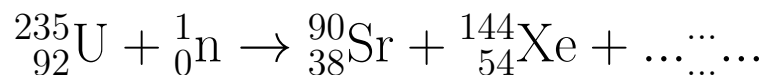


**Odpowiedź:**



## 67 Zadanie – Procesy jądrowe

Uzupełnij zapis reakcji jądrowej, wpisując właściwe liczby lub symbole w miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.



**Odpowiedź:**



## 68 Zadanie – Czas połowicznego rozpadu

W próbce po  $800 \cdot 10^3$  latach liczba radioaktywnych jąder atomowych pewnego izotopu zmniejszyła się 32 razy. Oblicz czas połowicznego rozpadu tego izotopu.

**Odpowiedź:** Czas połowicznego rozpadu to około  $T_{1/2} = t/n = 160 \cdot 10^3$  lat.

## 69 Zadanie – Wiek próbki

Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu jest równy  $8,04 \cdot 10^6$  s. Oblicz wiek próbki, jeśli wiadomo, że 94% jąder tego izotopu w próbce już się rozpadło. Wynik podaj w tygodniach.

**Odpowiedź:** Najbardziej prawdopodobny wiek próbki to około  $t = n T_{1/2} \approx 54$  tygodnia.

## 70 Zadanie – Datowanie geologiczne

W pewnej próbce granitu znajduje się 0,963 mg argonu  $^{40}\text{Ar}$  i 1,25 mg potasu  $^{40}\text{K}$ . Wyznacz wiek tej próbki. Czas połowicznego rozpadu  $^{40}\text{K}$  wynosi  $1,25 \cdot 10^9$  lat. Wiadomo, że tylko ok. 11% rozpadających się jąder  $^{40}\text{K}$  zmienia się w jądra  $^{40}\text{Ar}$ . Przyjmij, że wszystkie jądra  $^{40}\text{Ar}$  w próbce powstały z rozpadu  $^{40}\text{K}$  i że poza tym rozpadem inne procesy nie wpływały na zmianę składu tych dwóch pierwiastków w próbce granitu.

**Odpowiedź:** Najbardziej prawdopodobny wiek próbki  $t = n \cdot T_{1/2} \approx 3,75 \cdot 10^9$  lat.

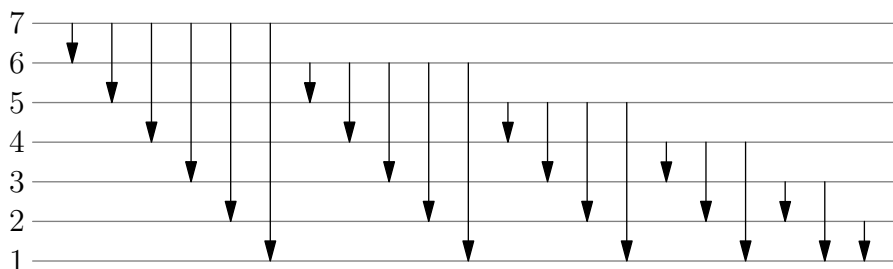
## 71 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej  $n = 7$ .

- Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej  $n$  (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
- Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
- Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

**Odpowiedź:**

- Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



- Można zaobserwować 21 linii.
- Przejście z poziomu 7 na poziom 6.

## 72 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej  $l$  i magnetycznej  $m$  określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej  $n = 5$ .

**Odpowiedź:** Możliwe stany to:

$$l = 0 \text{ z } m \in \{0\}$$

$$l = 1 \text{ z } m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$l = 2 \text{ z } m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$l = 3 \text{ z } m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$l = 4 \text{ z } m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

### 73 Zadanie – Liczba fotonów

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 500 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 67% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 32 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s i stałej Plancka  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J · s.

**Odpowiedź:** Liczba fotonów w impulsie  $n = E_i/E_\gamma = E_{\text{abs}}/(\varepsilon_{\text{eff}}E_\gamma) \approx 1200 \cdot 10^{14}$ .

### 74 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 230 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 2,64 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, ładunku elementarnego  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C, stałej Plancka  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J · s =  $4,136 \cdot 10^{-15}$  eV · s.

**Odpowiedź:** Praca wyjścia  $W = E_\gamma - E_k \approx 2,76$  eV.

### 75 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru w stanach:

a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2}\pi a_0^{5/2}}e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie  $a_0 \approx 0,529 \cdot 10^{-10}$  m. Wyniki podaj w jednostkach  $\text{nm}^{-3}$ . Funkcje określone są w układzie kartezjańskim  $XYZ$ , jądro spoczywa w środku tego układu, a  $r$  jest odległością od środka układu do punktu  $(x, y, z)$ .

**Odpowiedź:**

a)

$$|\Psi_{100}(0,0,0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0,0,0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

## 76 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną  $x$ . Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \left(x - \frac{L}{4}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$$

gdzie  $N$  oraz  $L = 8$  nm są stałymi. Zmienna  $x$  przyjmuje wartości od 0 do  $\frac{3}{4}L$ . Wypisz wszystkie wartości  $x$  w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np.  $\sin(\pi/2) = 1$ ,  $\cos(\pi/2) = 0$ .

**Odpowiedź:** Wartości  $x$ , w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: 0,  $L/4$ ,  $L/2$ , a więc 0 nm, 2 nm, 4 nm.

## 77 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

Cząstka o masie  $m$  jest uwięziona w sześcianie o krawędzi  $L$ . Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.

- Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.
- Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
- Dla cząstki znajdującej się w stanie

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(kx) \left(1 - 2\sqrt{7} \cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky) \sin(kz) e^{-i3\omega t}$$

gdzie  $k \equiv \frac{\pi}{L}$  oraz  $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$ , wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

- Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

*Wskazówka.* Dla dodatnich liczb całkowitych  $p$  i  $r$

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{pr}$$

**Odpowiedź:** a) Dla dodatnich liczb całkowitych  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t) \psi_{n_y}(y,t) \psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n_x kx) e^{-in_x^2 \omega t}$$

- Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

- Możliwe mierzone wartości energii dla stanu  $\Psi_s$  to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów  $\Psi_{111}$  oraz  $\Psi_{211}$ .

- Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii  $6\hbar\omega$  jest równe  $\frac{7}{8} \approx 0,875$ .



## 78 Zadanie – Jednostki masy

Przelicz kilogramy na gramy:

3 kg to ..... g

59 kg to ..... g

Przelicz tony na kilogramy:

4 t to ..... kg

1001000 t to ..... kg

Przelicz gramy na dekagramy:

320 g to ..... dag

1010 g to ..... dag

### Odpowiedź:

Kilogramy na gramy:

3000 g

59000 g

Tony na kilogramy:

4000 kg

1001000000 kg

Gramy na dekagramy:

32 dag

101 dag

## 79 Zadanie – Gęstość

Pytanie 1. Jaką masę ma sześcienny klocek o krawędzi 7 cm, jeśli gęstość materiału, z którego został wykonany, wynosi  $9 \text{ g/cm}^3$ ?

Pytanie 2. Jaką gęstość ma kula o objętości 1 litra, jeśli jej masa to 4 kg?

Pytanie 3. Jaką objętość musi mieć klocek wykonany z materiału o gęstości  $28 \text{ kg/m}^3$ , który ma masę 56 kg?

**Odpowiedź:** Sześcienny klocek o krawędzi 7 cm i gęstości  $9 \text{ g/cm}^3$  ma masę 3087 g.

Gęstość kuli o masie 4 kg i objętości 1 litra wynosi  $4 \text{ kg/dm}^3$ .

Objętość klocka wykonanego z materiału o gęstości  $28 \text{ kg/m}^3$ , który ma masę 56 kg wynosi  $2 \text{ m}^3$ .

## 80 Zadanie – Gęstość na Marsie

Gęstość pewnej skały na powierzchni Marsa to  $3,86 \text{ g/cm}^3$ . Łazik marsjański pobrał próbkę tej skały o objętości  $15 \text{ cm}^3$ . Jaką masę miała pobrana próbka skały?

**Odpowiedź:** Masa próbki to 57,9 g.

## 81 Zadanie – Gęstość zaludnienia

Na pewnej planecie są trzy kontynenty, każdy w kształcie innej figury geometrycznej. Pierwszy kontynent jest w kształcie kwadratu o boku 2000 km. Mieszka tu 40000000 osób. Drugi kontynent to prostokąt o bokach 1000 km i 7000 km. Mieszka tu 35000000 osób. Trzeci kontynent to trapez o wysokości 2000 km i podstawach o długości 500 km i 300 km. Mieszka na nim 6400000 osób. Oblicz gęstość zaludnienia na każdym z kontynentów.

**Odpowiedź:** Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 10 osób na  $\text{km}^2$ .  
Gęstość zaludnienia na prostokątnym kontynencie to 5 osób na  $\text{km}^2$ .  
Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 8 osób na  $\text{km}^2$ .

## 82 Zadanie – Rura z przewężeniem

Całym wnętrzem poziomo umieszczonej rury płynie woda. Rura posiada przewężenie, przez które woda przepływa z szybkością 58 cm/s. Przed przewężeniem woda płynie z szybkością 40 cm/s. Pomiń efekty związane z lepkością i ściśliwością. Przepływ jest laminarny. Gęstość wody jest równa  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

- Oblicz zmianę ciśnienia między dwoma punktami znajdującymi się na osi rury, z czego pierwszy punkt znajduje się przed przewężeniem, a drugi w przewężeniu.
- Napisz, w którym z punktów ciśnienie jest większe.

**Odpowiedź:**

- Zmiana ciśnienia  $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) \approx -88,2 \text{ Pa}$ .
- Ciśnienie jest większe przed przewężeniem.

## 83 Zadanie – Startujący samolot

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyspieszeniem  $6,25 \text{ m/s}^2$ . Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 7 s?

**Odpowiedź:** 43,75 m/s

## 84 Zadanie – Kolumna wojskowa

Pieszka kolumna wojskowa o długości 6 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 6 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 3 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 27 km/h.

- Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?
- Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania. Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

**Odpowiedź:**

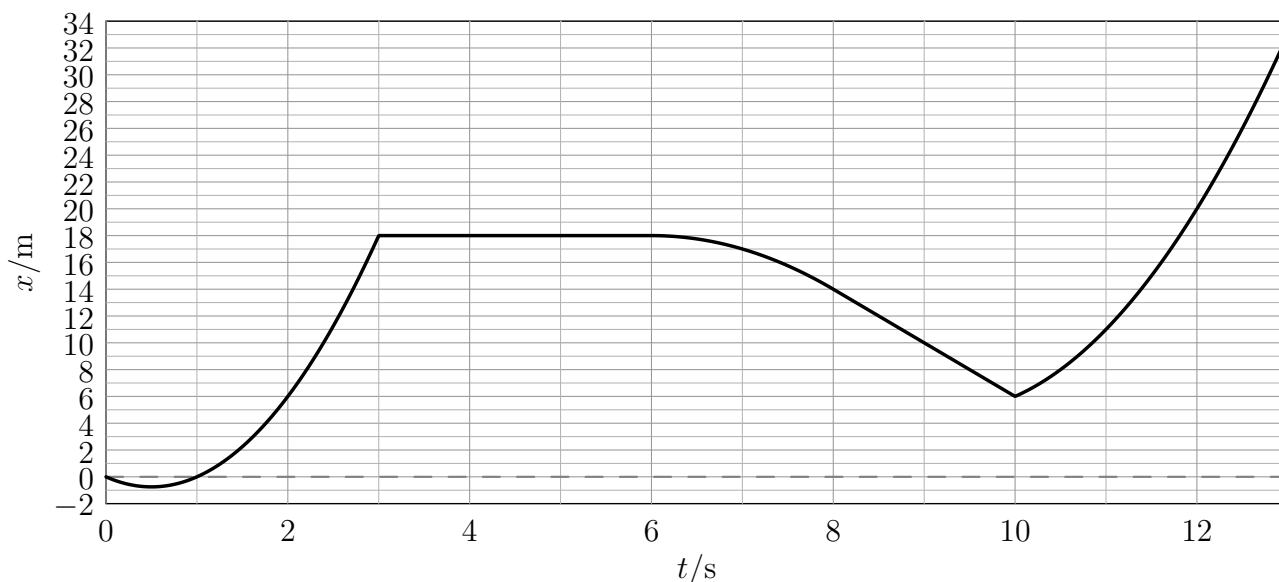
- Wykonanie zadania zajmie mu  $t = l\left(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_2 + V_1}\right) + t_1 \approx 31,1 \text{ min}$ , gdzie  $l$  to długość kolumny wojskowej,  $V_1$  to szybkość kolumny,  $t_1$  to czas przekazywania informacji, a  $V_2$  to

szybkość żołnierza na rowerze.

b) W tym czasie pokona on drogę  $s = tV_2(\frac{1}{v_2-v_1} + \frac{1}{v_1+v_2}) + t_1V_1 \approx 12,9$  km.

## 85 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

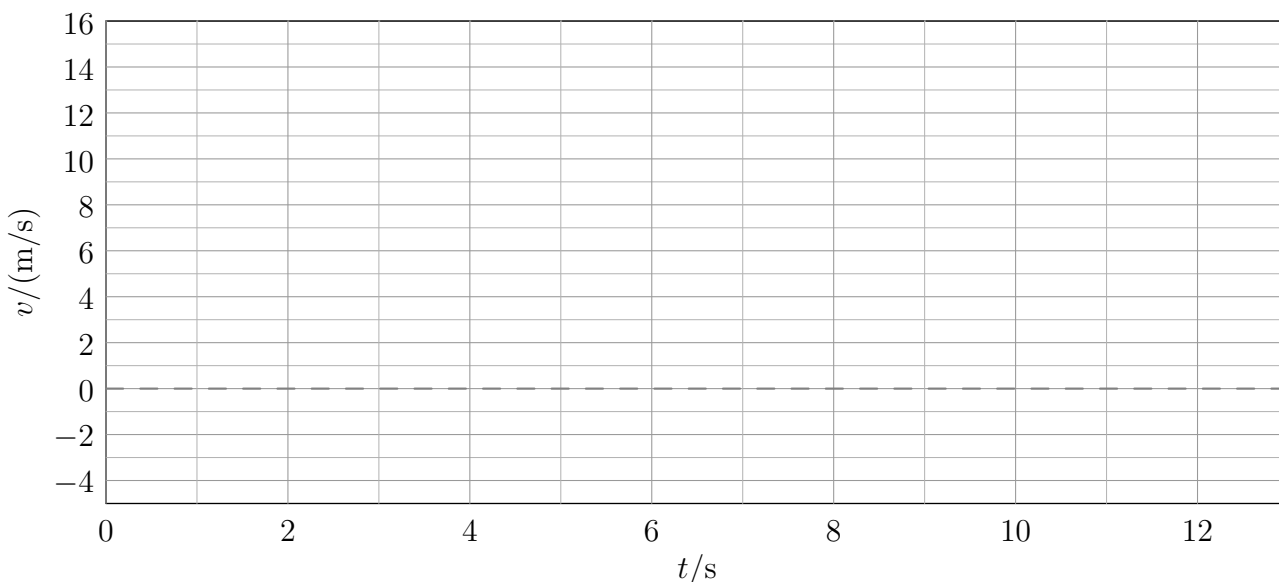
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi  $X$ . Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia  $x$  od czasu  $t$ .



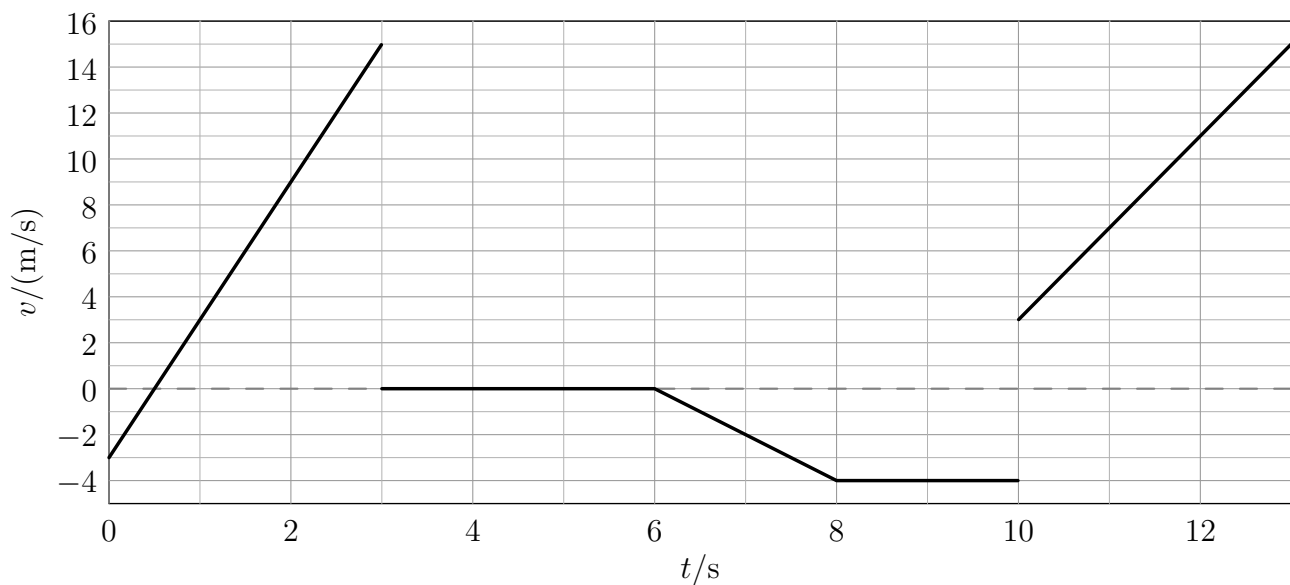
W tabeli podano przyśpieszenie  $a$  punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

$t/s$	$[0, 3[$	$]3, 6[$	$]6, 8[$	$]8, 10[$	$]10, 13]$
$a/(m/s^2)$	6	0	-2	0	4

Wykonaj wykres zależności prędkości  $v$  od czasu dla tego punktu materialnego dla  $t \in [0, 13]$  s.



**Odpowiedź:** Poprawny wykres:

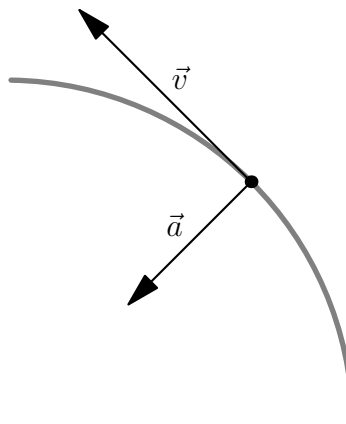


### 86 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 55 m ze stałą wartością prędkości 79,2 km/h.

- Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyspieszenia, opisz elementy rysunku.
- Oblicz wartość przyspieszenia samochodu w  $\text{m/s}^2$ .

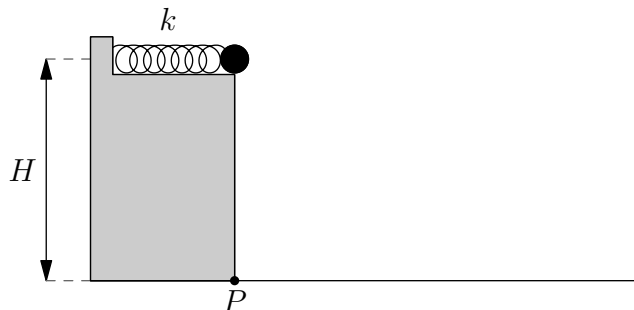
**Odpowiedź:** a) Wektor prędkości  $\vec{v}$  jest styczny do toru, a wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.



- Wartość przyspieszenia dośrodkowego to ok.  $8,8 \text{ m/s}^2$ .

### 87 Zadanie – Rzut poziomy

Sprężynę o współczynniku sprężystości  $k = 15 \text{ N/m}$ , ścisnięto o  $16 \text{ cm}$ , naciskając ją kulką o masie równej  $100 \text{ g}$ . Jaka będzie odległość kulki od punktu  $P$  do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości  $H = 3 \text{ m}$  nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominać. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



**Odpowiedź:** Zasięg rzutu kulki o masie  $m$  wyniesie  $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 153 \text{ cm}$ , gdzie  $x$  to ściśnięcie sprężyny.

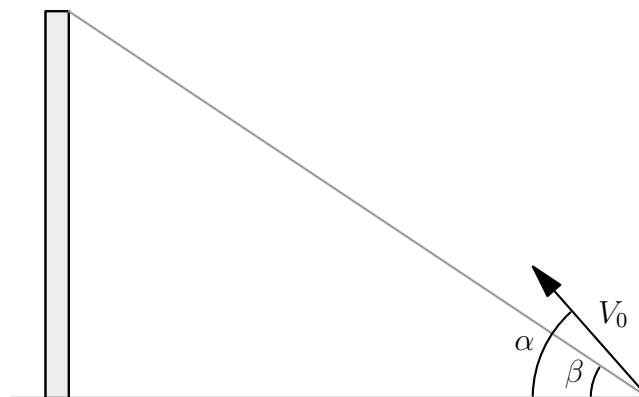
### 88 Zadanie – Strzelec

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o  $260 \text{ m}$ . Pocisk opuścił lufę z szybkością  $975 \text{ m/s}$ . Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyspieszenia ziemskiego  $9,8 \text{ m/s}^2$ , oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraż w centymetrach.

**Odpowiedź:** Pocisk opadł o około  $35 \text{ cm}$ .

### 89 Zadanie – Rzut ukośny

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem  $\alpha = 60^\circ$  do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej  $13 \text{ m}$ , a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem  $\beta = 40^\circ$  względem powierzchni ziemi. Jaka wartość prędkości  $V_0$  powinien nadać piłce? Opory powietrza pominać.



**Odpowiedź:** Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan \alpha - \tan \beta) \cos^2 \alpha \tan \beta}} \approx 18,4 \text{ m/s},$$

gdzie  $y$  to wysokość słupa.

## 90 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

### Odpowiedź:

#### I sposób – graniczna wartość $v$ .

Minimalna wartość prędkości  $v_m$  spełnia równanie  $v_m^2 = gl$ . Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci  $x^2 = 2l(l - y)$ . Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie  $2l(l - y) + y^2 = l^2$ , a ono sprowadza się do  $(l - y)^2 = 0$ , a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek  $y_{1,2} = l$ . Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie  $(0, l)$ , ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzeć ruch z minimalną wartością prędkości  $v_m$ , gdyż dla większych wartości prędkości  $v$  parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości  $v_m$ . Sprawdzenie:  $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$  prowadzi do warunku  $v \geq v_m$ .

#### II sposób – równanie na $y$ .

Oznaczenie:  $A \equiv \frac{2v^2}{g}$ . Z równania paraboli otrzymujemy  $x^2 = A(l - y)$ . Z równania okręgu,  $A(l - y) + y^2 = l^2$ , otrzymujemy  $(l - y)(l + y - A) = 0$ . Równanie to ma pierwiastek  $y_1 = l$ , czyli punkt  $(0, l)$  jest wspólny dla paraboli i okręgu. Drugi pierwiastek,  $y_2 = A - l$ , powinien też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości  $y$  dla punktów okręgu, czyli  $y \in [-l, l]$ . Stąd  $A \in [0, 2l]$ , a więc  $v^2 \leq gl$ . Wymagamy jednak  $v^2 \geq gl$ . W przypadku równości otrzymujemy  $y_2 = y_1 = l$ . W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

#### III sposób – równanie na $x$ .

Oznaczenie:  $B \equiv \frac{g}{2v^2}$ . Równanie paraboli:  $y = l - Bx^2$ . Z równania okręgu,  $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$ , otrzymujemy  $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$ . Równanie to ma podwójny pierwiastek  $x_{1,2} = 0$ , czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie  $(0, l)$ . Drugi pierwiastek,  $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$ , istnieje, jeśli  $2lB - 1 \geq 0$ , czyli gdy  $v^2 \leq gl$ . Wymagamy jednak  $v^2 \geq gl$ . W przypadku równości otrzymujemy  $x_{3,4} = 0$  (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

## 91 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili  $t_1 = 1,7$  s, którego położenie na osi  $X$  jest opisane równaniem

$$x(t) = A \left( 1 - e^{-\lambda(t-t_0)} \right)$$

gdzie  $A = 5,7$  m,  $\lambda = 0,6$  s<sup>-1</sup> oraz  $t_0 = 0,5$  s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$v(t_1) \approx 1,67 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -A \lambda^2 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$a(t_1) \approx -0,999 \text{ m/s}^2$$

## 92 Zadanie – Prędkość i przyspieszenie punktu materialnego 2D

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie  $t$  oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

$v_0$	$A$	$\lambda$	$\omega$
2 m/s	3 m	0,2 s <sup>-1</sup>	4 s <sup>-1</sup>

Oblicz prędkość i przyspieszenie tego punktu materialnego w chwili  $t_1 = 4$  s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyspieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 2 \\ -5,09 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 8,26 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

## 93 Zadanie – Prędkość i przyspieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie  $t$  oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

$f_x$	$g_x$	$h_x$	$g_y$	$h_y$	$e_z$	$f_z$	$g_z$
2 m/s <sup>2</sup>	-2 m/s	16 m	-4 m/s	-19 m	-2 m/s <sup>3</sup>	3 m/s <sup>2</sup>	-5 m/s

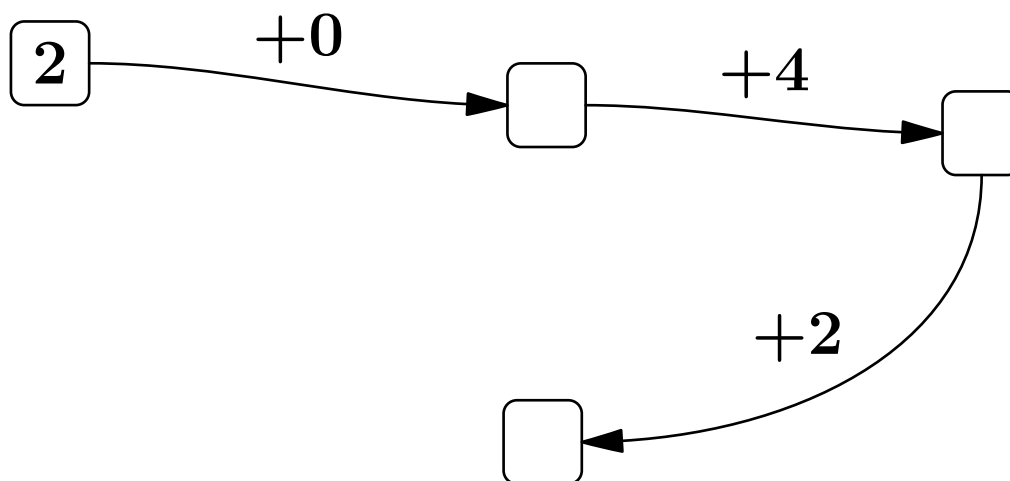
Oblicz prędkość i przyspieszenie tego punktu materialnego w chwili  $t_1 = 5$  s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyspieszenie:

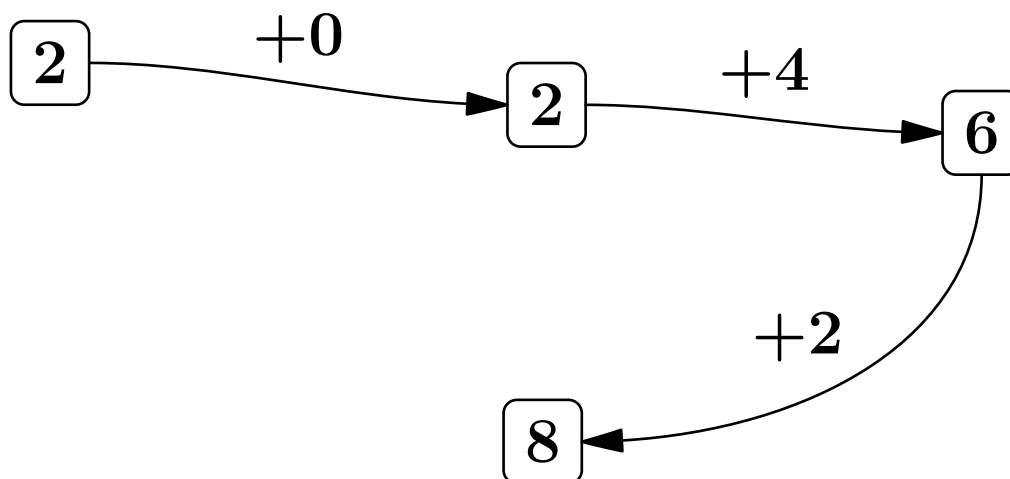
$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 \\ -125 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -54 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**94 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie, 0–10**

W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



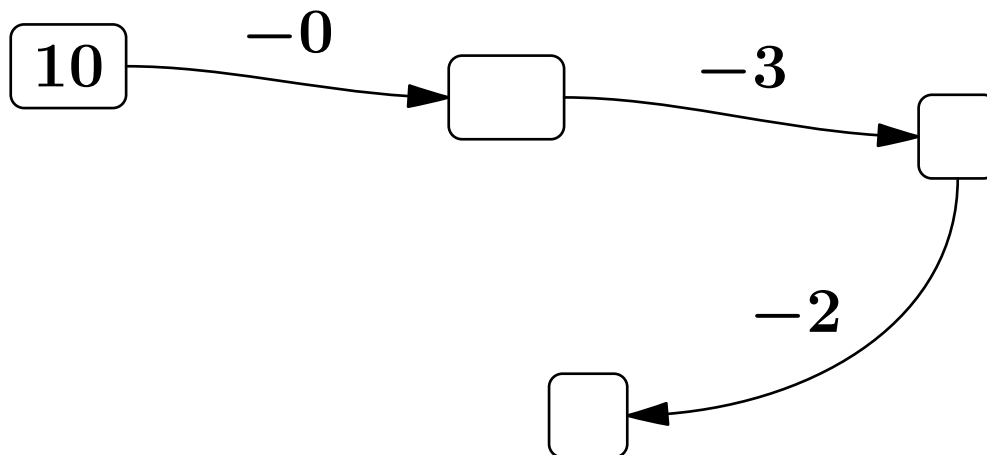
Odpowiedź:



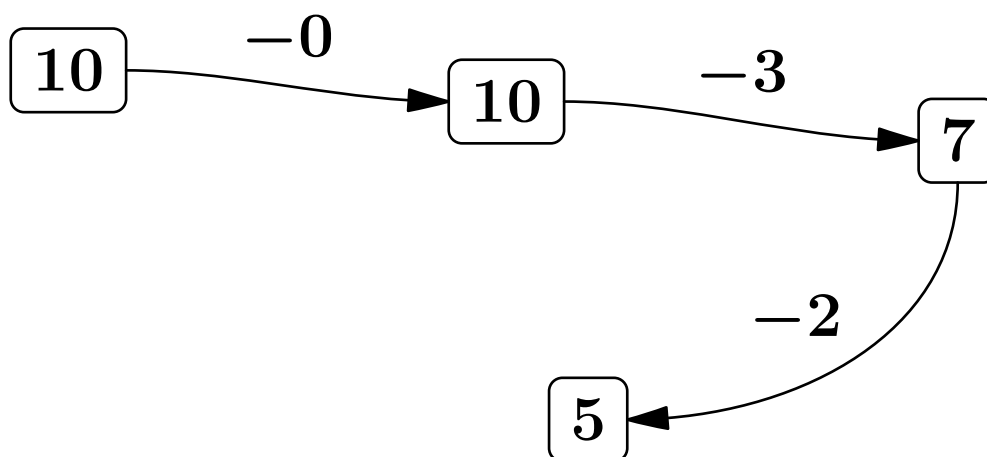


### 95 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie, 0–10

W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

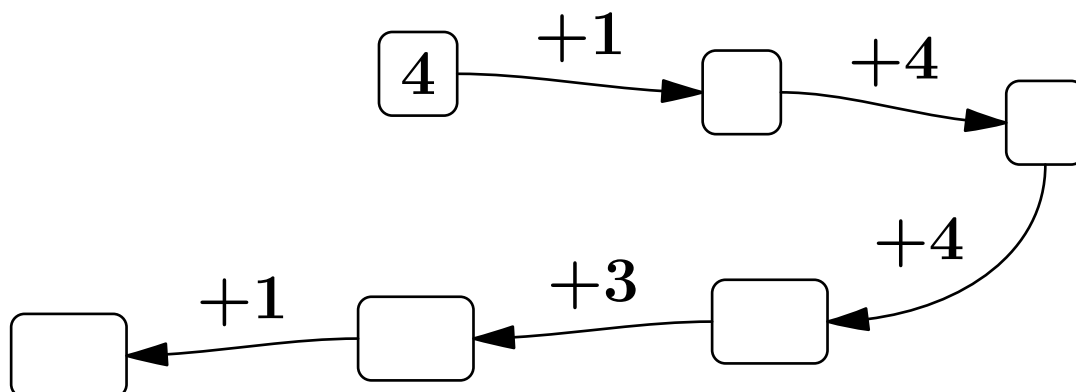


Odpowiedź:

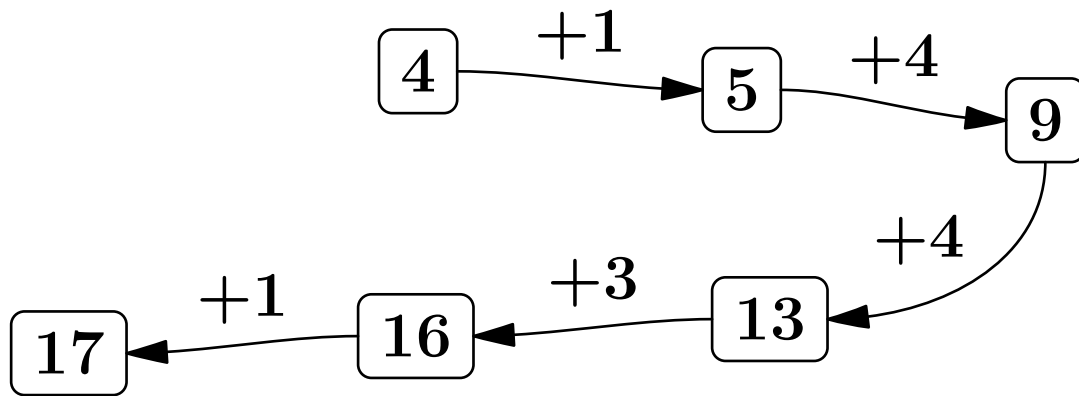


### 96 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 0–4, 0–20

W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

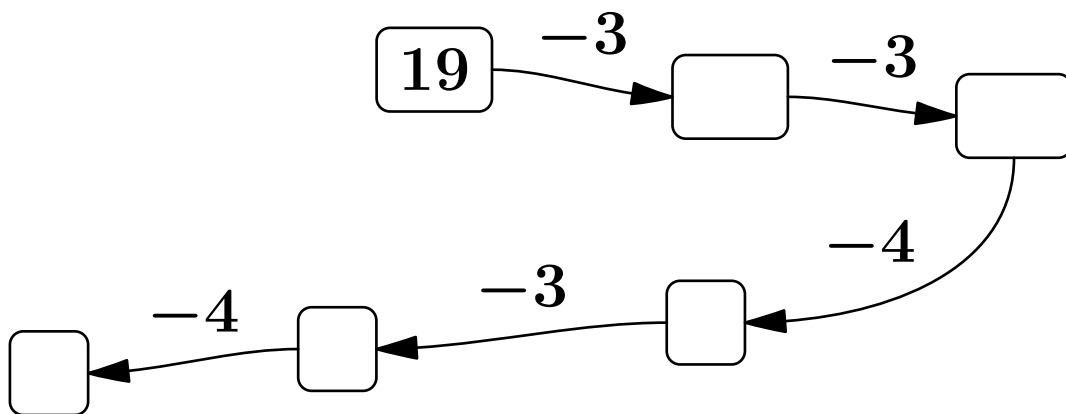


Odpowiedź:

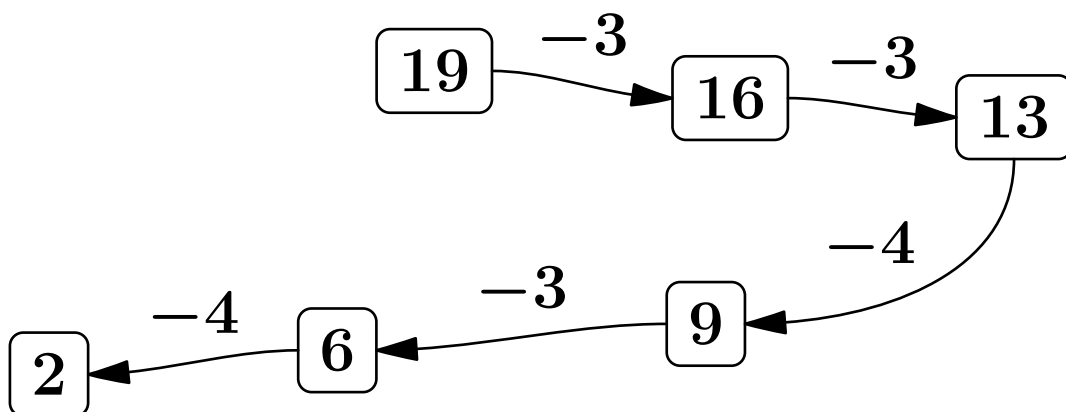


### 97 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 0–4, 0–20

W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

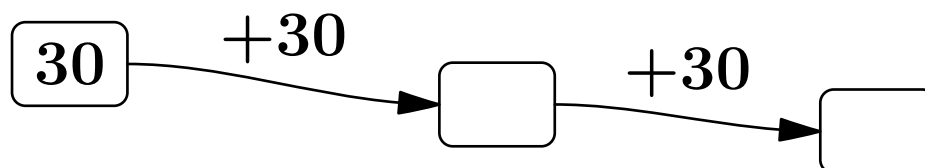


Odpowiedź:

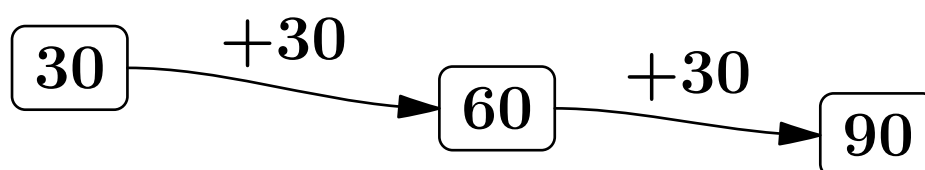


**98 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie wielokrotności 10, 0–100**

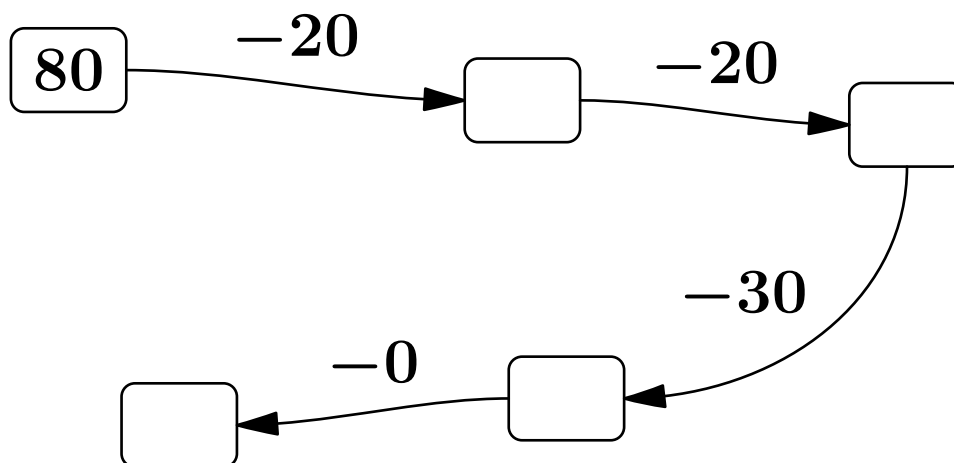
W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



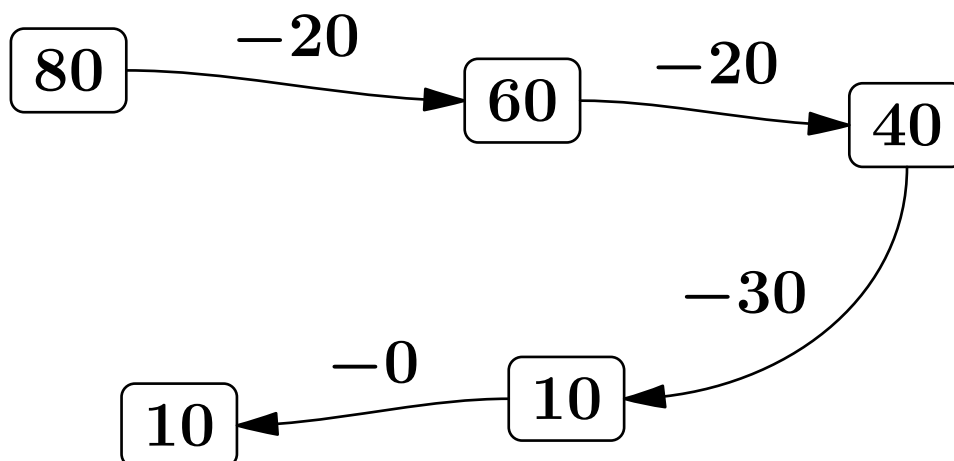
Odpowiedź:

**99 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie wielokrotności 10, 0–100**

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

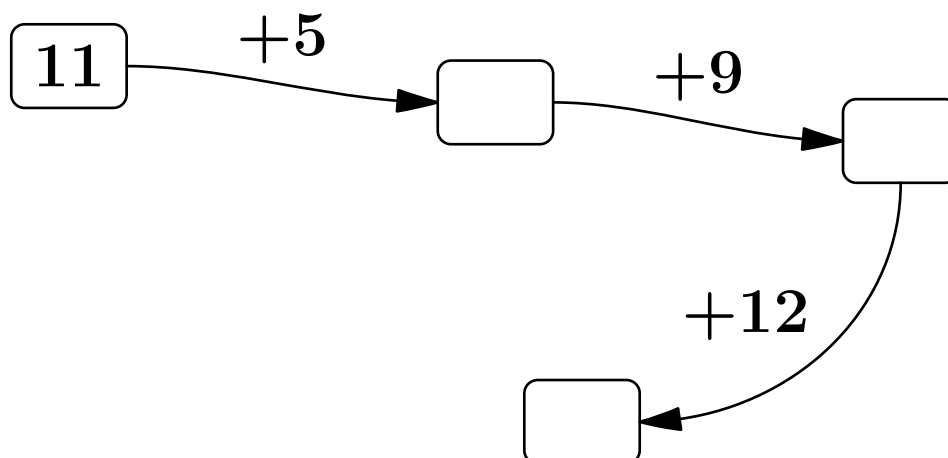


Odpowiedź:

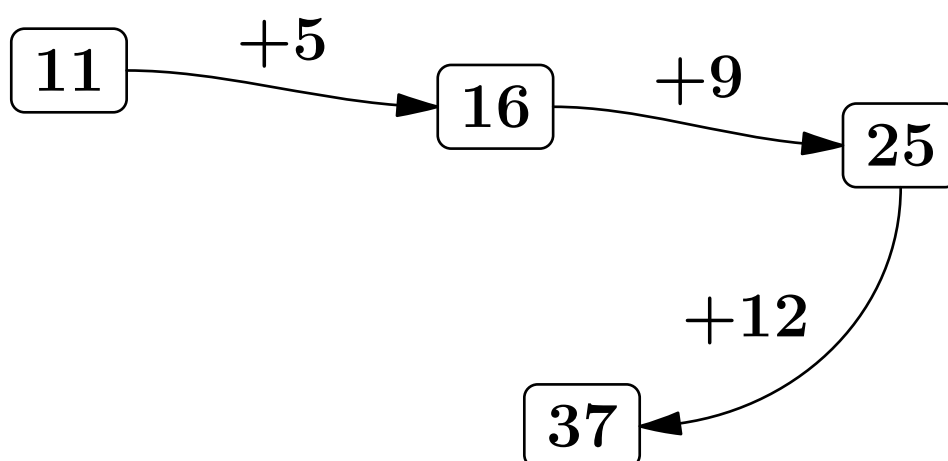


**100 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–12, 0–45**

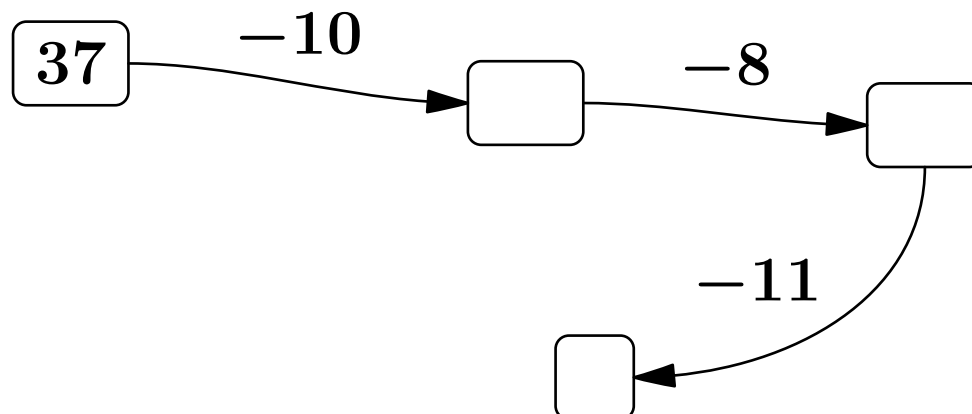
W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



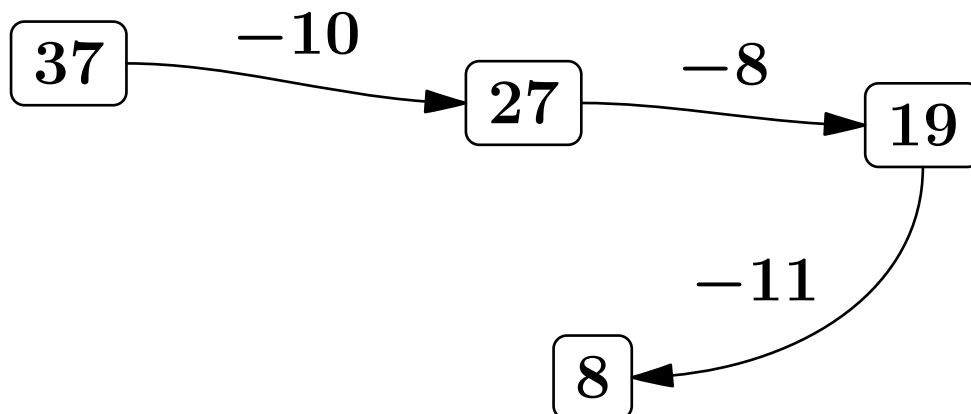
Odpowiedź:

**101 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–12, 0–45**

W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

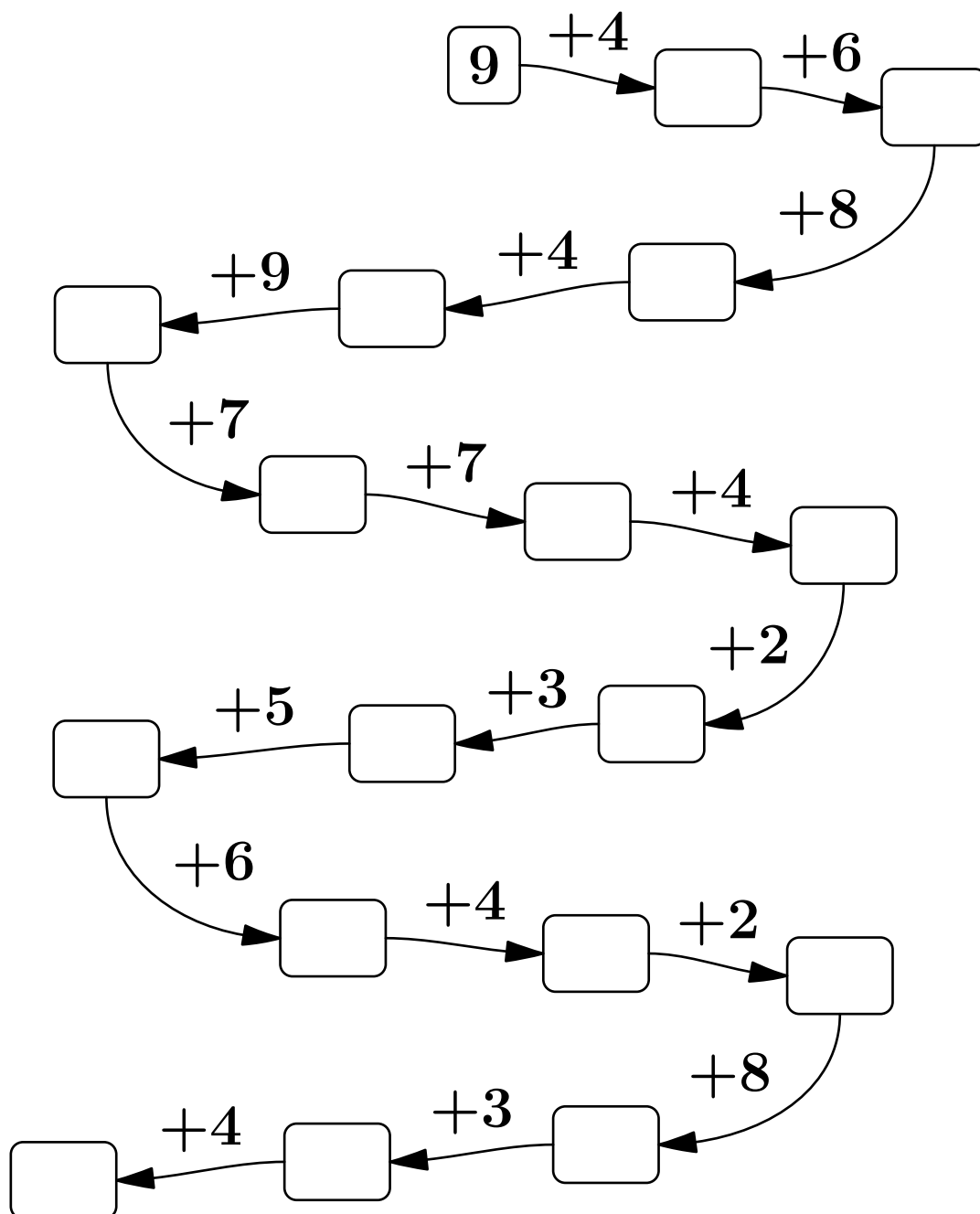


Odpowiedź:

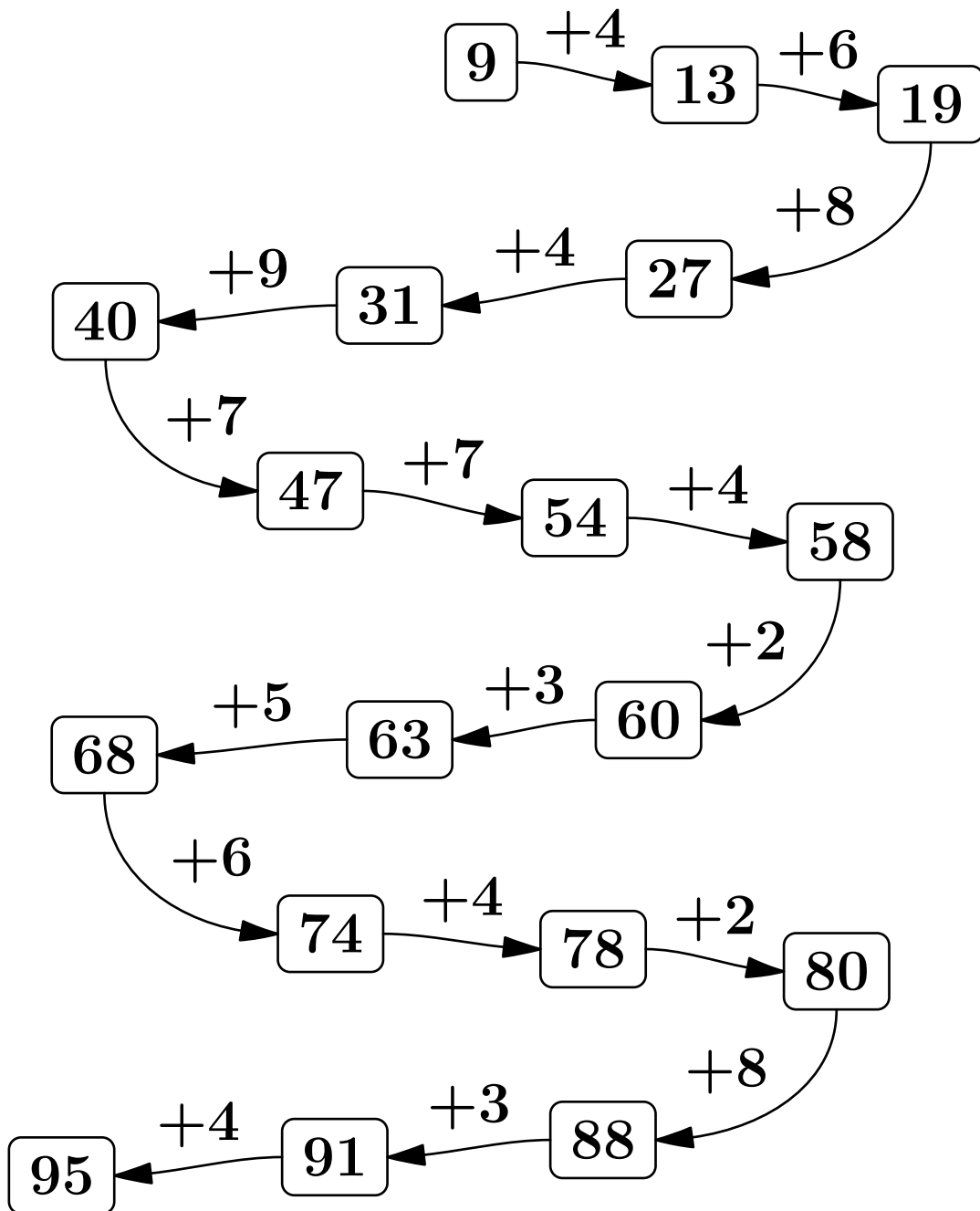


### 102 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 2–9, 0–100

W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

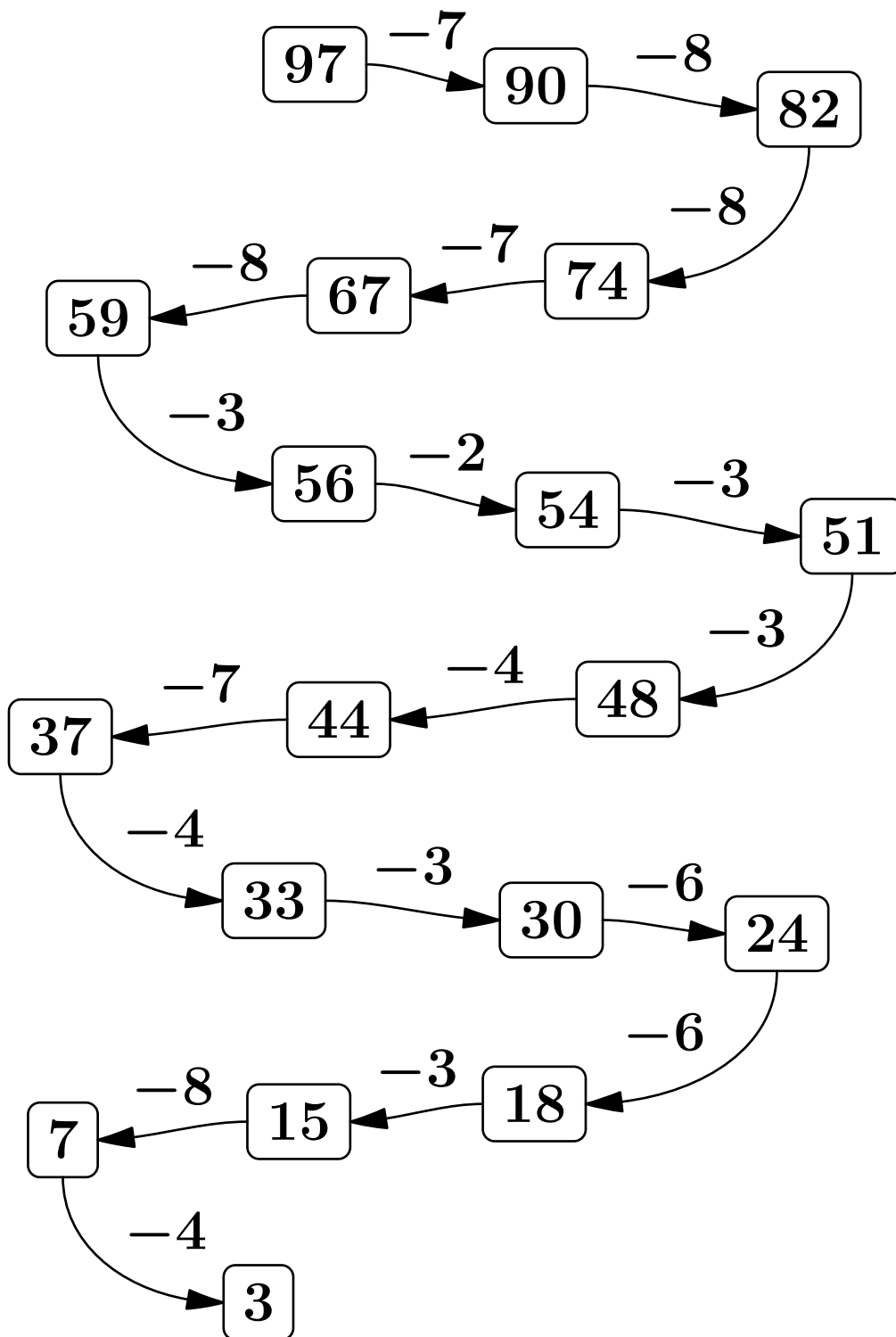


Odpowiedź:



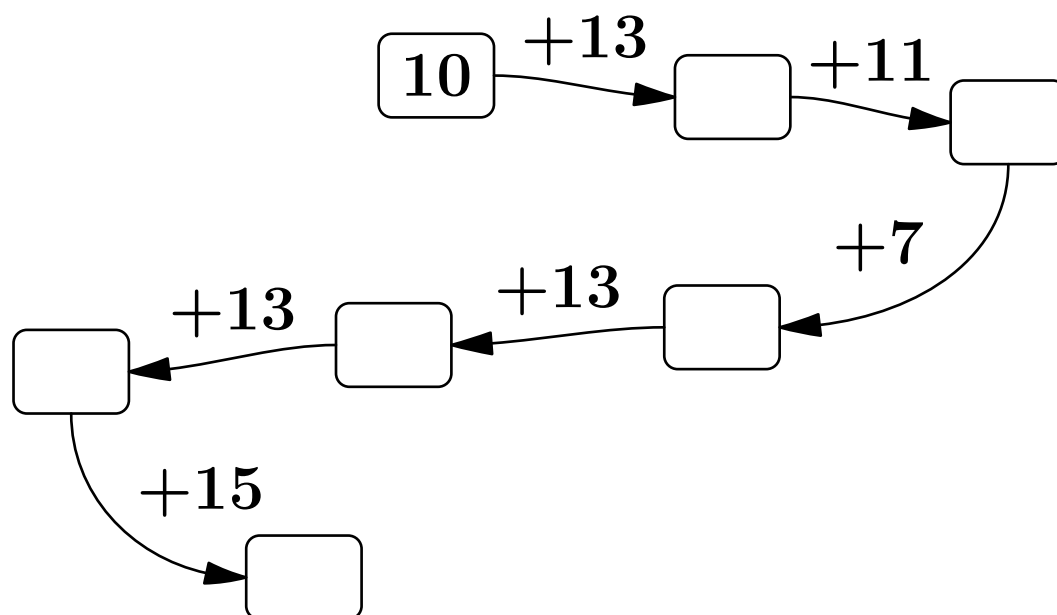




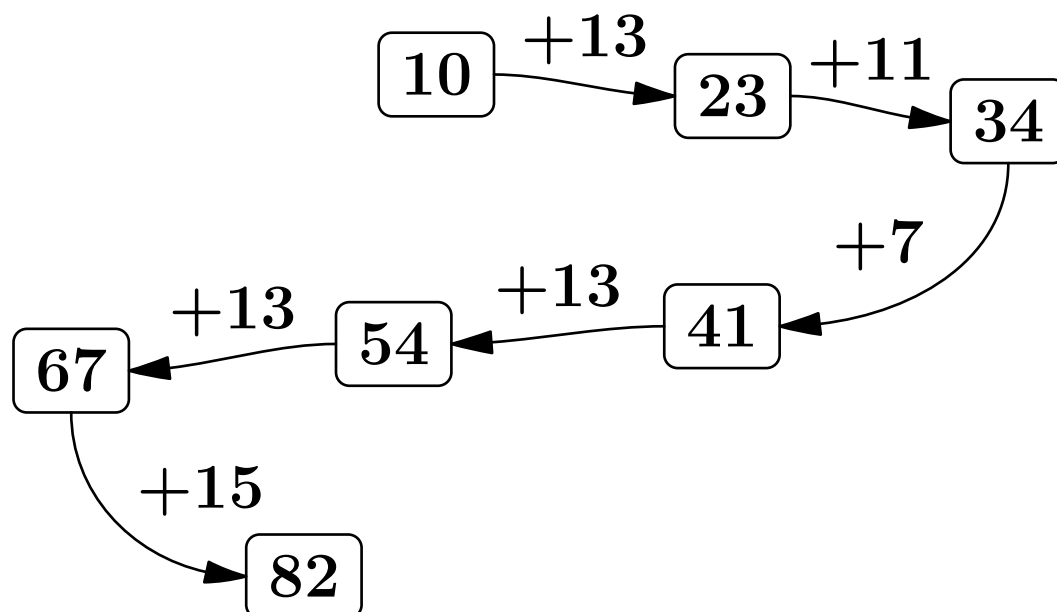


**104 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–20, 0–100**

W poniższym węży liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

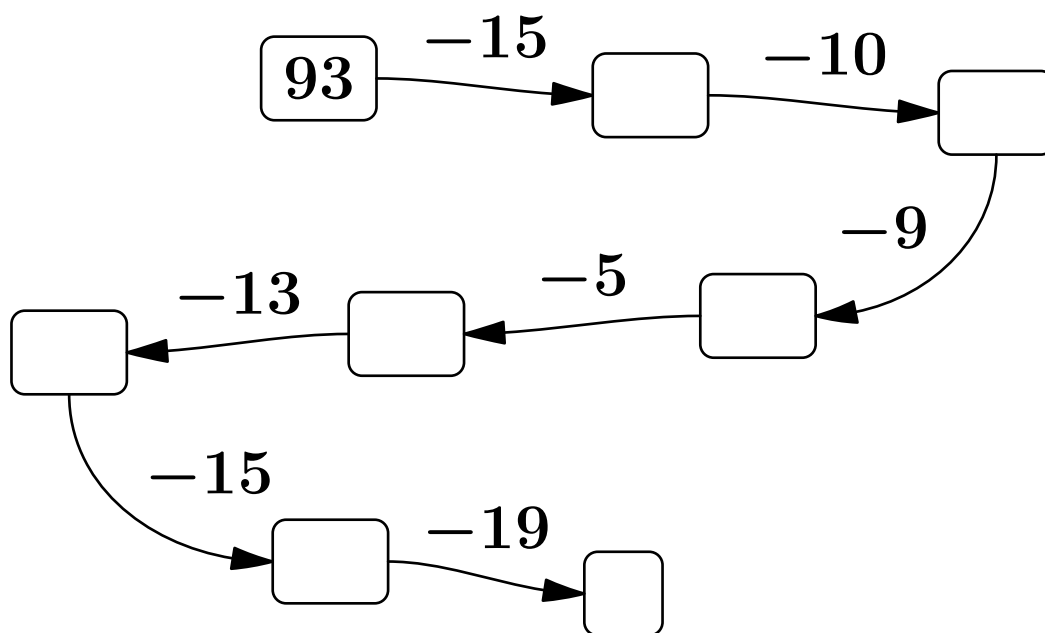


Odpowiedź:

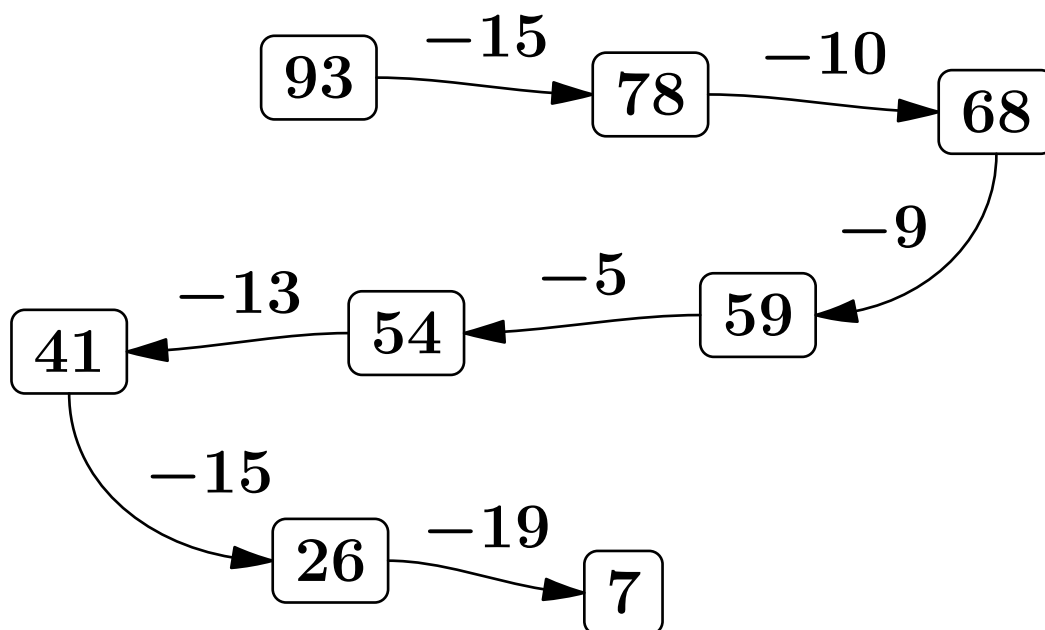


**105 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–20, 0–100**

W poniższym węźu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

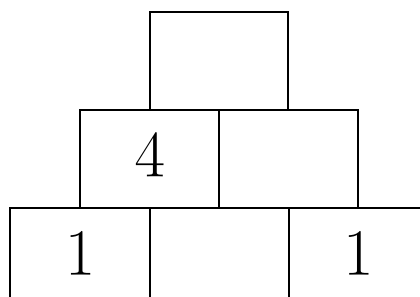


Odpowiedź:

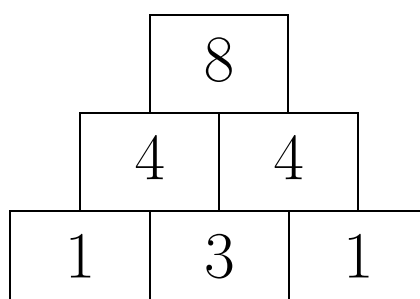


**106 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 1–10**

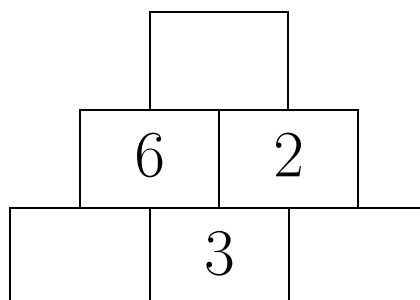
W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



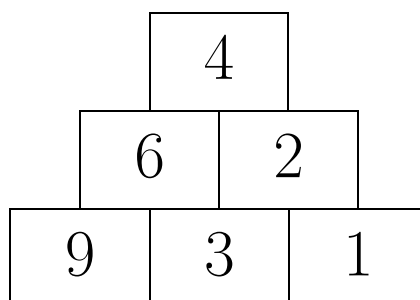
**Odpowiedź:**

**107 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 1–10**

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

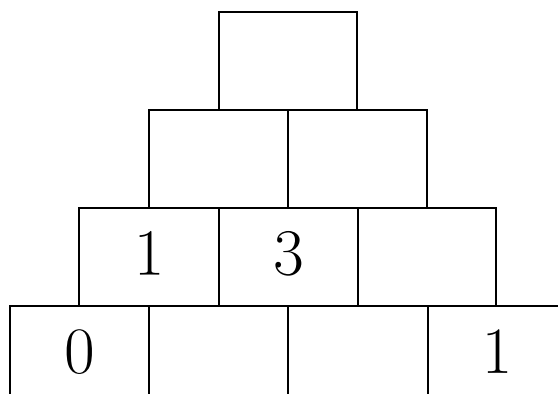


**Odpowiedź:**

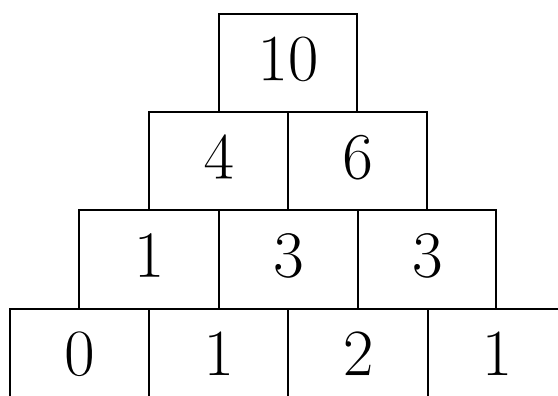


**108 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–10**

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

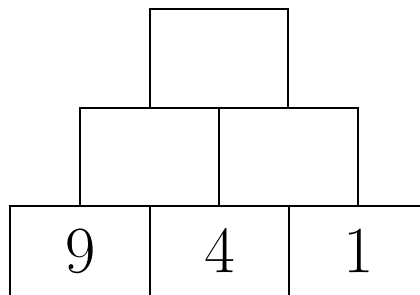


**Odpowiedź:**

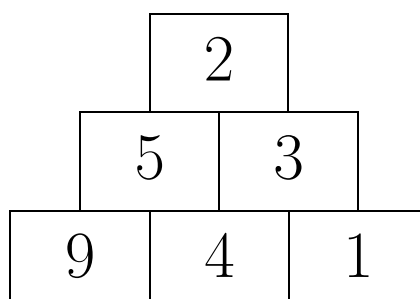


**109 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–10**

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

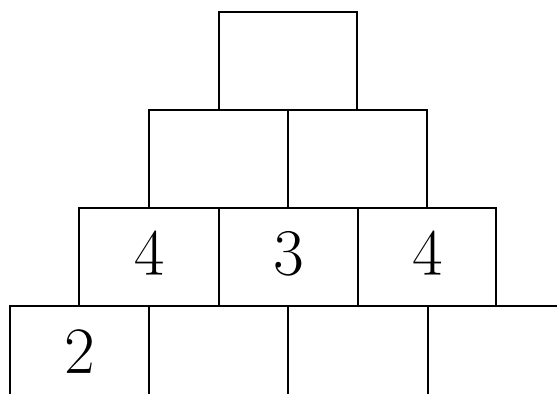


**Odpowiedź:**

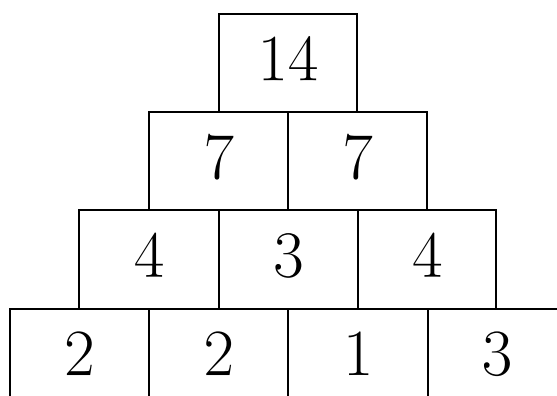


### 110 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

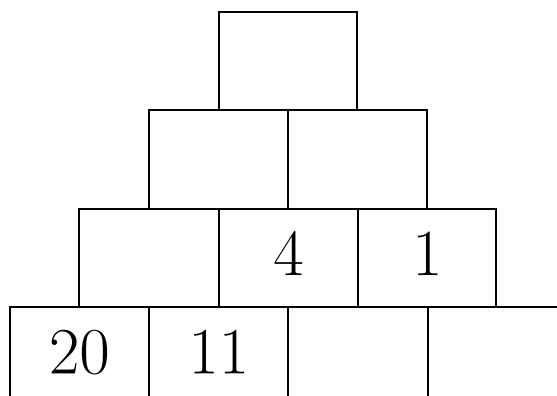


**Odpowiedź:**

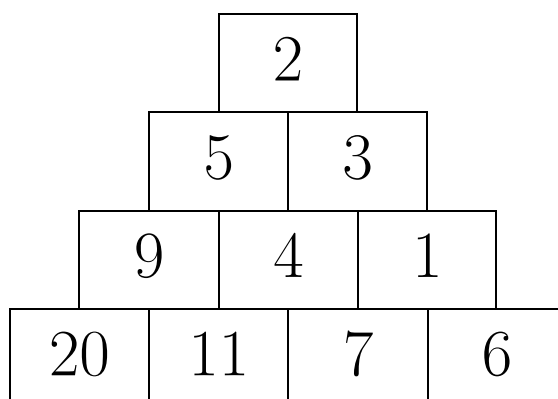


### 111 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

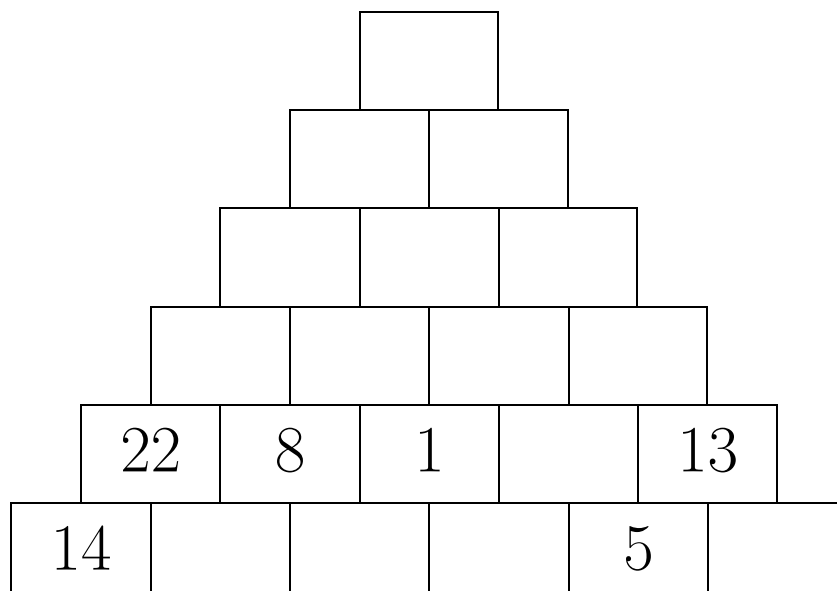


**Odpowiedź:**

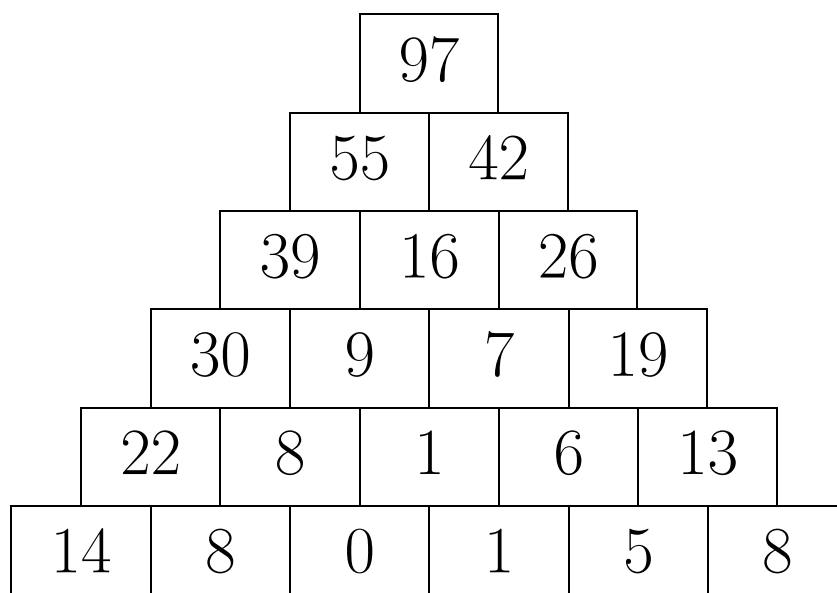


### 112 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



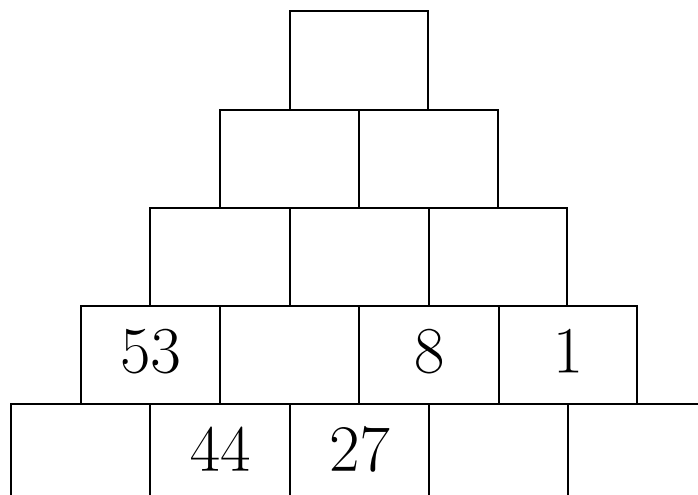
**Odpowiedź:**



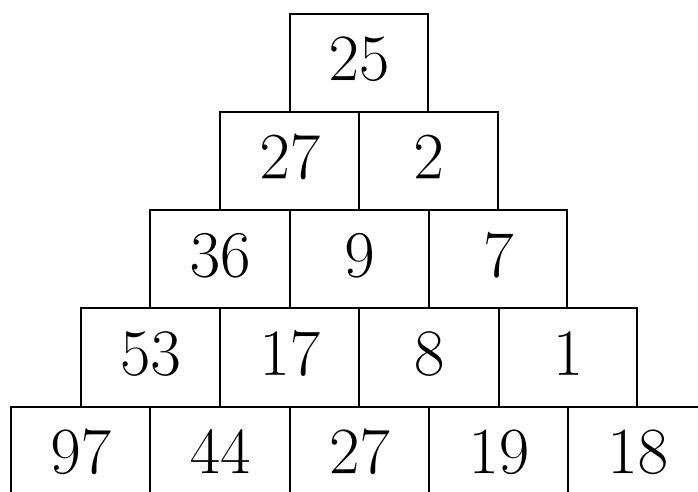


### 113 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



**Odpowiedź:**



### 114 Zadanie – Dodawanie pisemne, 35

Oblicz poniższe sumy.

a)

	1	6
+		8

b)

	1	5
+	1	7

Odpowiedź:

a)

	1	6
+		8
<hr/>		
	2	4

b)

	1	5
+	1	7
<hr/>		
	3	2

**115 Zadanie – Dodawanie pisemne, 55**

Oblicz poniższe sumy.

a)

	2	9
+	1	8
<hr/>		

b)

	3	4
+	1	9
<hr/>		

Odpowiedź:

a)

	2	9
+	1	8
<hr/>		
	4	7

b)

	3	4
+	1	9
<hr/>		
	5	3

**116 Zadanie – Dodawanie pisemne, 100**

Oblicz poniższe sumy.

a) 

	5	3
+	3	4

b) 

	6	9
+	2	9

**Odpowiedź:**

a) 

	5	3
+	3	4
	8	7

b) 

	6	9
+	2	9
	9	8

**117 Zadanie – Dodawanie pisemne, 150**

Oblicz poniższe sumy.

a) 

	8	2
+	3	4

b) 

	7	1
+	7	9

**Odpowiedź:**

a) 

	8	2
+	3	4
1	1	6

b) 

	7	1
+	7	9
1	5	0

**118 Zadanie – Dodawanie pisemne, 1500**

Oblicz poniższe sumy.

a)

	5	3	0
+	4	3	1
<hr/>			

b)

	6	9	8
+	7	6	1
<hr/>			

**Odpowiedź:**

a)

	5	3	0
+	4	3	1
<hr/>			
	9	6	1

b)

	6	9	8
+	7	6	1
<hr/>			
1	4	5	9

**119 Zadanie – Liczba stron**

Wanda rozpoczęła czytanie książki od początku 27 strony, a po dwóch godzinach skończyła czytać na końcu 96 strony.

a) Ile stron przeczytała Wanda?

b) Ile średnio stron czytała Wanda przez jedną godzinę?

**Odpowiedź:** Wanda przeczytała 70 stron, a czytała średnio 35 stron na godzinę.

**120 Zadanie – Śliwki**

Jaś miał 18 śliwek. Następnie zjadł jedną trzecią śliwek. Ile śliwek zostało Jasiowi?

**Odpowiedź:** Jasiowi zostało 12 śliwek.

**121 Zadanie – Jabłka**

Jaś policzył posiadane przez Maćka jabłka – było ich 30 – a następnie wziął połowę posiadanych przez Maćka jabłek i dodał je do swoich zapasów jabłek. Wtedy okazało się, że Jaś posiada 3 razy tyle jabłek, co Maciek. Ile jabłek posiadają razem Jaś i Maciek?

**Odpowiedź:** Jaś i Maciek mają razem 60 jabłek.

## 122 Zadanie – Kamyki

Daria i Nela zebrały na plaży kamyki. Jeśli Daria dałaby Neli 3 kamyki, to miałyby po tyle samo kamyków. A jeśli Nela dałaby Darii 6 kamyków, to Daria miałaby 4 razy tyle kamyków, co Nela. Ile kamyków ma każda z dziewczynek?

**Odpowiedź:** Daria miała 18 kamyków, a Nela 12 kamyków.

## 123 Zadanie – Działania na liczbach ujemnych

Oblicz:

- a)  $-18 + (-19) =$
- b)  $-15 - (-186) =$
- c)  $26 + (-40) =$
- d)  $-43 - 11 + 19 =$

**Odpowiedź:**

- a)  $-37$
- b)  $171$
- c)  $-14$
- d)  $-35$

## 124 Zadanie – Winda

W wysokim bloku z wielopoziomowym parkingiem podziemnym jest winda, która porusza się między piętrami. Winda ruszyła z parteru (piętro 0) 15 pięter do góry, a następnie 8 pięter w dół. Po chwili zjechała 7 pięter w dół, a następnie pojechała 19 pięter w górę. Na którym piętrze jest teraz winda, jeśli przed chwilą zjechała 6 pięter w dół?

**Odpowiedź:** Winda znajduje się na 13 piętrze.

## 125 Zadanie – Ślimak

Ślimak, aby wspiąć się na szczyt wieży, musi jeszcze przebyć w pionie odległość 1536 cm. Za każdym razem przez 8 godz. ślimak sunie do góry, a następnie odpoczywa przez 4 godz. Wspinając się pokonuje 8 mm na minutę w górę muru, a odpoczywając zsuwa się o 4 mm na minutę w dół. Po ilu godzinach ślimak dotrze na szczyt wieży, jeśli właśnie zaczął się wspinać?

**Odpowiedź:** Ślimak dotrze na szczyt wieży po 56 godz.

## 126 Zadanie – Rodzaje magnetyków

Zaobserwowano, że próbka materiału umieszczona w pobliżu cewki, przez którą płynął prąd elektryczny, była przyciągana do cewki. Po wyłączeniu prądu płynącego przez cewkę magnetyzacja próbki zmniejszyła się do zera. Podkreśl nazwę opisującą rodzaj magnetyka, z którego wykonana jest próbka: diamagnetyk, paramagnetyk.

**Odpowiedź:** Próbkę wykonano z paramagnetyka.

## 127 Zadanie – Jednostki objętości

Przelicz  $\text{m}^3$  na  $\text{km}^3$ :

$110000000 \text{ m}^3$  to .....  $\text{km}^3$

$6400000 \text{ m}^3$  to .....  $\text{km}^3$

Przelicz  $\text{m}^3$  na  $\text{cm}^3$ :

$7 \text{ m}^3$  to .....  $\text{cm}^3$

$14 \text{ m}^3$  to .....  $\text{cm}^3$

Przelicz  $\text{mm}^3$  na  $\text{cm}^3$ :

$26000 \text{ mm}^3$  to .....  $\text{cm}^3$

$300200 \text{ mm}^3$  to .....  $\text{cm}^3$

### Odpowiedź:

$\text{m}^3$  na  $\text{km}^3$ :

$0,11 \text{ km}^3$

$0,0064 \text{ km}^3$

$\text{m}^3$  na  $\text{cm}^3$ :

$7000000 \text{ cm}^3$

$14000000 \text{ cm}^3$

$\text{mm}^3$  na  $\text{cm}^3$ :

$26 \text{ cm}^3$

$300,2 \text{ cm}^3$

## 128 Zadanie – Rozładowanie akumulatora

Przez 39 godzin rozładowywano akumulator, mierząc płynący prąd amperomierzem. Średnie natężenie prądu podczas rozładowania było równe  $32 \text{ mA}$ . Oblicz ładunek, który przepłynął przez amperomierz. Wynik podaj w kulombach.

**Odpowiedź:** Przepłynął ładunek równy  $Q = It \approx 4490 \text{ C}$ .

## 129 Zadanie – Alarm samochodowy

Przez pewien alarm samochodowy w trybie czuwania przepływa prąd o średnim natężeniu  $10 \text{ mA}$ . Oblicz ładunek, który przepłynął przez ten układ w trakcie 11 dób. Wynik podaj w kulombach i amperogodzinach.

**Odpowiedź:** Przepłynął ładunek równy  $Q = It \approx 2,64 \text{ Ah} \approx 9500 \text{ C}$ .

## 130 Zadanie – Opornik

Gdy przez opornik płynął stały prąd o natężeniu  $15 \text{ mA}$ , napięcie mierzone między końcówkami opornika było równe  $0,93 \text{ V}$ .

a) Oblicz opór opornika.

b) Zakładając, że opornik spełnia prawo Ohma, oblicz natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy napięcie mierzone między jego końcówkami jest równe  $7,44 \text{ V}$ .

**Odpowiedź:**

- a) Opór  $R = U_1/I_1 = 62 \Omega$ .  
b) Natężenie prądu  $I_2 = U_2/R = I_1 U_2/U_1 = 120 \text{ mA}$ .

**131 Zadanie – Odległość do diody**

Cienka soczewka o ogniskowej 6 cm musi być odsunięta na odległość 7 cm od ekranu, aby uzyskać na nim ostry obraz świecącej diody znajdującej się na osi optycznej soczewki.

- a) Oblicz odległość od soczewki do diody.  
b) Oblicz stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu.

**Odpowiedź:**

- a) Odległość od soczewki do diody to 42 cm.  
b) Stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu to 6.

**132 Zadanie – Polaryzacja odbitego światła**

Studenci powinni określić materiał, z którego została wykonana sześcienna bryła. Mają tego dokonać tylko na podstawie badania polaryzacji odbitego od jej ściany światła. Dysponują wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskali, gdy kąt między normalną do ściany a odbitą wiązką był równy  $67,6^\circ$ . Na podstawie odpowiednich obliczeń wskaż, z którego z następujących materiałów najprawdopodobniej wykonano bryłę (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): diament (2,42), szkło kwarcowe (1,46), fluorek sodu (1,33). Bryła znajduje się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

**Odpowiedź:** Bezwzględny współczynnik załamania jest równy  $n_2 = n_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 2,43$ . A więc materiałem jest najprawdopodobniej diament.

**133 Zadanie – Polaryzacja i geolog**

Młoda geolog podczas wycieczki w Sudetach znalazła fragment kryształu. W celu jego identyfikacji badała polaryzację odbitego od ściany kryształu światła. Dysponowała wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskała, gdy kąt między normalną do ściany kryształu a odbitą wiązką był równy  $67,6^\circ$ . Na podstawie odpowiednich obliczeń określ najbardziej prawdopodobny minerał, którego fragment był badany. Wybierz spośród (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): diament (2,42), korund (1,77), szkło kwarcowe (1,46). Kryształ znajdował się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

**Odpowiedź:** Bezwzględny współczynnik załamania jest równy  $n_2 = n_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 2,43$ . A więc minerałem jest najprawdopodobniej diament.



### 134 Zadanie – Jednostki powierzchni

Przelicz  $\text{km}^2$  na  $\text{m}^2$ :

127  $\text{km}^2$  to .....  $\text{m}^2$

312  $\text{km}^2$  to .....  $\text{m}^2$

Przelicz  $\text{m}^2$  na  $\text{cm}^2$ :

15  $\text{m}^2$  to .....  $\text{cm}^2$

101  $\text{m}^2$  to .....  $\text{cm}^2$

Przelicz  $\text{mm}^2$  na  $\text{cm}^2$

1600  $\text{mm}^2$  to .....  $\text{cm}^2$

2005  $\text{mm}^2$  to .....  $\text{cm}^2$

#### Odpowiedź:

$\text{km}^2$  na  $\text{m}^2$ :

127000000  $\text{m}^2$

312000000  $\text{m}^2$

$\text{m}^2$  na  $\text{cm}^2$ :

150000  $\text{cm}^2$

1010000  $\text{cm}^2$

$\text{mm}^2$  na  $\text{cm}^2$ :

16  $\text{cm}^2$

20,05  $\text{cm}^2$

### 135 Zadanie – Prostokąty

O ile zmieni się pole prostokąta o bokach 14 cm i 12 cm, jeśli pierwszy bok zwiększymy 8 razy, a drugi bok zmniejszymy 6 razy?

**Odpowiedź:** Różnica powierzchni tych prostokątów wynosi 56  $\text{cm}^2$

### 136 Zadanie – Boki prostokątów

Oblicz długość:

a) boku kwadratu o polu powierzchni 100  $\text{m}^2$ .

b) boku prostokąta o polu powierzchni 60  $\text{m}^2$ , którego drugi z boków jest równy 10 m.

c) boku kwadratu o obwodzie 24 m.

d) boku prostokąta o obwodzie 48 m, którego drugi z boków jest równy 6 m.

#### Odpowiedź:

a) 10 m.

b) 6 m.

c) 6 m.

d) 18 m.

### 137 Zadanie – Jednostki długości

Przelicz kilometry na metry:

156 km to ..... m

627 km to ..... m

Przelicz metry na centymetry:

12 m to ..... cm

100100 m to ..... cm

Przelicz milimetry na centymetry:

370 mm to ..... cm

4005 mm to ..... cm

#### Odpowiedź:

kilometry na metry:

156000 m

627000 m

metry na centymetry:

1200 cm

10010000 cm

milimetry na centymetry:

37 cm

400,5 cm

### 138 Zadanie – Jednostki czasu

Przelicz minuty na sekundy:

25 min. to ..... s

115 min. to ..... s

Przelicz godziny na minuty:

10 godz. to ..... min.

17 godz. to ..... min.

Przelicz sekundy na godziny:

39600 s to ..... godz.

86400 s to ..... godz.

#### Odpowiedź:

minuty na sekundy:

1500 s

6900 s

godziny na minuty:

600 min.

1020 min.

sekundy na godziny:

11 godz.

24 godz.

### 139 Zadanie – Prędkość człowieka

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 15300 metrów w ciągu 45 minut?

**Odpowiedź:** Człowiek porusza się z prędkością 20,4 km/h.

### 140 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 340 m/s.

**Odpowiedź:** Minimalna odległości od ściany to około 13,6 m.

### 141 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 6,1 m/s. Maciek, który wyruszył 7 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 28 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 427 s?

**Odpowiedź:** Maciek jechał z prędkością 6,6 m/s.

### 142 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 210 cm/s przez 14 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 220 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 190 cm/s przez 6,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

**Odpowiedź:** Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 234 cm/s.

### 143 Zadanie – Samochód

Samochód pana Krzysztofa spala 4 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 8 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 4 zł?

**Odpowiedź:** Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 12 pełnych km.

### 144 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 17,1 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 1824 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

**Odpowiedź:** Prędkość prądu rzeki to 3,2 km/h.

### 145 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrznej średnicy 15 mm zakończony jest otworem o średnicy 3 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w węży porusza się ona z szybkością 70 cm/s?

**Odpowiedź:** Szybkość wody w otworze to ok. 1750 cm/s.

### 146 Zadanie – Odcinki

Odcinek w skali 1:10 ma 34 cm długości. Jaką długość ma ten odcinek w skali 10:1?

**Odpowiedź:** Odcinek ma długość 3400 cm.

### 147 Zadanie – Fotografia

Łazik marsjański przesłał zdjęcie znalezionej obiektu do analizy. Na zdjęciu w skali 1:10 obiekt miał 6,5 mm. Aby go dokładniej zbadać, powiększono zdjęcie. Jaką wielkość będzie miał ten obiekt w skali 9:1?

**Odpowiedź:** Na powiększonym zdjęciu obiekt będzie miał długość 585 mm.

### 148 Zadanie – Sonda

Sonda wykonała zdjęcia powierzchni Marsa. Po analizie obrazów stwierdzono, że na zdjęciach krater wulkanu miał średnicę 3,6 cm, a wysokość wulkanu była równa 0,4 cm. Jakie były rzeczywiste rozmiary tego wulkanu w kilometrach, jeśli zdjęcia zostały wykonane w skali 1:35000?

**Odpowiedź:** Wysokość wulkanu jest równa 0,14 km, a średnica krateru ma 1,26 km.

### 149 Zadanie – Przyssawka

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 23 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 990 hPa, a przyspieszenie ziemskie  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Odpowiedź:** Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 420 kg.

### 150 Zadanie – Pod wodą

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 25 m. Przyjmij gęstość wody  $1012 \text{ kg/m}^3$  oraz natężenie pola grawitacyjnego  $9,8 \text{ N/kg}$ .

**Odpowiedź:** Ciśnienie wody jest równe ok. 248 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

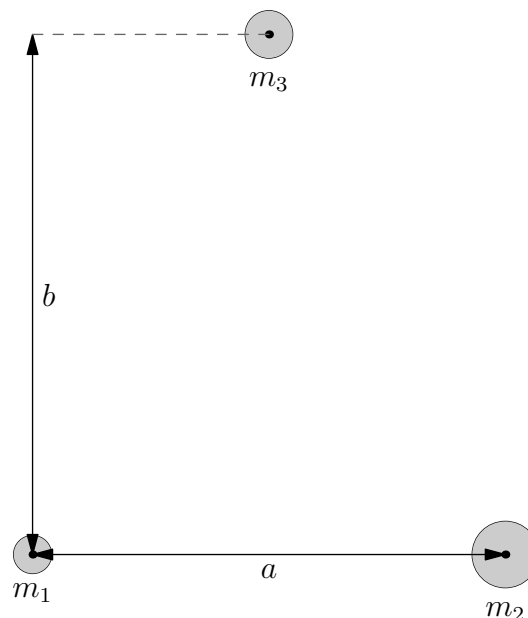
### 151 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 2 cm, a duży średnicę 46 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 1600 kg leżącą na dużym tłoku?

**Odpowiedź:** Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 3,03 kg.

### 152 Zadanie – Środek masy

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie:  $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1,2 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 0,4 \text{ kg}$ . Podstawa trójkąta równoramiennego to  $a = 4 \text{ cm}$ , a wysokość to  $b = 6 \text{ cm}$ . Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy  $m_1$ .



**Odpowiedź:** Środek masy znajduje się w punkcie  $S = (x_c, y_c)$ , gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 3,11 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 1,33 \text{ cm}.$$

### 153 Zadanie – Lot mionu

Mion leci ze stałą prędkością  $1,1 \cdot 10^8$  m/s względem laboratorium. W układzie związanym z mionem rozpadł się on po czasie  $1,5 \mu\text{s}$  od początku lotu. Ile czasu trwał lot mionu w układzie związanym z laboratorium? Przyjmij wartość prędkości światła w próżni  $3 \cdot 10^8$  m/s.

**Odpowiedź:** W układzie związanym z laboratorium czas lotu mionu

$$t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} t_0 \approx 1,61 \mu\text{s}$$

gdzie  $\beta = v/c$ ,  $v$  jest prędkością mionu, a  $c$  prędkością światła w próżni.

### 154 Zadanie – Jednostki temperatury

Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Celsjusza na skalę Kelwina:

$-14^\circ\text{C}$  to ..... K.

$-12^\circ\text{C}$  to ..... K.

Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Fahrenheita na skalę Kelwina:

$32^\circ\text{F}$  to ..... K.

$41^\circ\text{F}$  to ..... K.

**Odpowiedź:** Temperatury w Kelwinach:

259,15 K

261,15 K

273,15 K

278,15 K

### 155 Zadanie – Temperatury

W różnych krajach stosuje się inne skale temperatur, np. w Polsce temperaturę podaje się w skali Celsjusza, a w USA w skali Fahrenheita. Naukowcy używają najczęściej skali Kelwina. Aby dowiedzieć się, jak przeliczyć temperatury, zapoznaj się z poniższymi wzorami, w których  $T_K$  oznacza temperaturę podaną w skali Kelwina,  $T_C$  oznacza temperaturę podaną w stopniach Celsjusza, a  $T_F$  oznacza temperaturę podaną w stopniach Fahrenheita.

$$T_K = 273,15 + T_C \qquad T_C = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

Dwaj chłopcy, Adaś z Polski i John z USA, mierzyli codziennie temperaturę przed domem, otrzymując następujące wyniki:

Adaś:  $-14^\circ\text{C}$ ,  $-11^\circ\text{C}$ ,  $-12^\circ\text{C}$ ,  $-8^\circ\text{C}$ .

John:  $23^\circ\text{F}$ ,  $14^\circ\text{F}$ ,  $-4^\circ\text{F}$ ,  $32^\circ\text{F}$ .

Obaj chłopcy biorą udział w konkursie badawczym i muszą przesłać wyniki swoich pomiarów w skali Kelwina.

Pytanie 1. Jakie będą wartości uzyskanych przez nich temperatur w skali Kelwina?

Pytanie 2. Ile wynosi średnia temperatura u każdego z chłopców? Odpowiedź podaj w skali Kelwina.

**Odpowiedź:** Temperatury Adasia (w Kelwinach): 259,15 K, 262,15 K, 261,15 K, 265,15 K.

Temperatury Johna: 268,15 K, 263,15 K, 253,15 K, 273,15 K.

Średnia temperatura Adasia (w Kelwinach): 261,9 K.

Średnia temperatura Johna (w Kelwinach): 264,4 K.

## 156 Zadanie – Średnia temperatura

Stacja meteorologiczna prowadziła przez tydzień pomiary średniej dobowej temperatury, uzyskując następujące wyniki: 1°C, 4°C, -2°C, 0°C, -1°C, 1°C, 4°C.

Ile wynosi średnia temperatura w tym tygodniu?

**Odpowiedź:** Średnia temperatura wynosi: 1°C

## 157 Zadanie – Zmiana energii wewnętrznej układu

W pewnym procesie dostarczyliśmy do układu ciepło o wartości 280 J, wykonaliśmy pracę nad tym układem (np. sprężając go) o wartości 140 J oraz odebraliśmy od układu ciepło o wartości 200 J, a układ wykonał pracę o wartości 120 J. Oblicz zmianę energii wewnętrznej tego układu wskutek opisanego procesu.

**Odpowiedź:** Zmiana energii wewnętrznej układu:  $\Delta U = Q_1 + W_1 + Q_2 + W_2 = 100 \text{ J}$ . Zauważ, że  $Q_2 < 0$  oraz  $W_2 < 0$ .

## 158 Zadanie – Szybkość średnia atomu

W pewnym ośrodku o temperaturze 27°C, poruszają się atomy argonu. Oblicz szybkość średnią kwadratową, z jaką poruszają się cząsteczki tego gazu, wiedząc, że jego masa molowa wynosi 40 g/mol.

**Odpowiedź:** Szybkość średnia kwadratowa argonu jest równa w przybliżeniu 13,7 m/s.

## 159 Zadanie – Pęcherzyk powietrza

Z dna jeziora o głębokości 22,3 m odrywa się pęcherzyk powietrza o promieniu 5,1 mm. Temperatura na dnie jeziora wynosi 4,2°C. Pęcherzyk po dotarciu na powierzchnię jeziora zmienił się w półsferyczną bańkę o promieniu 10,2 mm. Jaka temperatura panuje na powierzchni jeziora, jeśli ciśnienie atmosferyczne wynosi 100 kPa? Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1000 kg/m<sup>3</sup>, a gęstość powietrza w warunkach normalnych 1,29 kg/m<sup>3</sup>. Pomiń wpływ napięcia powierzchniowego na ciśnienie w pęcherzyku. Załóż, że temperatura powietrza w pęcherzyku jest zawsze równa temperaturze otoczenia.

**Odpowiedź:** Temperatura na powierzchni jeziora wynosi około 5,3°C.

## 160 Zadanie – Entropia i porcja wody

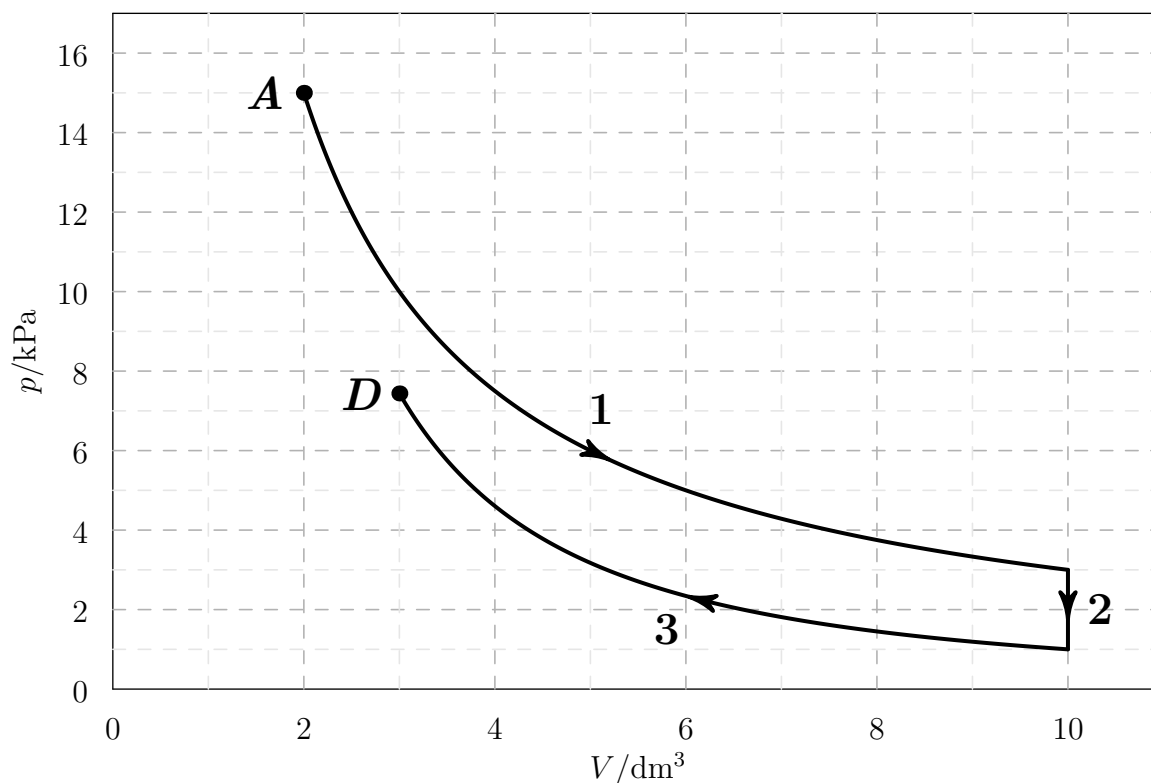
Oblicz zmianę entropii wody o masie 54 g podczas przemiany jej stanu z ciekłego (płyn) w stan gazowy (para) w temperaturze wrzenia pod ciśnieniem 1 atm. Przyjmij ciepło parowania równe 2257 kJ/kg.

**Odpowiedź:** Zmiana entropii:  $\Delta S \approx 121878 \text{ J} / 373 \text{ K} \approx 327 \text{ J/K}$ .

## 161 Zadanie – Przemiany gazowe

Ustalona porcja gazowego neonu przeszła przemiany 1, 2 i 3 przedstawione na poniższym wykresie, gdzie  $p$  oznacza ciśnienie gazu, a  $V$  jego objętość. Początkowo parametry gazu opisywał punkt  $A$ . Wiadomo, że przemiana 3 była adiabatyczna.

- Podaj nazwy przemian 1 i 2. W przypadku przemiany 1 swoją hipotezę dotyczącą rodzaju przemiany sprawdź w 3 różnych punktach.
- Dla każdej z przemian wskaż wielkości, które są zawsze równe 0 w trakcie tej przemiany.
- Czy gaz w punkcie  $D$  ma większą temperaturę niż w punkcie  $A$ ?
- Czy z punktu  $D$  może ta porcja gazu dotrzeć do punktu  $A$  w przemianie izobarycznej?



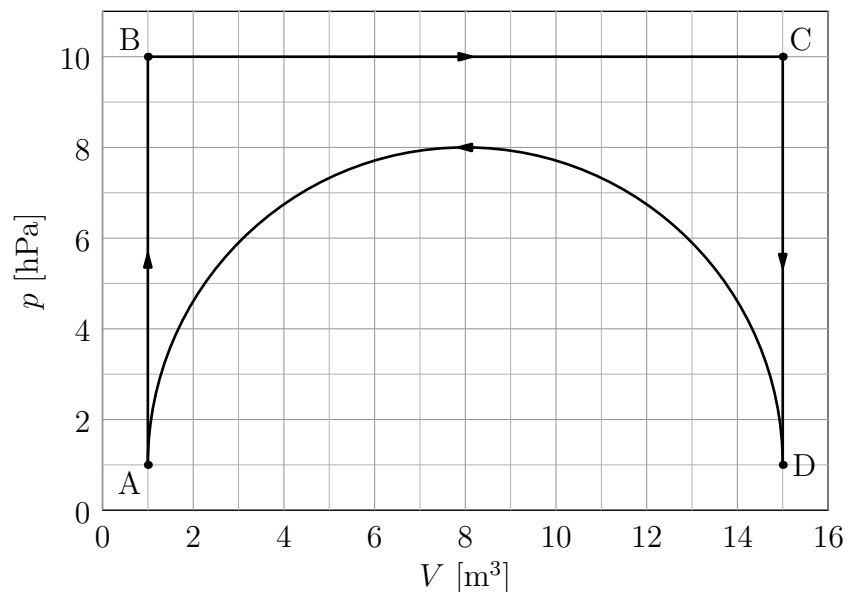
### Odpowiedź:

- Przemiana 1 to przemiana izotermiczna, gdyż  $pV$  ma zawsze tę samą wartość, np.  $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$  (w jednostkach  $\text{kPa} \cdot \text{dm}^3$ ). Przemiana 2 jest przemianą izochoryczną.
- W trakcie przemiany 1 zmiana temperatury oraz zmiana energii wewnętrznej są równe 0, w trakcie przemiany 2 zmiana objętości oraz praca (wykonana nad gazem lub wykonana przez gaz), a w trakcie przemiany 3 wymienione z otoczeniem ciepło.
- Nie. Iloczyn  $pV$  w punkcie  $A$  jest równy  $2 \cdot 15 = 30$ , a w punkcie  $D$  jest mniejszy niż  $8 \cdot 3 = 24$  (w jednostkach  $\text{kPa} \cdot \text{dm}^3$ ).
- Nie, gdyż ciśnienia w tych punktach są różne.



**162 Zadanie – Praca wykonana przez gaz**

Oblicz pracę wykonaną przez gaz podczas jednego cyklu przedstawionego na wykresie poniżej. Fragment DA ma kształt półokręgu.



**Odpowiedź:** Praca wykonana przez gaz wynosi około 4910 J.

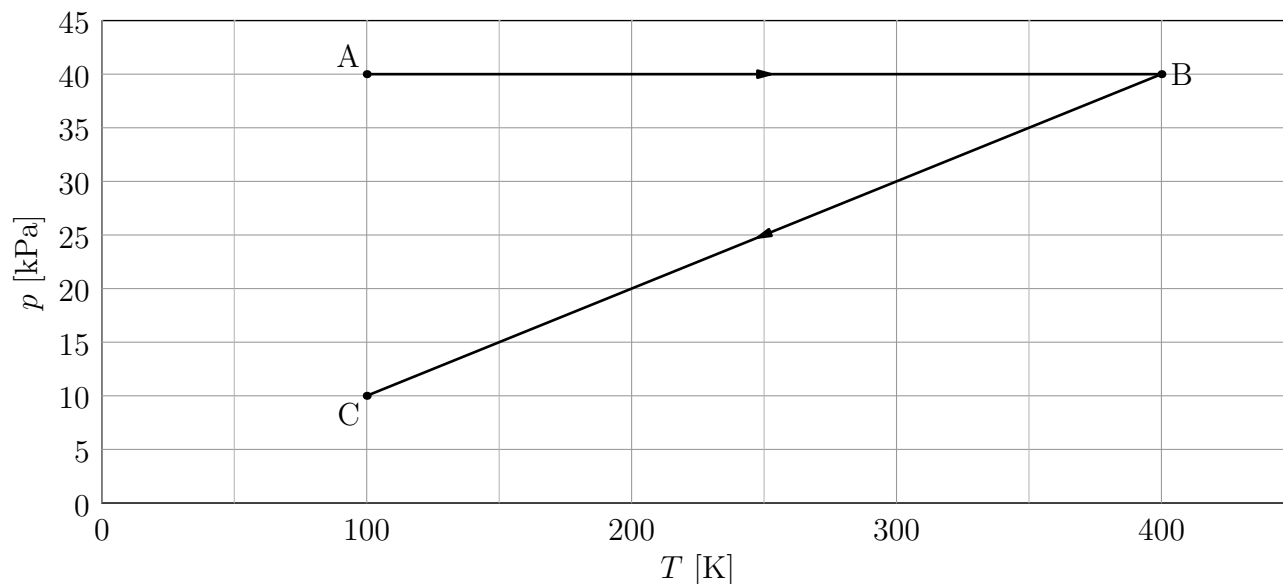
**163 Zadanie – Przemiany gazu doskonałego**

W szczelnym naczyniu, zamkniętym tłokiem, znajduje się argon. Masa gazu jest równa 2 kg, a początkowa temperatura 19°C. Gaz poddano przemianie izobarycznej, dostarczając mu 940 J ciepła. Jaką pracę wykonał argon podczas rozprężania? Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 40 g/mol.

**Odpowiedź:** Gaz wykonał pracę około 376 J.

## 164 Zadanie – Ciepło, energia wewnętrzna i praca w przemianach gazowych

Oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu doskonałego, pracę wykonaną przez gaz oraz ciepło wymienione z otoczeniem podczas przemiany przedstawionej na wykresie poniżej. Przyjmij, że zmiana objętości wyniosła  $0,24 \text{ m}^3$ .

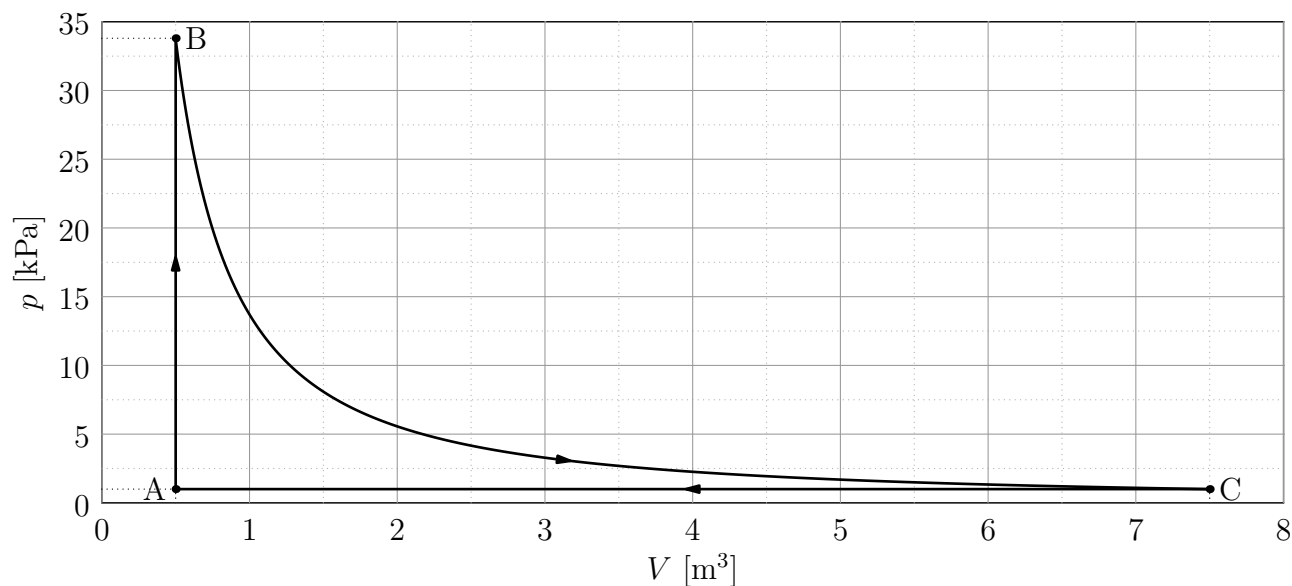


**Odpowiedź:** Podczas przemiany energia wewnętrzna gazu nie zmieniła się. Praca jaką wykonał gaz wynosi  $9600 \text{ J}$ , z otoczenia pobrał  $9600 \text{ J}$  ciepła.

**165 Zadanie – Ciepło oddane i pobrane**

Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest poddawany przemianom przedstawionym na wykresie poniżej. Wiedząc, że przemiana B-C jest przemianą adiabatyczną oraz że ciśnienie w punkcie A jest równe 1 kPa, a w punkcie B ciśnienie wynosi 33,8 kPa, oblicz:

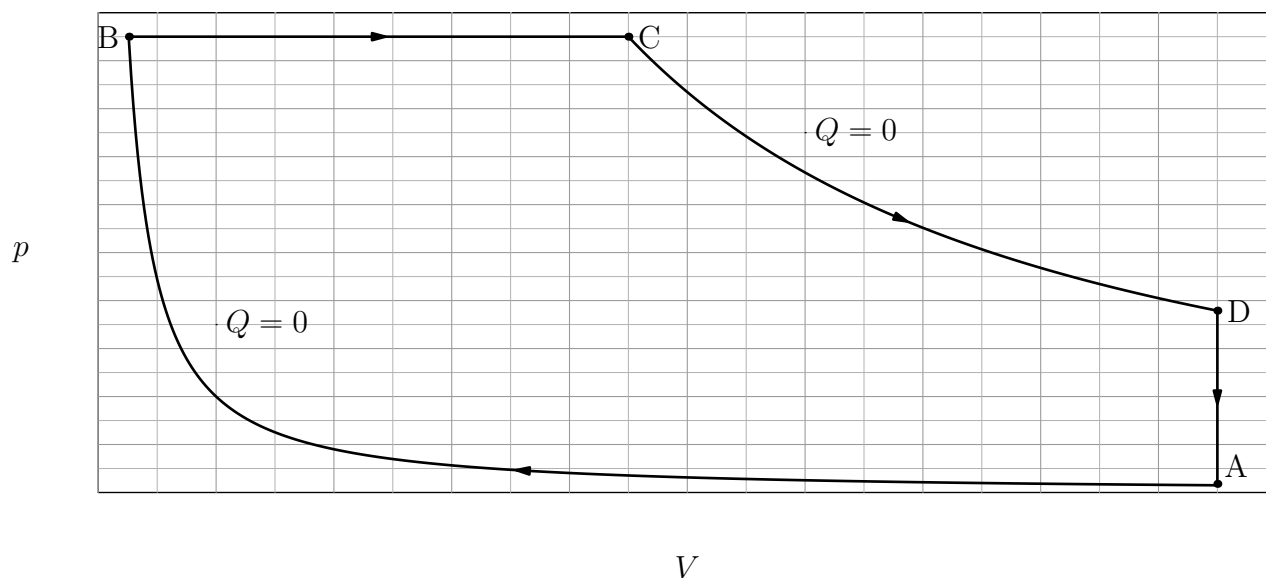
- energię pobraną przez gaz z grzejnika;
- energię oddaną chłodnicy;
- wypadkową pracę w jednym cyklu silnika cieplnego, w którym gaz poddawany jest opisanym przemianom;
- sprawność tego silnika.



**Odpowiedź:** Gaz pobrał z grzejnicy 24,6 kJ ciepła, a do chłodnicy oddał 17,5 kJ ciepła. Praca wykonana przez gaz wynosi 7,1 kJ, sprawność silnika jest równa 29%.

## 166 Zadanie – Cykl przemian gazu

Wyznacz sprawność cyklu dla ustalonej porcji gazu doskonałego przedstawionego na rysunku poniżej. Wynik przedstaw tylko w zależności od temperatur oraz stosunku ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej. Przemiany A-B oraz C-D są adiabatyczne. Dane są temperatury w punktach A, B, C, D.



**Odpowiedź:** Sprawność przedstawionego cyklu w zależności od temperatur:

$$\eta = 1 + \frac{1}{\kappa} \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

$\kappa$  - stosunek ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej, wykładnik adiabaty.

## 167 Zadanie – Przemiana adiabatyczna i izotermiczna

Porcję 2 kg dwutlenku węgla o temperaturze 754,5 K i ciśnieniu  $3 \cdot 10^5$  Pa sprężono adiabatycznie, a następnie rozprężono izotermicznie. Ilość ciepła pobrana w procesie izotermicznym jest równa przyrostowi energii wewnętrznej gazu w procesie adiabatycznym i wynosi 238 kJ. Oblicz objętość i ciśnienie gazu po przemianie

- adiabatycznej
- izotermicznej.

Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 44 g/mol, a wykładnik adiabaty 1,3.

**Odpowiedź:** Po przemianie adiabatycznej parametry gazu wynoszą  $0,49 \text{ m}^3$ ,  $7,17 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Po przemianie izotermicznej parametry gazu wynoszą  $0,96 \text{ m}^3$ ,  $3,62 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

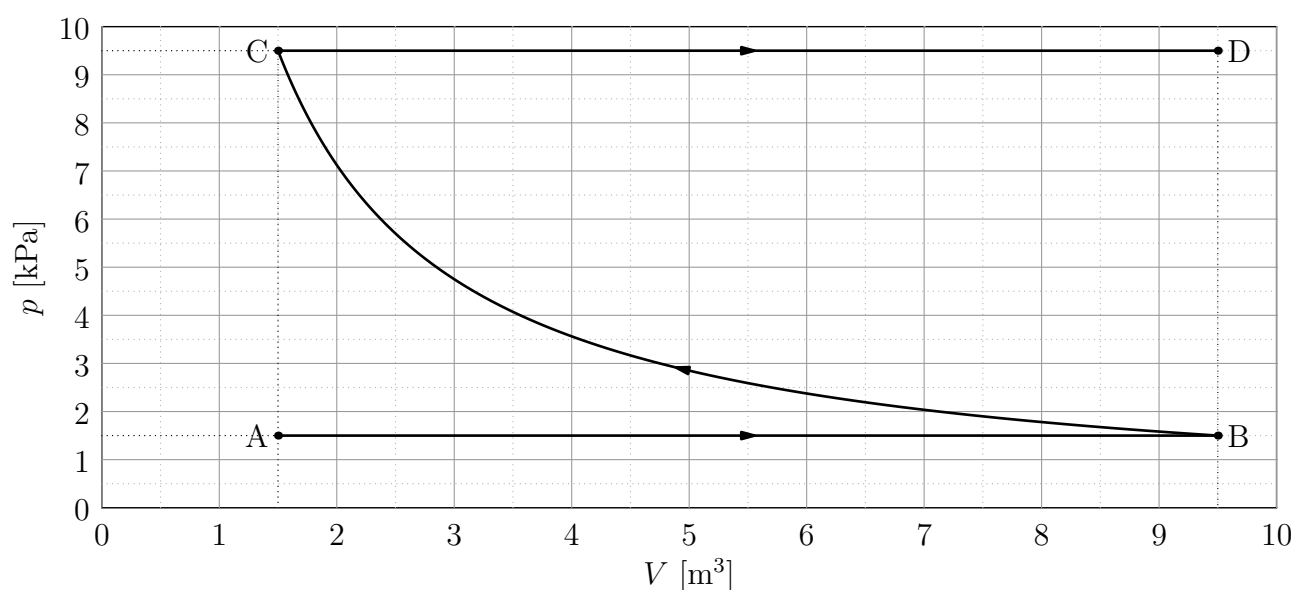
## 168 Zadanie – Entropia gazu

Zmianę entropii gazu doskonałego wyraża uniwersalny dla każdej przemiany wzór.

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_p} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{T_k}{T_p}$$

$n$  - liczba moli,  $R$  - uniwersalna stała gazowa,  $V_k$  - objętość końcowa,  $V_p$  - objętość początkowa,  $C_v$  - ciepło molowe przy stałej objętości,  $T_k$  - temperatura końcowa,  $T_p$  - temperatura początkowa.

Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego został poddany przemianie izotermicznej i dwóm przemianom izobarycznym. Końcowe ciśnienie gazu jest równe 9,5 kPa. Korzystając z przedstawionego wzoru oraz wykresu poniżej, oblicz zmianę entropii dla każdego z trzech procesów. Zinterpretuj otrzymane wyniki.



**Odpowiedź:** Zmiana entropii w procesie A-B jest równa 38,3 J/K, o tyle samo entropia zmienia się w procesie C-D. Można zauważyć, że zmiana entropii w procesie izobarycznym zależy tylko od zmiany objętości gazu i ciepła molowego przy stałym ciśnieniu. W procesie B-C zmiana entropii wynosi  $-15,3$  J/K. Przemiany przedstawione na wykresie odpowiadają sytuacji, w której gaz jest zamknięty w pojemniku z ruchomym tłokiem. Przemiany A-B i C-D przedstawiają izobaryczne rozprężanie gazu, przemiana B-C izotermiczne sprężanie gazu. Czasami entropia jest określana jako miara nieuporządkowania gazu. W stanie A cząsteczki mogą zajmować mniejszą objętość pojemnika niż w stanie B. Są bardziej ściśnięte i „uporządkowane” niż w stanie B. Także temperatura w stanie A jest niższa - można powiedzieć, że ruch cząsteczek jest bardziej „uporządkowany”. Gaz, rozprężając się, zwiększa zajmowaną objętość pojemnika, cząsteczki są bardziej „nieuporządkowane”. Również temperatura rośnie. W przemianie A-B entropia wzrasta. W przemianie izotermicznej B-C ściskając gaz, zmniejszamy zajmowaną przez niego objętość. Cząsteczki w stanie C są bardziej „uporządkowane” przestrzennie niż w stanie B. W przemianie B-C entropia gazu maleje. W przemianie C-D gaz zachowuje się tak samo, jak w przemianie A-B, rozpręża się. Entropia gazu rośnie.

## 169 Zadanie – Równanie van der Waalsa

Porcję 1,7 kg etanu ogrzano od temperatury 330 K do temperatury 390 K. Podczas przemiany objętość gazu wzrosła od 4 m<sup>3</sup> do 8 m<sup>3</sup>. Zakładając, że gaz spełnia równanie van der Waalsa, oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu. Załóż, że masa molowa użytego gazu to 30 g/mol, ciepło molowe przy stałej objętości 44,2 J/(K·mol), a stałe występujące w równaniu van der Waalsa  $a = 0,549 \text{ J}\cdot\text{m}^3/(\text{mol})^2$ ,  $b = 0,064 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$ .

**Odpowiedź:** Zmiana energii wewnętrznej gazu wynosi 151 kJ.

## 170 Zadanie – Wzory redukcyjne 1

Oblicz:

- a)  $(-2 \sin 240^\circ + 6 \operatorname{tg} 60^\circ) \cdot 2 \cos 180^\circ =$
- b)  $-2 \sin 60^\circ + 3 \cos 60^\circ =$
- c)  $(3 \sin 210^\circ - \cos 240^\circ) \cdot (3 \sin 210^\circ + \cos 240^\circ) =$

**Odpowiedź:** a)  $-24,2$

b)  $-0,232$

c)  $2$

## 171 Zadanie – Wzory redukcyjne 2

Oblicz:

- a)  $(-4 \sin(-315^\circ) + 6 \operatorname{tg} 540^\circ) \cdot 3 \cos 930^\circ =$
- b)  $6 \sin 930^\circ + 2 \cos(-225^\circ) =$
- c)  $(2 \sin 540^\circ - \cos(-315^\circ)) \cdot (2 \sin(-225^\circ) + \cos(-225^\circ)) =$
- d)  $\operatorname{tg} 930^\circ \cdot \sin 540^\circ + \sin 930^\circ \cdot \cos(-315^\circ) - \sin(-225^\circ) =$
- e)  $(\operatorname{tg} 780^\circ)^2 - 3(\operatorname{ctg} 420^\circ)^2 =$
- f)  $\sin^2(-315^\circ) + \cos^2(-315^\circ) =$

**Odpowiedź:** a)  $7,35$

b)  $-4,41$

c)  $-0,5$

d)  $-1,06$

e)  $2$

f)  $1$

## 172 Zadanie – Wzory redukcyjne 3

Oblicz:

- a)  $(\sin(-378^\circ) + 4 \cos(-378^\circ))^2 - 2 \cdot 4 \cos(-378^\circ) \sin(-378^\circ) =$
- b)  $4 \sin 769^\circ + 2 \cos(-153^\circ) =$
- c)  $(2 \sin 185^\circ - \cos(-378^\circ)) \cdot (2 \sin(-153^\circ) + \cos(-153^\circ)) =$
- d)  $\operatorname{tg} 769^\circ \cdot \sin 185^\circ + \sin 769^\circ \cdot \cos(-378^\circ) - \sin(-153^\circ) =$
- e)  $(\operatorname{tg} 780^\circ)^2 - 3(\operatorname{ctg} 420^\circ)^2 =$
- f)  $\sin^2(-378^\circ) - \cos^2(-378^\circ) =$

**Odpowiedź:** a)  $14,57$

b)  $1,24$

c)  $2,025$

- d) 1,07
- e) 2
- f)  $-0,809$

### 173 Zadanie – Zbiory liczb naturalnych

Zbiory  $A$ ,  $B$  i  $C$  składają się z następujących elementów:

$$A = \{2, 6, 7, 9, 16, 18\}$$

$$B = \{2, 6, 8, 13, 16\}$$

$$C = \{2, 6, 7, 9, 10, 11, 18, 21, 24, 25\}$$

Określ:

- a) sumę  $A \cup B$ ,
- b) sumę  $B \cup C$ ,
- c) sumę  $A \cup B \cup C$ ,
- d) różnicę  $A \setminus B$ ,
- e) różnicę  $B \setminus C$ ,
- f) różnicę  $A \setminus C$ ,
- g) iloczyn (część wspólną)  $A \cap B$ ,
- h) iloczyn  $B \cap C$ ,
- i) iloczyn  $A \cap C$ ,
- j) iloczyn  $A \cap B \cap C$ .

**Odpowiedź:**

- a)  $A \cup B = \{2, 6, 7, 8, 9, 13, 16, 18\}$
- b)  $B \cup C = \{2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 21, 24, 25\}$
- c)  $A \cup B \cup C = \{2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 21, 24, 25\}$
- d)  $A \setminus B = \{7, 9, 18\}$
- e)  $B \setminus C = \{8, 13, 16\}$
- f)  $A \setminus C = \{16\}$
- g)  $A \cap B = \{2, 6, 16\}$
- h)  $B \cap C = \{2, 6\}$
- i)  $A \cap C = \{2, 6, 7, 9, 18\}$
- j)  $A \cap B \cap C = \{2, 6\}$

### 174 Zadanie – Działania na zbiorach

Uprość poniższe wyrażenia, w których występują zbiory  $A$  i  $B$ :

- a)  $(A \cup B) \setminus B$
- b)  $A \cup (B \setminus A)$
- c)  $(A \cap B) \setminus B$
- d)  $A \cap (B \setminus A)$

**Odpowiedź:**

- a)  $A \setminus B$
- b)  $A \cup B$
- c)  $\{\}$
- d)  $\{\}$