Warszawa, 2017-09-23

Spis wszystkich zadań napisanych po polsku w Gezmat

Adresy autorów znajdziesz na stronie projektu (linki - nagłówek, stopka) oraz w pliku gezmat.cxx

Instrukcję, jak używać Gezmat, by tworzyć własne zestawy zadań i dodawać własne zadania, znajdziesz na stronie projektu. Ten plik został wygenerowany po wywołaniu w konsoli systemu Linux polecenia: `./gezmat.bash def/all_problems_pl.gzm`
Ważne! Plik `def/all_problems_pl.gzm` jest tworzony po wywołaniu

```
./gezmat.bash def/pl-prepare-all-problems-config.gzm
```

Nie edytuj tych plików! Możesz zmienić nazwę pliku `def/all_problems_pl.gzm` i wtedy go edytować jako swój własny plik konfiguracyjny.

1 Zadanie – Ogrzewanie wody

Ile ciepła należy dostarczyć 300 g wody, aby ogrzać ją o 25 K? Wynik wyraź w kJ. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K).

Odpowiedź: Należy dostarczyć 31,5 kJ.

2 Zadanie – Ochładzanie sali

W pomieszczeniu są klimatyzatory o maksymalnej mocy chłodniczej 3 kW. W sali znajduje się 47 studentów. Można przyjąć, że każdy z nich wydziela ciepło z szybkością około 320 kJ/godz. W pomieszczeniu znajduje się także 20 żarówek, każda o mocy 80 W. Ponieważ na zewnątrz panuje wysoka temperatura, przez ścianę przenika ciepło z szybkością 7 MJ/godz. Ile klimatyzatorów powinno być włączonych, jeśli powietrze w pomieszczeniu ma być utrzymywane w stałej temperaturze 19°C?

Odpowiedź: Powinny być włączone 3 klimatyzatory.

3 Zadanie – Kolektor słoneczny

Na dachu zamontowany jest kolektor słoneczny o sprawności $n = 22\%$. Energia słoneczna docierająca do kolektora przekazywana jest do wody krążącej w rurach kolektora. Jaka jest powierzchnia kolektora, jeśli w ciągu godziny ogrzewa 213 litry wody, zwiększając jej temperaturę o 20°C? Przyjmij, że w danej godzinie natężenie promieniowania słonecznego wynosi 690 W/m^2. Ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K), a jej gęstość 1000 kg/m^3.

Odpowiedź: Powierzchnia kolektora słonecznego wynosi 32,7 m^2.

4 Zadanie – Ciepło właściwe ciała

Do aluminiowego kalorymetru o masie 200 g włożono kulę o masie 383 g. Następnie do naczynia wlano 22 g wrzącej wody i zamknięto kalorymetr, aby zminimalizować wymianę ciepła z otoczeniem. Po ustaleniu się równowagi termicznej układu zmierzono temperaturę wody, wyniosła ona 45°C. Temperatura początkowa kalorymetru i kuli jest równa temperaturze otoczenia i wynosi 27°C. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200

J/(kg·K), a ciepło właściwe aluminium 900 J/(kg·K). Oblicz ciepło właściwe kuli, a następnie sprawdź w tablicy, z jakiego materiału jest najprawdopodobniej zbudowana. Zastanów się, dlaczego otrzymana wartość różni się od wartości podanej w tablicy.

substancja	ciepło właściwe J/(kg·K)
cyna	220
miedź	380
nikiel	460
glin	900

Odpowiedź: Ciepło właściwe kuli wynosi 267 J/(kg·K). Otrzymana wartość ciepła właściwego różni się od wartości podanych w tablicy. W obliczeniach nie uwzględniliśmy wymiany ciepła między otoczeniem a układem, która występuje mimo zastosowania kalorymetru. Kula jest prawdopodobnie zbudowana z cyny.

5 Zadanie – Topienie złota

Jubiler na stopienie złota zużył 2240 J energii. Oblicz, ile złota stopił jubiler, wiedząc, że złoto było już podgrzane do temperatury topnienia oraz że ciepło topnienia złota wynosi 64 kJ/kg.

Odpowiedź: Złotnik stopił 35 g złota.

6 Zadanie – Parowanie wody

Do naczynia zawierającego 0,5 kg wody włożono grzałkę o mocy 700 W, a następnie doprowadzono wodę do wrzenia. Ile wody wyparowało w ciągu 5 minut wrzenia? Przyjmij, że ciepło parowania wody wynosi 2270 kJ/kg.

Odpowiedź: Wyparowało 92,5 g wody.

7 Zadanie – Silnik spalinowy

Samochód jedzie po autostradzie ze stałą prędkością. By utrzymać prędkość, silnik pracuje z mocą 26 kW. Sprawność silnika wynosi 29%. Ile zapłacimy za benzynę zużytą przez samochód jadący przez 2 godziny? Cena benzyny na stacji paliw wynosi 4,74 zł/l, ciepło spalania wynosi 42 MJ/kg, a jej gęstość 0,7 g/cm^3.

Odpowiedź: Za benzynę zapłacimy 104,07 zł.

8 Zadanie – Lód w ciepłej wodzie

Blok lodu o temperaturze -10°C i masie 290 g włożono do 900 g wody o temperaturze 65°C. Oblicz końcową temperaturę układu, zakładając, że nie następuje wymiana cieplna z otoczeniem. Przyjmij wartości: ciepła właściwego lodu 2050 J/(kg K), ciepła topnienia lodu 334 kJ/kg, ciepła właściwego wody (cieczy) 4200 J/(kg K).

Odpowiedź: Końcowa temperatura układu $T_f = (T_w m_w c_w + (T_i c_i - l_i)m_i)/[(m_i + m_w)c_w] \approx$ 28,6°C.

9 Zadanie – Podgrzewanie lodu

W naczyniu znajdował się lód o masie 1 kg w temperaturze −12°C. Naczynie to postawiono na kuchence gazowej i ogrzewano przez 0,6 min. Moc kuchenki wynosiła 9 kW. Sprawność procesu ogrzewania zawartości naczynia była równa 41%.

a) Czy lód się stopił?

b) Oblicz temperaturę końcową zawartości naczynia. Wynik podaj z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

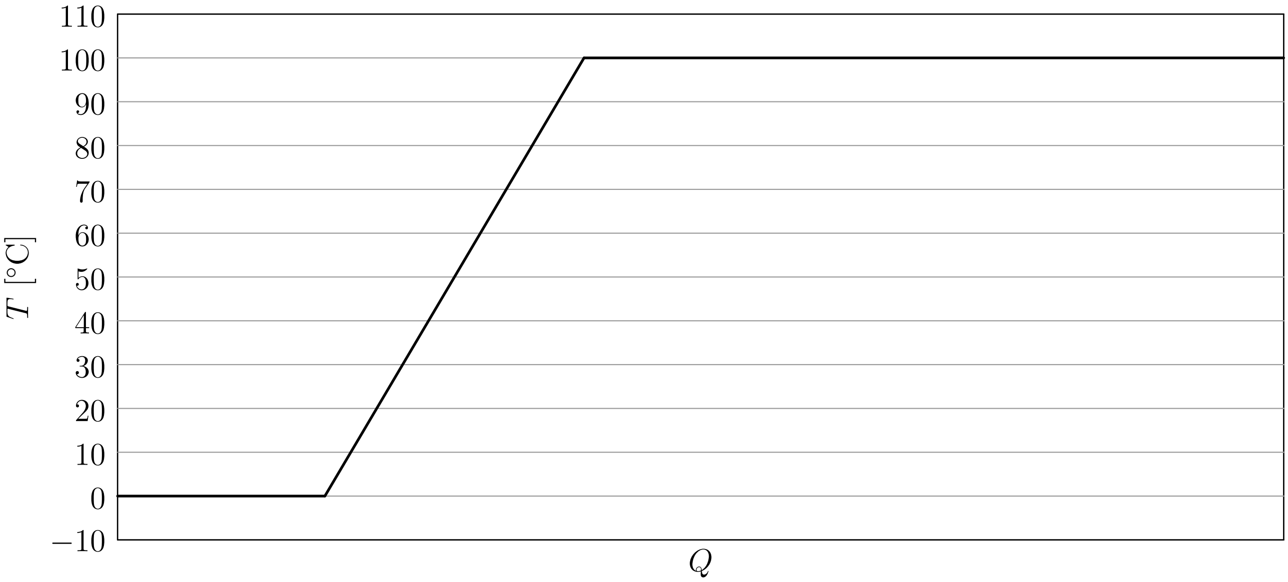
W obliczeniach pomiń ciepło oddane do otoczenia i naczynia. Przyjmij, że ciepło topnienia lodu wynosi $L = 330$ kJ/kg, ciepło właściwe lodu $c_l = 2100$ J/(kg · K), a ciepło właściwe wody $c_w = 4200$ J/(kg · K).

Odpowiedź: Otrzymano mieszaninę lodu i wody w temperaturze 0°C

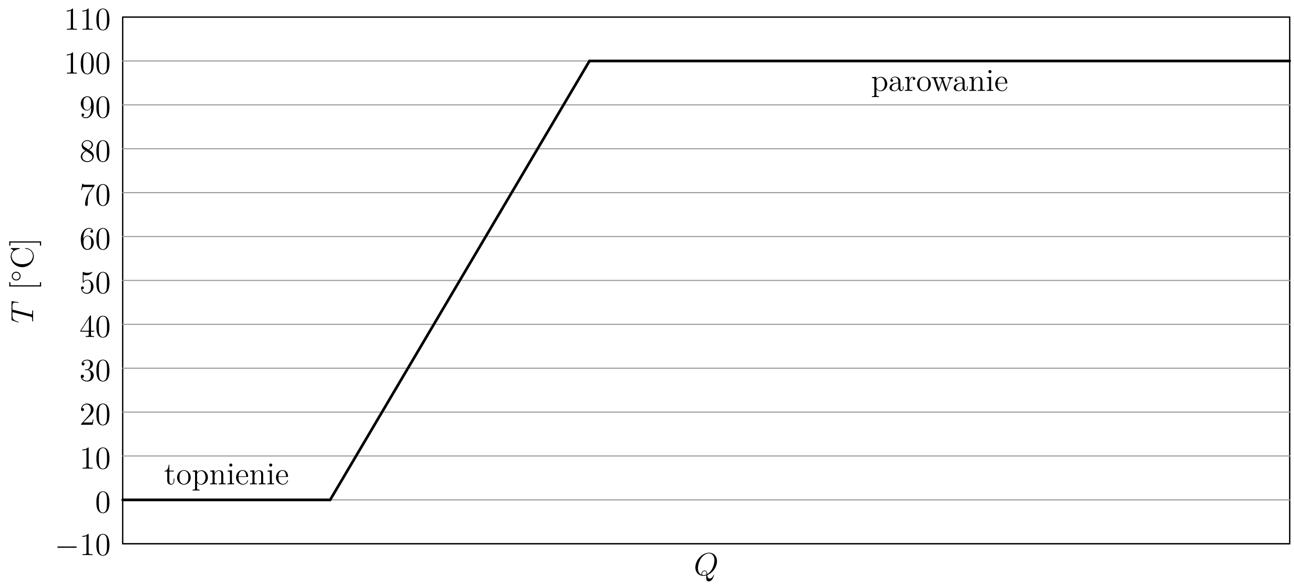
10 Zadanie – Zjawiska cieplne

Na rysunku poniżej przedstawiono zależność temperatury próbki 4 g H_2O od wymienionego z otoczeniem ciepła. Rozpoznaj i podpisz przedstawione zjawiska cieplne. Oblicz, ile kalorii próbka wymieniła z otoczeniem podczas całego procesu przedstawionego na rysunku. Potrzebne dane znajdują się w tabeli. Przyjmij, że na diagramie został przedstawiony cały proces przemiany fazowej. Uwaga, rysunek nie zachowuje skali.

ciepło topnienia/zamarzania	336000 J/kg
ciepło parowania/skraplania	2270000 J/kg
ciepło właściwe (woda)	4200 J/(kg·K)
ciepło właściwe (lód)	2100 J/(kg·K)
ciepło właściwe (para wodna)	2000 J/(kg·K)



Odpowiedź:



Całkowita ilość ciepła wymienionego z otoczeniem, podczas wszystkich procesów ukazanych na rysunku, jest równa w przybliżeniu 2880 cal.

11 Zadanie – Granitowa płyta

Powierzchnia płyty granitowej to $147 \cdot 10^3$ m^2, a jej grubość 5 m. Pod płytą panuje temperatura 30°C, a nad płytą −5°C. Oblicz ciepło przepływające przez płytę w trakcie jednej minuty, jeśli współczynnik przewodnictwa cieplnego granitu jest równy 2,19 W/(K · m).

Odpowiedź: Ciepło: $Q \approx 135$ MJ.

12 Zadanie – Ceglany dom

Ceglany dom ma ściany o grubości 25 cm. Wewnątrz domu utrzymywana jest stała temperatura 21°C. Temperatura powietrza na zewnątrz wynosi 13°C.
a) Oblicz, ile ciepła stracimy w ciągu sekundy przez jedną ze ścian o powierzchni 19 m^2. Przyjmij, że przewodnictwo cieplne cegły wynosi 0,6 W/(K·m).
b) Aby zapobiec utracie ciepła, ocieplono budynek z zewnątrz warstwą styropianu o grubości 30 cm. Ile teraz tracimy ciepła przez tę samą ścianę? Przyjmij, że przewodnictwo cieplne styropianu wynosi 0,04 W/(K·m).
c) Jaka temperatura panuje na złączu matariałów?

Odpowiedź: Przez ceglany mur tracimy około 364,8 J na sekundę, a przez mur ocieplony warstwą styropianu 19,2 J na sekundę. Temperatura między cegłą a styropianem jest równa 20°C.

13 Zadanie – Wydłużenie szyny

Oblicz, o ile zmieni się długość stalowej szyny po ogrzaniu jej do temperatury 15°C, jeśli jej długość przy temperaturze 3°C jest równa 8 m. Współczynnik rozszerzalności cieplnej użytej stali jest równy $0{,}99 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

Odpowiedź: Wydłużenie szyny: $\Delta l = \alpha\, \Delta T\, l \approx 0{,}95$ mm.

14 Zadanie – Zegar

Pewien zegar, posiadający wahadło z niklu, odmierza dokładnie czas w temperaturze 21°C. Temperatura spadła do −1°C. O ile więcej wahnięć w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej niklu wynosi $13 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Jeden koniec pręta z niklu zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt z niklu jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

Odpowiedź: Zegar wykona o 12,4 więcej wahnięć na dobę.

15 Zadanie – Spadająca kulka

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z cyny, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 35\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 296 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232
ind	233	28	156
ołów	128	25	328

Odpowiedź: Kulka powinna spadać z prędkością około 776 m/s.

16 Zadanie – Spadająca kulka (1 wiersz tabeli)

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z cyny, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 38\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 295 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232

Odpowiedź: Kulka powinna spadać z prędkością około 746 m/s.

17 Zadanie – Lodowiec

Oszacuj masę stopionego lodu z lodowca, który zsunął się i zatrzymał w dolinie. Początkowo lodowiec spoczywał na wysokości 256 m nad doliną i miał masę $7 \cdot 10^9$ kg. Załóż, że energia tracona przez zsuwający się lodowiec i spływającą wodę powstałą podczas topnienia lodowca powoduje dalsze topnienie lodu. Przyjmij ciepło topnienia lodu 334 kJ/kg. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Masa stopionego lodu to około $m_i = m_0\, g\, h/l \approx 53 \cdot 10^6$ kg, gdzie m_0 jest początkową masą lodowca, h zmianą wysokości lodowca, l ciepłem topnienia lodu, a g

wartością przyśpieszenia ziemskiego. Oszacowanie to m.in. zakłada, że h jest zmianą wysokości środka masy lodowca razem z powstałą z niego wodą.

18 Zadanie – Promieniowanie kuli

Gorąca kula o promieniu 5 cm, temperaturze powierzchni 700 K i względnej zdolności emisyjnej 0,66 wysyła energię w postaci promieniowania. Ile energii zaabsorbuje w ciągu 5 minut ciało doskonale czarne, które odbiera $4 \cdot 10^{-3}$ energii promieniowania wyemitowanego przez kulę? Stała Stefana-Boltzmanna wynosi $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2·K^4).

Odpowiedź: Ciało odbierze około 339 J energii.

19 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $15{,}7 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 1,9 m/s. Druga część o masie $22{,}5 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 7,9 m/s.

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3v_3 = m_1v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1v_1/v_3 \approx 3{,}78 \cdot 10^3$ kg.

20 Zadanie – Spadochroniarz

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 99 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 8,4 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 970$ N.

21 Zadanie – Zderzenie wagonów

Wagon kolejowy o masie 49 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 1,5 m/s, uderzył w stojący skład 4 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:
a) wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
b) o ile zmniejszyła się na skutek sczepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

Odpowiedź:
a) Po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}3$ m/s.
b) Energia kinetyczna ruchu postepowego zmniejszyła się o $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n+1)v^2)/2 \approx 44{,}1$ kJ.

22 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Kula o masie 8 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 94 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 8 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Odpowiedź:
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 122 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 15{,}3$ m/s^2.
c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 122$ m/s.

23 Zadanie – Kula w cieczy

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 940 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 1200 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}217$.

24 Zadanie – Ołów, lód i woda

Kulę o masie 9,3 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,41 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10200 kg/m^3, a gęstość wody 1000 kg/m^3. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w}\right)\frac{1}{S} \approx -20{,}5 \text{ mm}$$

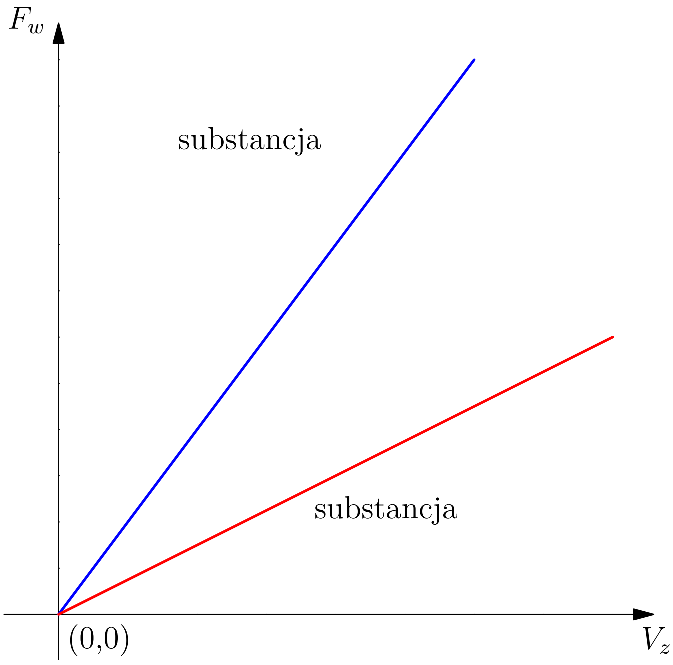
A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

25 Zadanie – Która to ciecz?

Prostopadłościan wykonany z porcelany zawieszono na siłomierzu i zmierzono jego ciężar Q. Następnie zanurzano prostopadłościan w cieczy A, a później w cieczy B. Notowano przy tym wartości wskazywane przez siłomierz oraz objętość zanurzonej części prostopadłościanu. Poniższa tabela przedstawia wyniki pomiarów.

siła ciężkości Q [N]	odczyt z siłomierza [N]	siła wyporu F_w [N]	objętość zanurzonej części V_z [cm^3]
substancja A			
0,100	0,084	0,016	2
0,100	0,076	0,024	3
0,100	0,067	0,033	4
substancja B			
0,100	0,080	0,020	2
0,100	0,069	0,031	3
0,100	0,061	0,039	4

a) Poniżej przedstawiono wykresy zależności siły wyporu F_w od objętości zanurzonej części prostopadłościanu V_z dla dwóch cieczy. Podpisz odpowiednio: „substancja A”, „substancja B”.



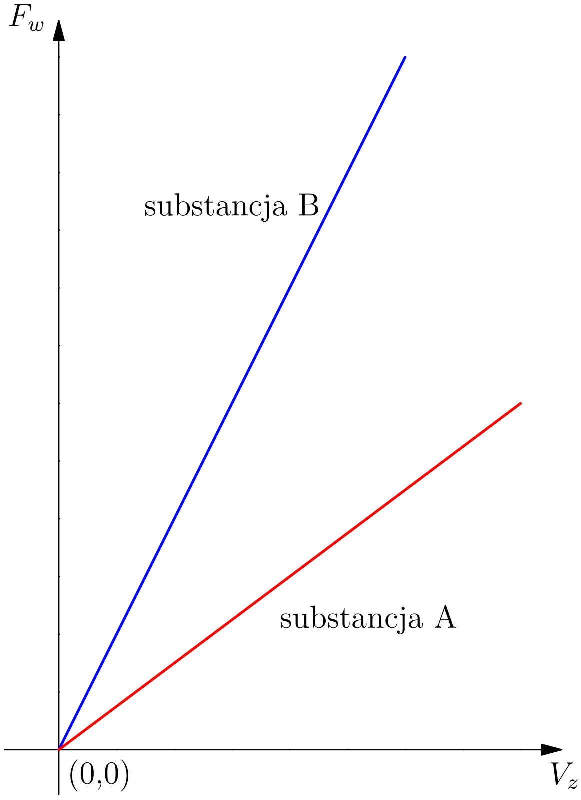
b) Która z wymienionych niżej cieczy mogłaby być substancją A, a która substancją B? Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

ciecz	gęstość $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}]$
gliceryna	1260
woda	1000
etanol	785

c) Jakie prawo opisuje badane tutaj zjawisko? Opisz je.

Odpowiedź:

a)

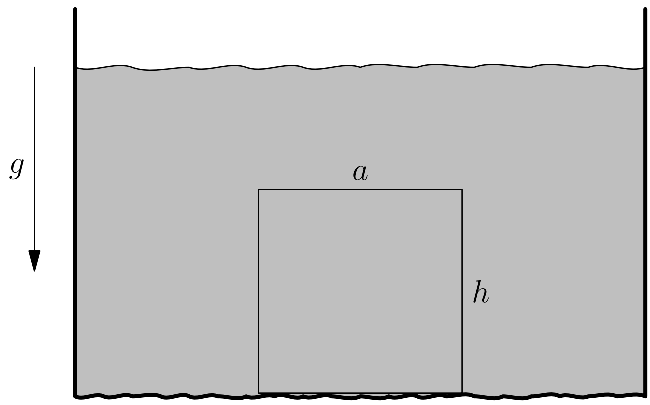


b) Substancją A mógłby być etanol, a substancją B woda.

c) Badane zjawisko jest opisywane przez prawo Archimedesa. Mówi ono, że na ciało zanurzone w cieczy działa siła skierowana pionowo ku górze równa ciążarowi wypartej cieczy. Opisana jest wspomnianym już wzorem $F_w = \rho_c g V_z$.

26 Zadanie – Wyciąganie bloku z morza

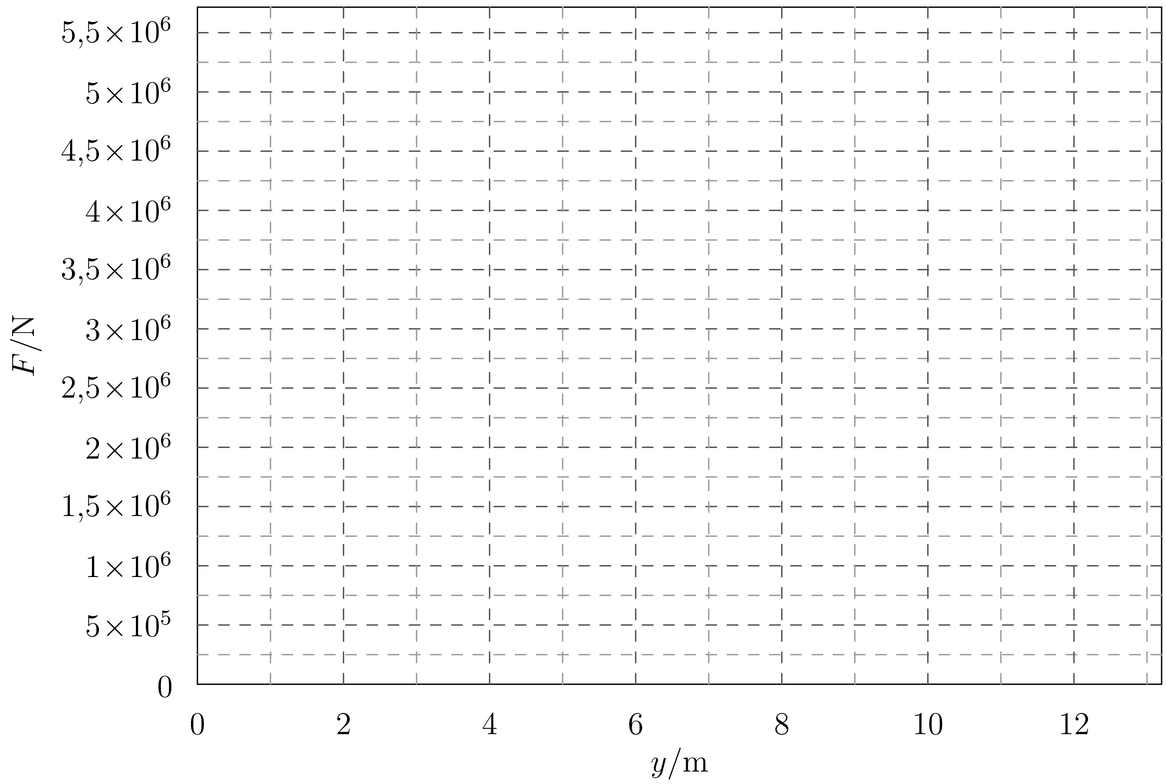
Na poziomym, kamienistym dnie morza spoczywa prostopadłościenny betonowy blok o wymiarach podstawy $a = 6$ m, $b = 4$ m oraz wysokości $h = 10$ m. Głębokość wody w tym miejscu wynosi $H = 12$ m. Postanowiono wyciągnąć blok z wody.



a) Przedstaw na wykresie zależność minimalnej siły F potrzebnej do wyciągnięcia bloku od położenia dolnej podstawy bryły y.

b) Oblicz minimalną pracę, jaką należy wykonać w celu wyciągnięcia bloku z wody. Wynik podaj w kJ z dokładnością do 3 cyfr znaczących.

Przyjmij, że gęstość wody morskiej wynosi $\rho_w = 1030\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, przyspieszenie ziemskie $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ oraz gęstość betonu $\rho_b = 2165\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Wyciąganie było bardzo powolne oraz odbywało się ruchem jednostajnym, pomiń opory ruchu oraz wpływ powietrza. Przyjmij, że woda znajdowała się pod całą powierzchnią dolnej podstawy spoczywającego na kamienistym dnie bloku.



Odpowiedź: b) Minimalna praca potrzebna do wyciągnięcia bloku wynosi około 45000 kJ.

27 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 2300 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 5 kg, a każdy student może wykonać pracę 41000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 14 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 39.

28 Zadanie – Wahadło

Kulkę o masie 70 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 3 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 0,767 m/s.

29 Zadanie – Wyrzutnia piłek do tenisa

Wyrzutnia w postaci prostej lufy, w której porusza się tłok o kształcie walca prostego, wyrzuca piłki o masie 57 g z szybkością 61 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mechanizm wyrzucający działa tak, że przez cały czas, gdy piłka jest w kontakcie z wyrzutnią, poruszający się tłok działa na piłkę stałą siłą i trwa to 0,4 s. Wiadomo, że przed uruchomieniem wyrzutni spoczywająca piłka działa na tłok siłą $R = 0{,}4$ N.

a) Jaką siłą działa poruszający się tłok na piłkę?

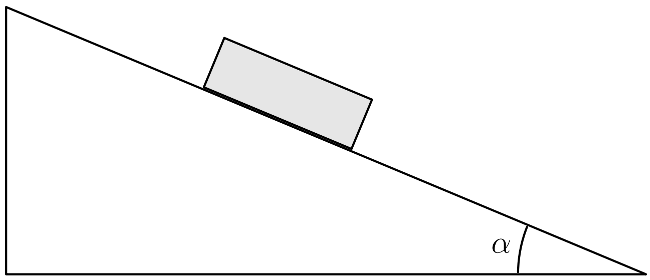
b) Oblicz średnią moc, z jaką wyrzutnia wyrzuca piłki.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Pomiń opory ruchu piłki.

Odpowiedź: a) Poruszający się tłok działa na piłkę siłą ok. 2,81 N.
b) Piłki wyrzucane są ze średnią mocą ok. 23,8 W.

30 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 16°$ zsuwa się cegła o masie 5,2 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 2{,}7$ m/s^2, w dół równi.

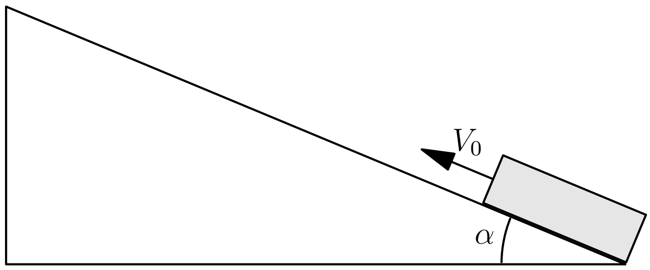
31 Zadanie – Równia pochyła

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 24° zsuwa się cegła o masie 5,4 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 3{,}99$ m/s^2, w dół równi.

32 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

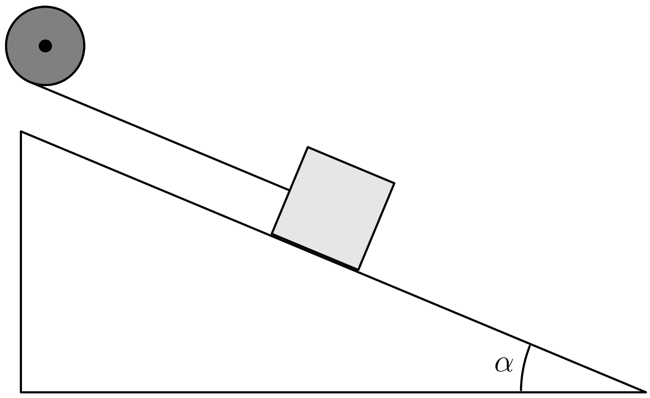
U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 543 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 8$ m/s wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 30°$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 0,9.
a) Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
b) Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
c) Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



Odpowiedź:
a) Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi $a = g(f\cos\alpha + \sin\alpha) \approx 12{,}5$ m/s^2, gdzie α to kąt nachylenia równi, a f to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
b) Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to $t = \frac{V_0}{a} \approx 0{,}64$ s.
c) Droga hamowania to $s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}V_0 t \approx 2{,}55$ m.

33 Zadanie – Sześcian na równi

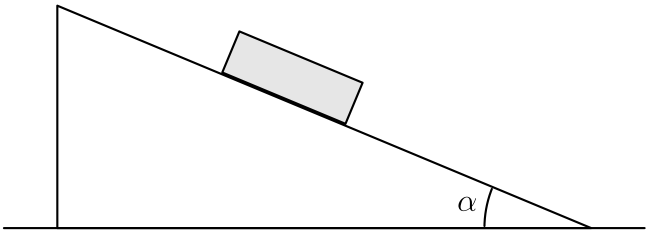
Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 40°$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 22 dag i o długości krawędzi 8 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 87 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześcianu znajduje się 70 cm nad stołem.
a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?
Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,5.



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie sześcianu o masie m_s wyniesie $a = m_s g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{m_s + \frac{1}{2}m_w} = 0{,}855$ m/s^2, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię, a m_w to masa walca.
b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1{,}6$ s, gdzie s to droga jaką pokona sześcian.

34 Zadanie – Jeżdżąca równia

Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie nachylenia $\alpha = 25°$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,2.



Odpowiedź: Wartość przyśpieszenia minimalnego wynosi $a_{min} = g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 2{,}39$ m/s^2, a wartość przyśpieszenia maksymalnego wynosi $a_{max} = g\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 7{,}2$ m/s^2, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię.

35 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 57 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 48 N na drodze 2,8 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 11 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F-T)S/m} \approx 1{,}91$ m/s.

36 Zadanie – Pocisk

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 42 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 47 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 559 m/s, a po przejściu przez drzewo zmiejszyła się do 439 m/s.
a) Ile wynosi praca sił oporu?
b) Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
c) Ile wynosi czas przebijania drzewa?
Załóż, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

Odpowiedź:
a) Praca sił oporu wynosi $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -2510$ J, gdzie V_1 i V_2 to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie m przed wbiciem w drzewo i po przebiciu drzewa.
b) Wartość opóźnienia kuli wynosi $a = \frac{W}{md} \approx 127$ km/s^2, gdzie d to średnica drzewa.
c) Czas wynosi $t = \frac{V_1 - V_2}{a} \approx 0{,}942$ ms.

37 Zadanie – Krążek hokejowy

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 6 m, a po zderzeniu przebył drogę 4 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,09. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

Odpowiedź: Szybkość początkowa wynosi $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 4{,}2$ m/s, gdzie s_1 to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę, s_2 to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a f to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

38 Zadanie – Droga hamowania

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 30 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

Odpowiedź: Droga, jaką pokona samochód, wynosi $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 10{,}8$ m, gdzie V_0 to prędkość początkowa samochodu, t_1 to czas reakcji kierowcy, a f to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

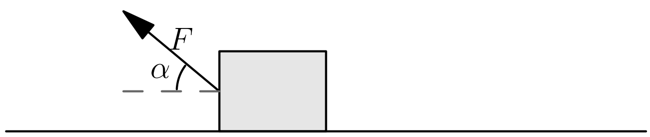
39 Zadanie – Spacer z sankami

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 40 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 67 N i tworzy on kąt 35° z poziomem.

Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 2200$ J.

40 Zadanie – Ukośna siła

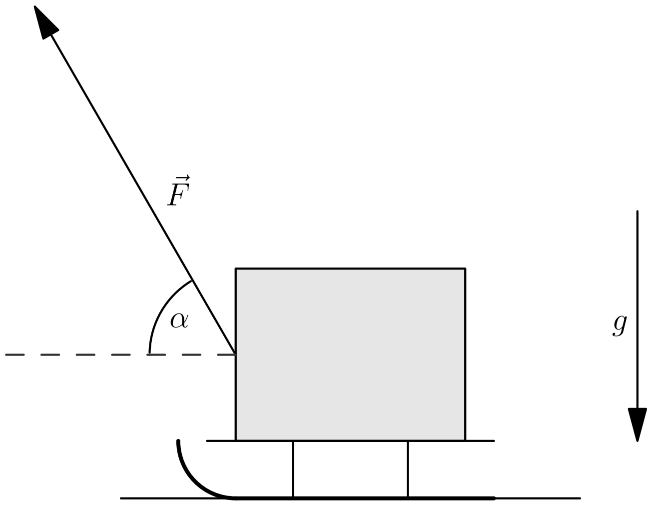
Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,9 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 7$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,07.
a) Oblicz przyśpieszenie klocka.
b) Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
c) Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie klocka wynosi $a \approx 5{,}2$ m/s^2.
b) Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi $s_{0\to5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 65$ m, gdzie t to czas.
c) Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi $s_3 = s_{0\to3} - s_{0\to2} \approx 13$ m.

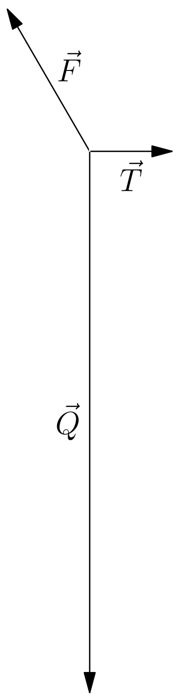
41 Zadanie – Sanki

Mama ciągnęła sanki z dzieckiem po śniegu, działając siłą o wartości $F = 72$ N. Sznurek podczas ruchu był cały czas napięty i nachylony do poziomu pod kątem $\alpha = 60°$. Masa sanek i dziecka wynosiła $m = 40$ kg. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ oraz że ruch był jednostajny prostoliniowy i odbywał się w poziomie.



a) Oblicz pracę, jaką wykonała mama, ciągnąc sanki z dzieckiem na drodze $s = 134$ m.

b) Na poniższym rysunku przedstawiono następujące siły działające na sanki z dzieckiem: $\vec{F}$ - siła ciągnąca, $\vec{T}$ - siła tarcia, $\vec{Q}$ - siła ciężkości. Brakuje na nim pionowej składowej siły reakcji podłoża $\vec{R}$. Zaznacz ją na tym rysunku, zachowaj odpowiednie proporcje.

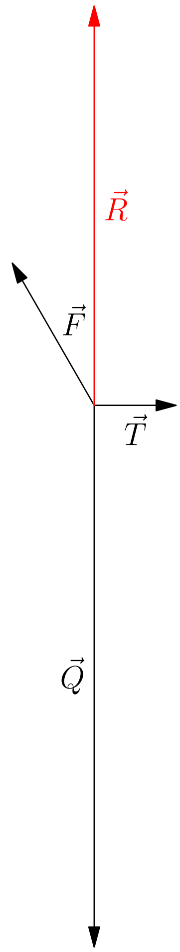


c) Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego μ sanek o śnieg.

Odpowiedź:

a) Mama wykonała pracę równą około 4820 J.

b)



c) Współczynnik tarcia sanek o śnieg wynosi około 0,11.

42 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta Mlmc wokół gwiazdy Prpl. Przyjmij, że Mlmc i Prpl są punktami materialnymi o masach odpowiednio $2{,}54 \cdot 10^{24}$ kg i $4{,}47 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $115 \cdot 10^{6}$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 22{,}5 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

43 Zadanie – Samochód na moście

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 74 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 10% ciężaru samochodu?

Odpowiedź: Prędkość wynosi $V = \sqrt{gR(1-k)} \approx 25{,}5$ m/s, gdzie $k = 10\%$, a R to promień krzywizny mostu.

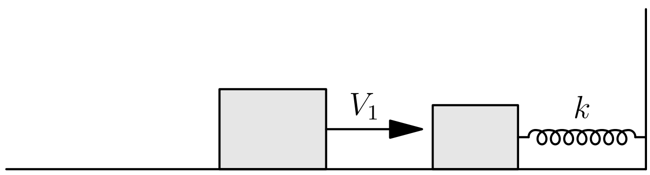
44 Zadanie – Obrót Ziemi

Oblicz:
a) z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 78% siły grawitacji działającej na niego.
b) ile wynosi ciężar człowieka o masie 65 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

Odpowiedź:
a) Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić $V = \sqrt{Rg(1-k)} \approx 3710$ m/s, gdzie R to promień Ziemi, a $k = 0{,}78$.
b) Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 635 N.

45 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,5 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 164$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześcian o masie 1,1 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 2$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



Odpowiedź: Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}} = 13{,}6$ cm, gdzie m_1 to masa uderzającego klocka, a m_2 to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

46 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,3 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 1,5 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 0,9 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 1,35 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}426$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2 m_1 g}} = 0{,}369$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

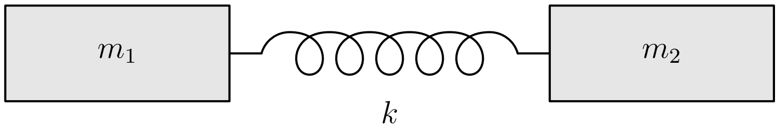
47 Zadanie – Drążek pogo

Janek uwielbia skakać na drążku pogo, którego wysokość bez obciążenia wynosi 105 cm. Gdy Janek stoi na drążku, wysokość drążka zmniejsza się o 10 cm i o tyle samo ściskana jest sprężyna. Na jaką wysokość ponad ziemię jest się w stanie wzbić Janek, wykorzystując jedynie energię zgromadzoną w ściśniętej sprężynie, gdy minimalna wysokość drążka podczas odbicia będzie wynosić 74 cm? Janek waży 58 kg, a masę drążka pogo można pominąć.

Odpowiedź: Janek może wzbić się maksymalnie na wysokość równą: $h = \frac{(l-y_{max})^2}{2x} + y_{max} \approx$ 122 cm, gdzie l to długość swobodna drążka, x to długość, o którą skróci się sprężyna, gdy stoi na niej Janek, y_{max} to długość drążka w momencie maksymalnego ściśnięcia sprężyny.

48 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 54$ N/m, $m_1 = 2$ kg oraz $m_2 = 3$ kg.



Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 0{,}937$ s.

49 Zadanie – Ciężarek na lince

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,97 s zakreśla okrąg o promieniu 109 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 54 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx$ 0,238 s.

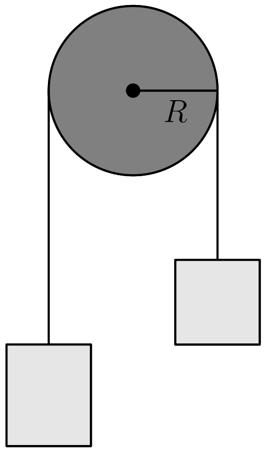
50 Zadanie – Tarcza

Na środku tarczy o średnicy 2 m i masie 112 kg, znajduje się człowiek o masie 61 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,4 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

Odpowiedź: Częstotliwość układu wyniesie $f_2 = f_1 \frac{Md^2}{8mr^2 + Md^2} = 0{,}255$ Hz, gdzie d to średnica tarczy o masie M, f_1 to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a r to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie m od osi obrotu.

51 Zadanie – Maszyna Atwooda

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0{,}5$ m i masie 3 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszone są dwa obciążniki o masach 2,32 kg i 1,52 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomiń. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:
a) załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
b) załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie układu wynosi $a_1 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = 2{,}04\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie m_1 i m_2 to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.
b) Przyśpieszenie układu wynosi $a_2 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_3} = 1{,}47\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie m_3 to masa walca.

52 Zadanie – Naturalny satelita

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $76 \cdot 10^3$ kg okrążającego w czasie 15,8 h jednorodną planetę o masie $424 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 28{,}5 \cdot 10^3$ km.

53 Zadanie – Zmiana orbity

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 500 kg znajduje się w odległości 4700 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8200 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi $3{,}69\ \mathrm{m/s^2}$, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

Odpowiedź: Praca wyniesie $W = \frac{GMm}{2}(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2}) = 381$ MJ, gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity, R to promień Marsa, a h_1 i h_2 to odległości satelity od powierzchni planety.

54 Zadanie – Prędkość ucieczki

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety $Z90$, stanowi 36% masy Ziemi, a jej promień wynosi 13200 km. Oblicz:
a) prędkość ucieczki ciała z planety $Z90$.
b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie $Z90$ do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 15 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

Odpowiedź:
a) Prędkość ucieczki wyniesie $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 4{,}66$ km/s, gdzie G to stała grawitacji, R to promień planety $Z90$ o masie M.
b) Stosunek wysokości wyniesie $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 11{,}9$, gdzie h i h_z to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie $Z90$ i na Ziemi, a g i g_z to odpowiednio przyśpieszenie na planecie $Z90$ i na Ziemi.

55 Zadanie – Tunel średnicowy

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 7200 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $8{,}33 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 8400 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}' = -\int_R^r F(r')\,dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\,dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 4190 \text{ m/s}$$

56 Zadanie – Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 30 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 72 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 640$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_a M_a = r_b M_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 148 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 61{,}5 \cdot 10^3$ km, $d \approx 210 \cdot 10^3$ km.

57 Zadanie – Dwie gwiazdy

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 8 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 58$ km/s, $v_{B1} = 24$ km/s, $d_1 = 4 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 18$ km/s, $d_2 = 12 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

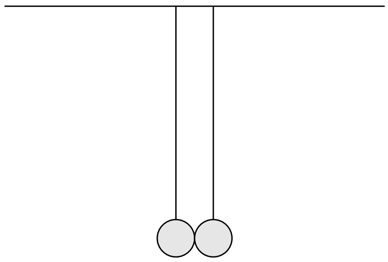
Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$

$$\approx 50{,}9 \text{ km/s}$$

58 Zadanie – Dwie kulki na linkach

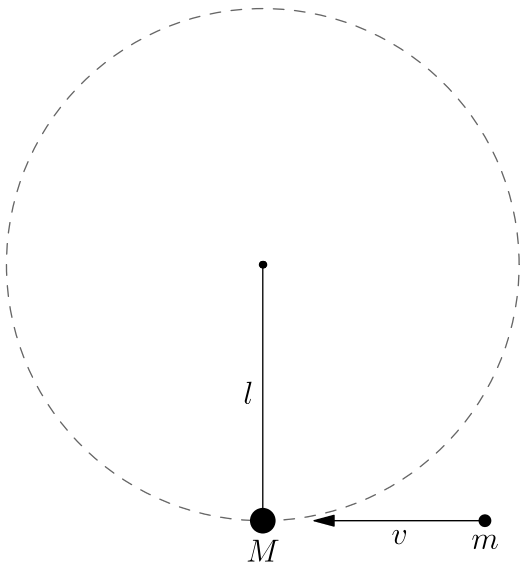
Dwie stykające się małe kulki o masach 0,9 kg i 0,5 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 0,9 m. Lżejsza kulka zostaje odchylona w płaszczyźnie linek o kąt 75° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



Odpowiedź: Wysokość wyniesie $H = \frac{m^2 l(1-\cos\alpha)}{(m+M)^2} = 8{,}5$ cm, gdzie m i M są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki, l to długość linki, a α to kąt odchylenia.

59 Zadanie – Postrzelone wahadło

Metalowy ciężarek o masie $M = 242$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 44$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 33$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s². Pomiń opory ruchu bryły.



Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

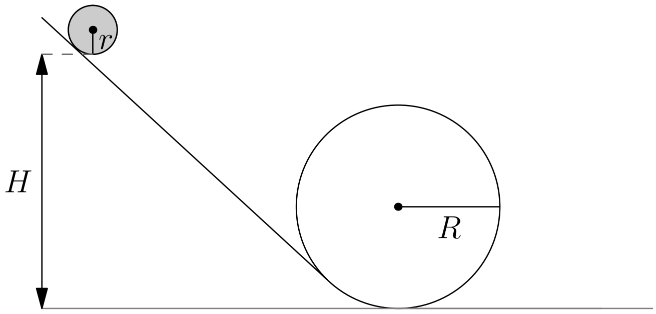
$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 38{,}7$ m/s.

60 Zadanie – Pętla śmierci

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0{,}05$ m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu $R = 1{,}2$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



Odpowiedź: Minimalna wysokość wynosi $H = 2{,}7(R - r) = 3{,}11$ m.

61 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Proton porusza się z prędkością o wartości 4000 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 0,9 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg.

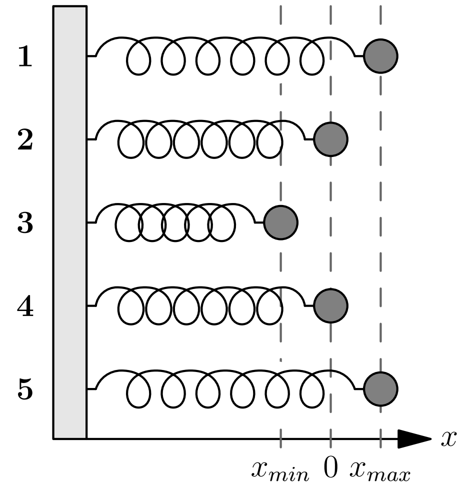
Odpowiedź: Proton porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = F/m \approx 34{,}5 \cdot 10^{10}$ m/s^2.

62 Zadanie – Oscylator harmoniczny

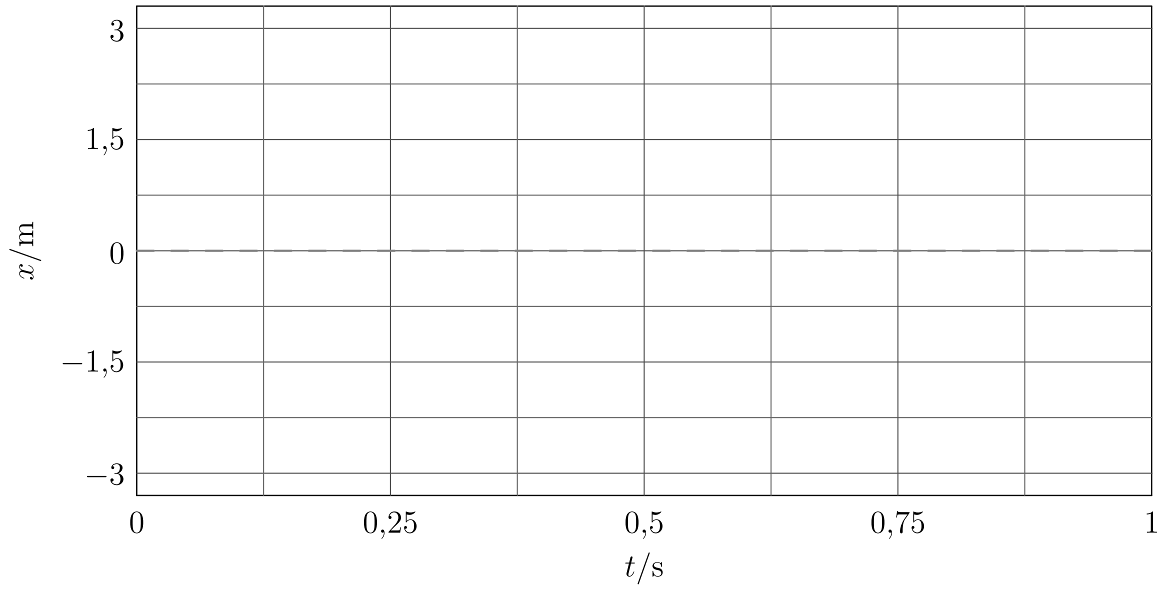
Przyjrzyjmy się prostemu układowi drgającemu, którego równanie ruchu ma postać:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

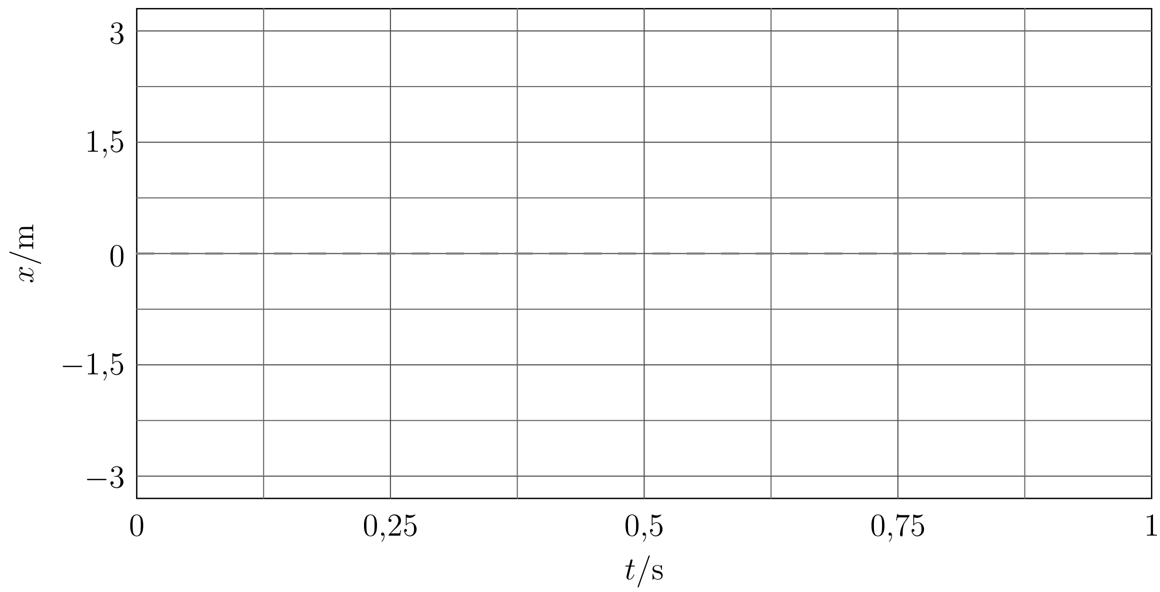
gdzie x_m, ω i ϕ są stałymi. Na rysunku można dostrzec ekstremalne momenty ruchu kulki: 1 i 5 odpowiadają maksymalnemu wychyleniu kulki, 3 minimalnemu. W momentach 2 i 4 kulka przechodzi przez położenie równowagi.



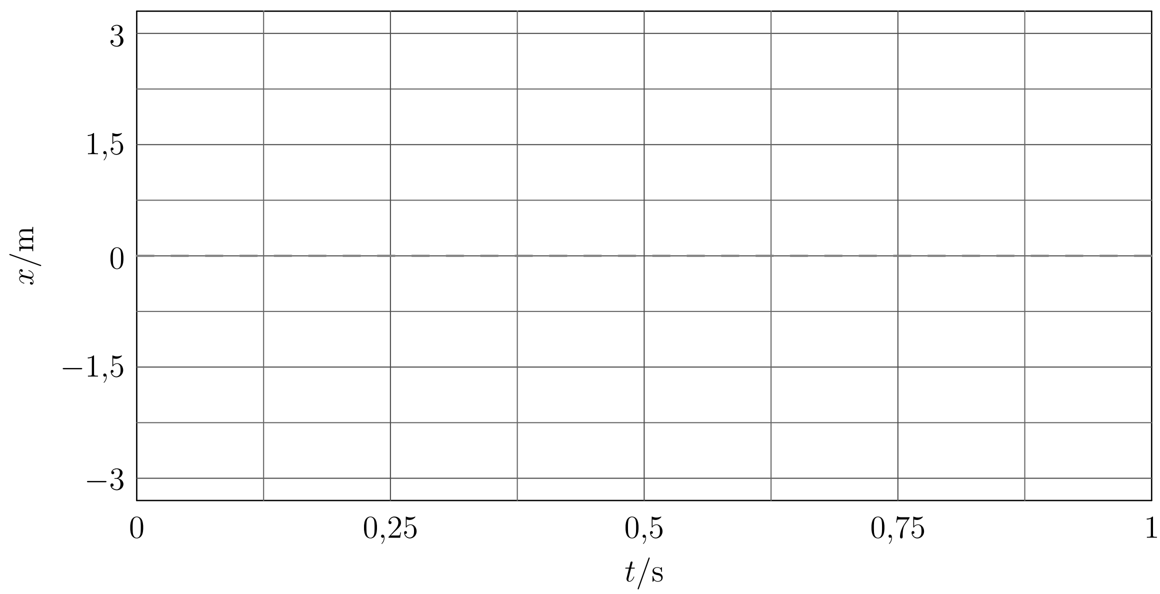
a) Narysuj wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu od momentu 1 do 5.



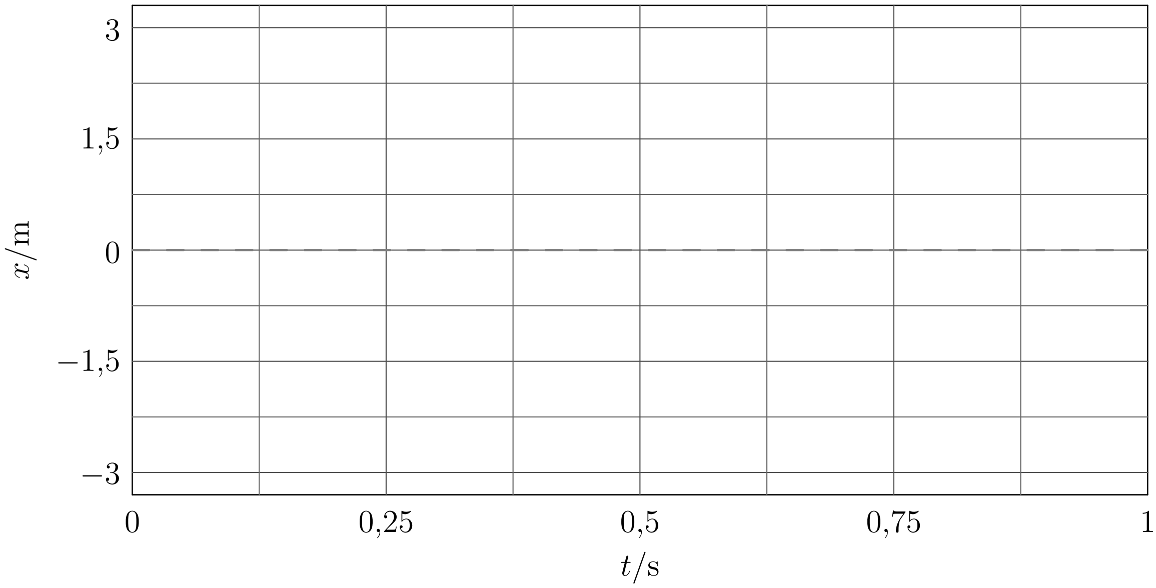
b) Narysuj wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Narysuj wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

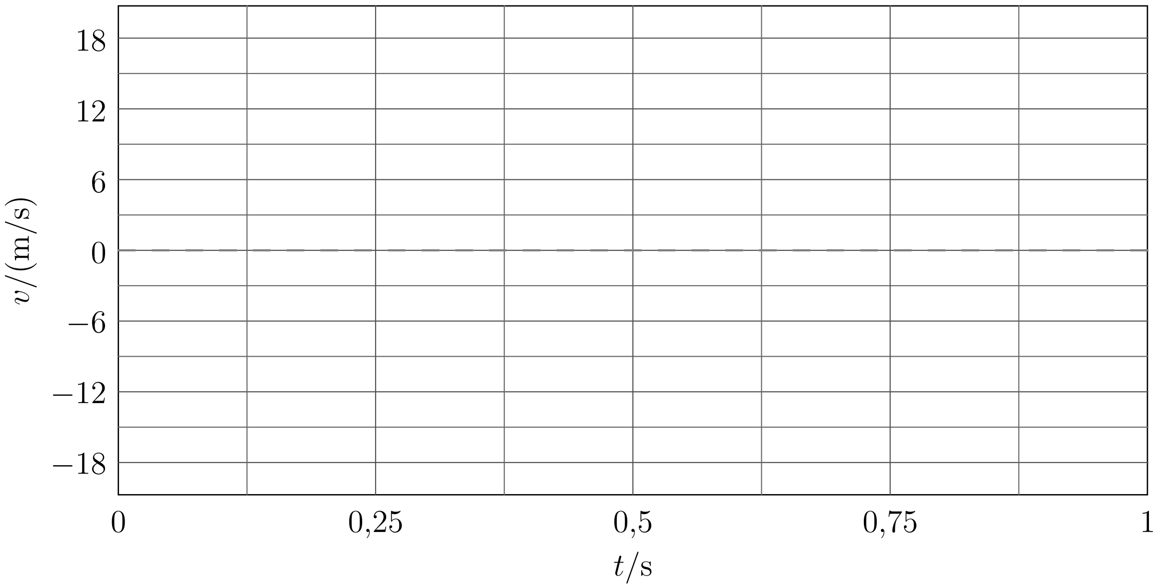


d) Narysuj wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



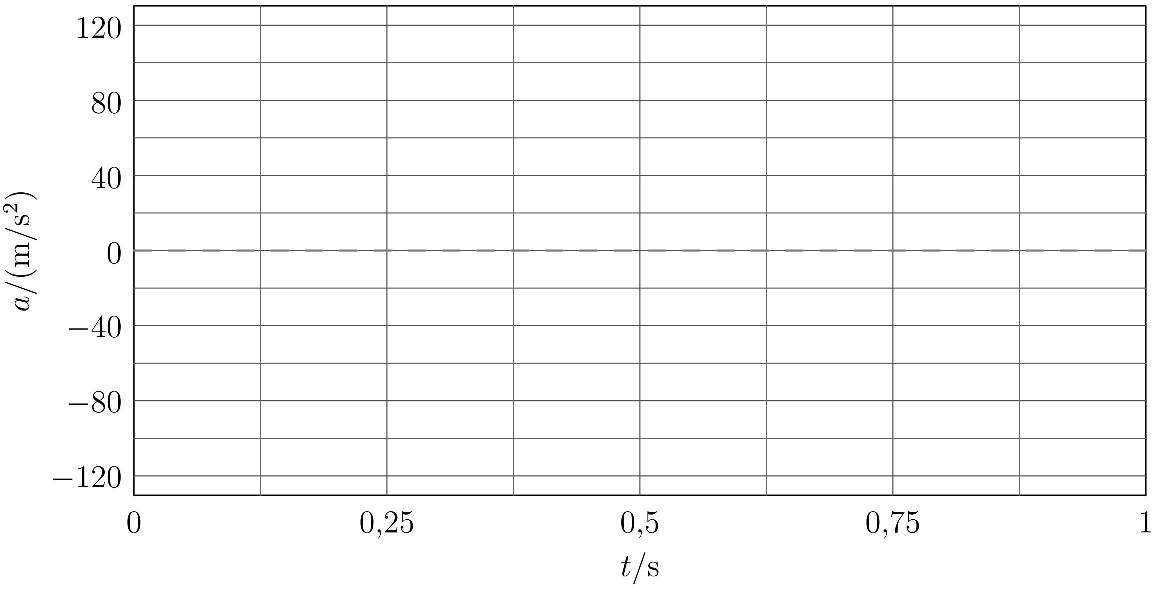
e) Jaką postać ma równanie opisujące prędkość kulki?

Narysuj wykres zależności prędkości kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).

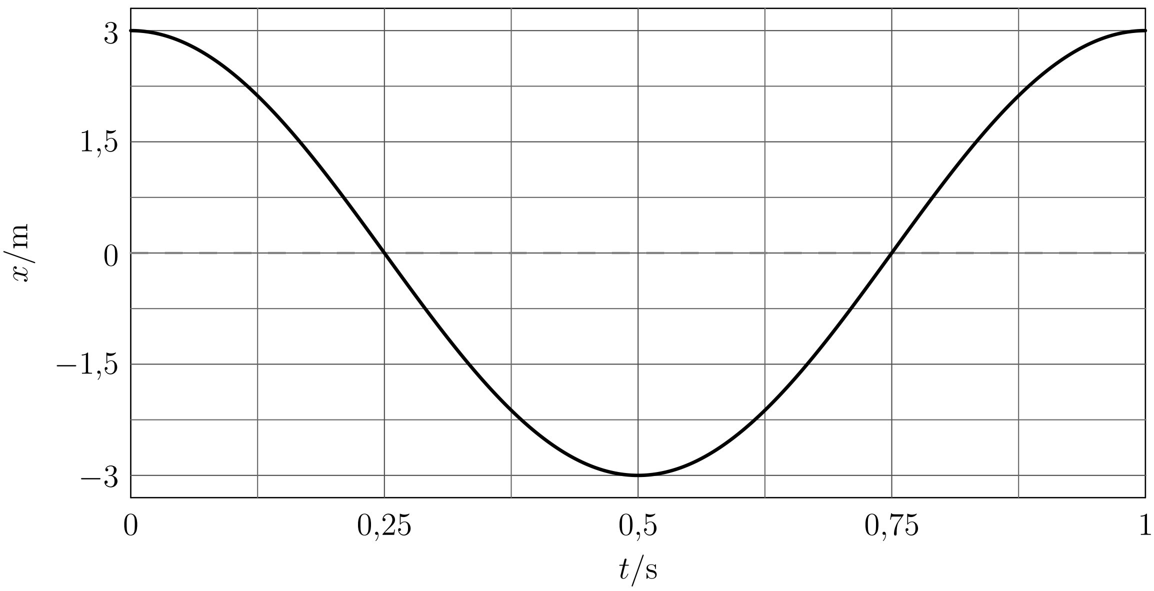


f) Jaką postać ma równanie opisujące przyspieszenie kulki?

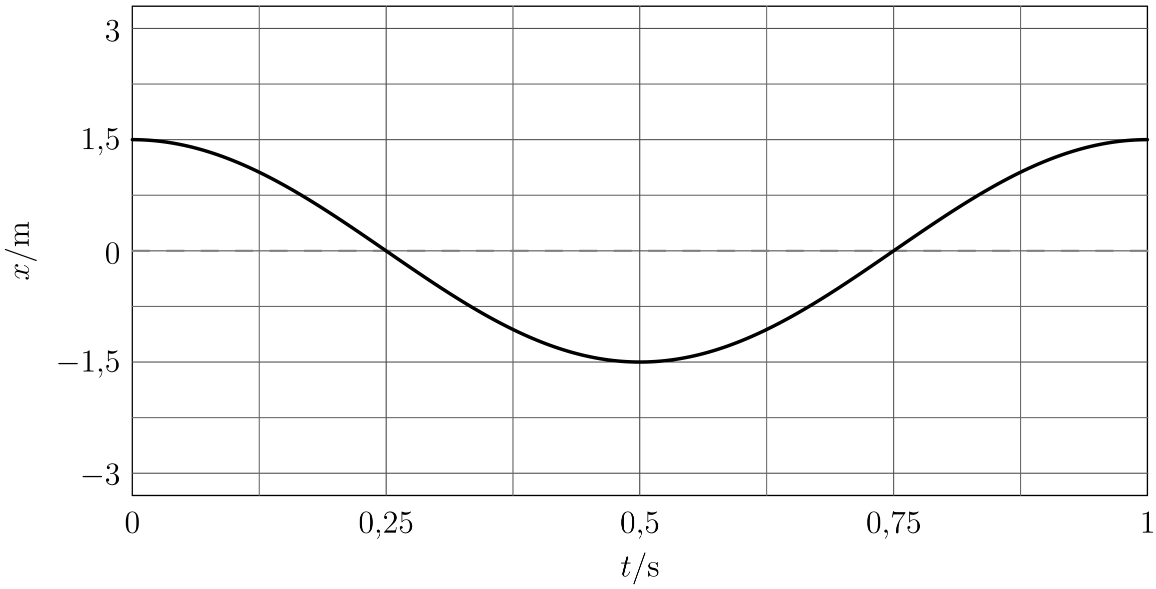
Narysuj wykres zależności przyspieszenia kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



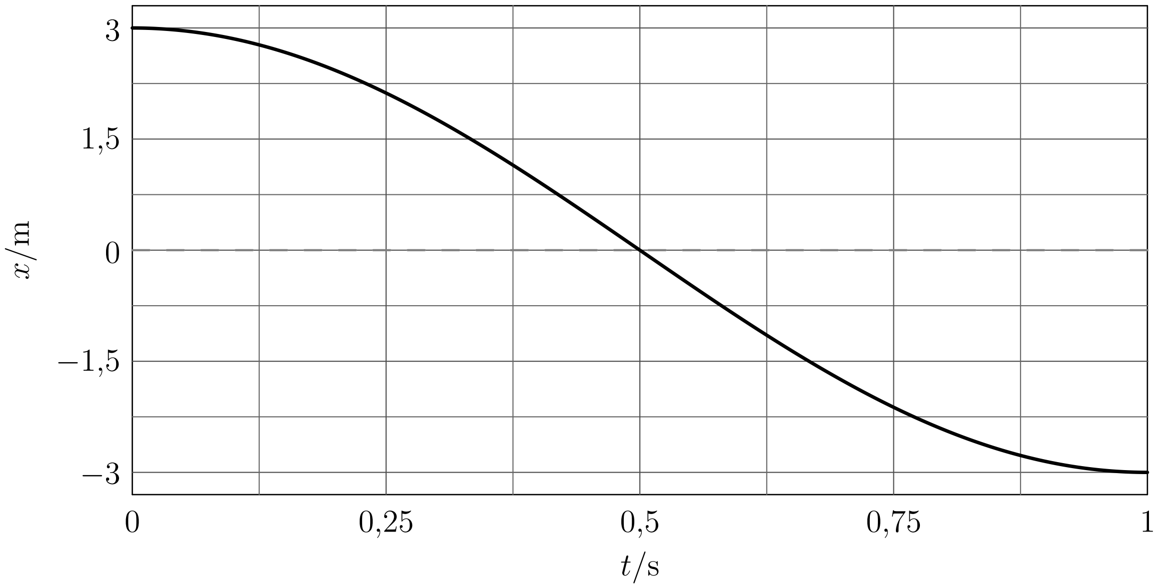
Odpowiedź:
a) Wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu.



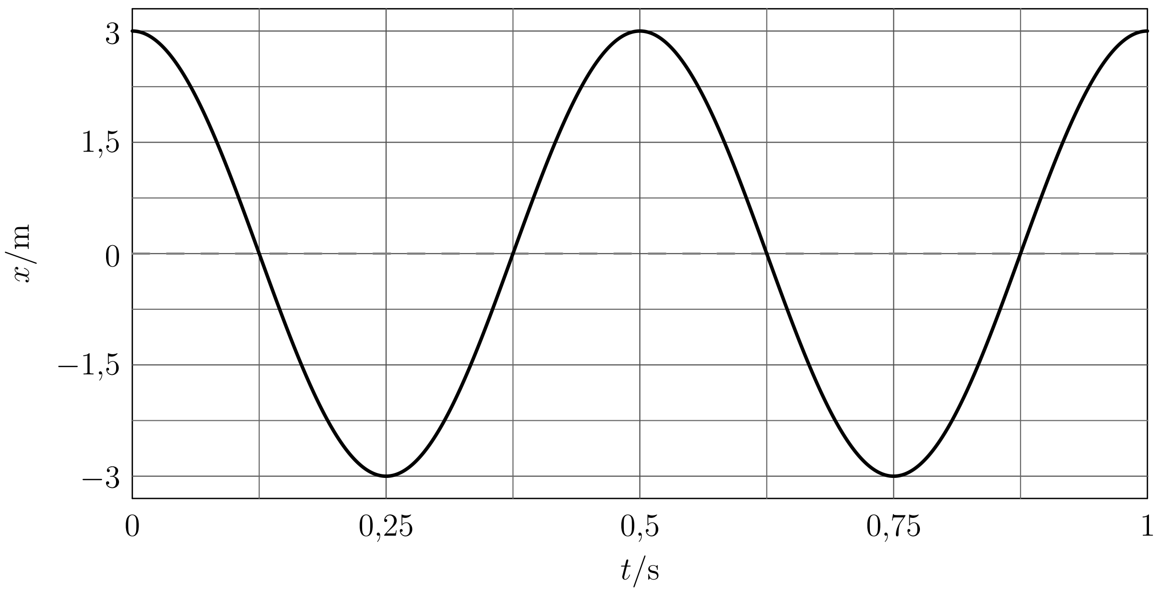
b) Wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

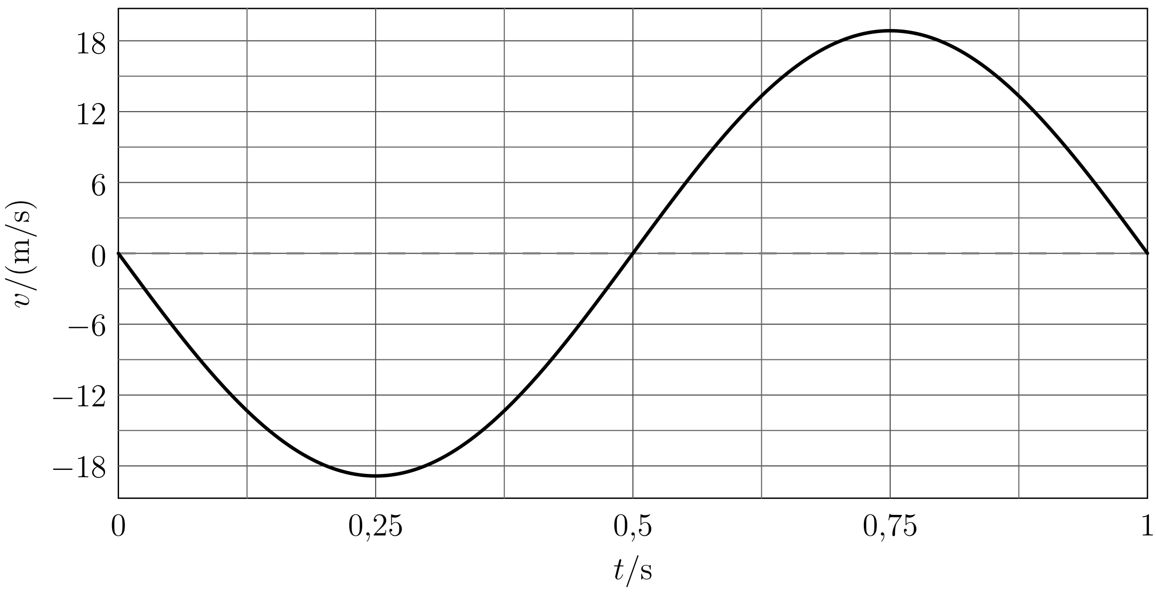


d) Wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



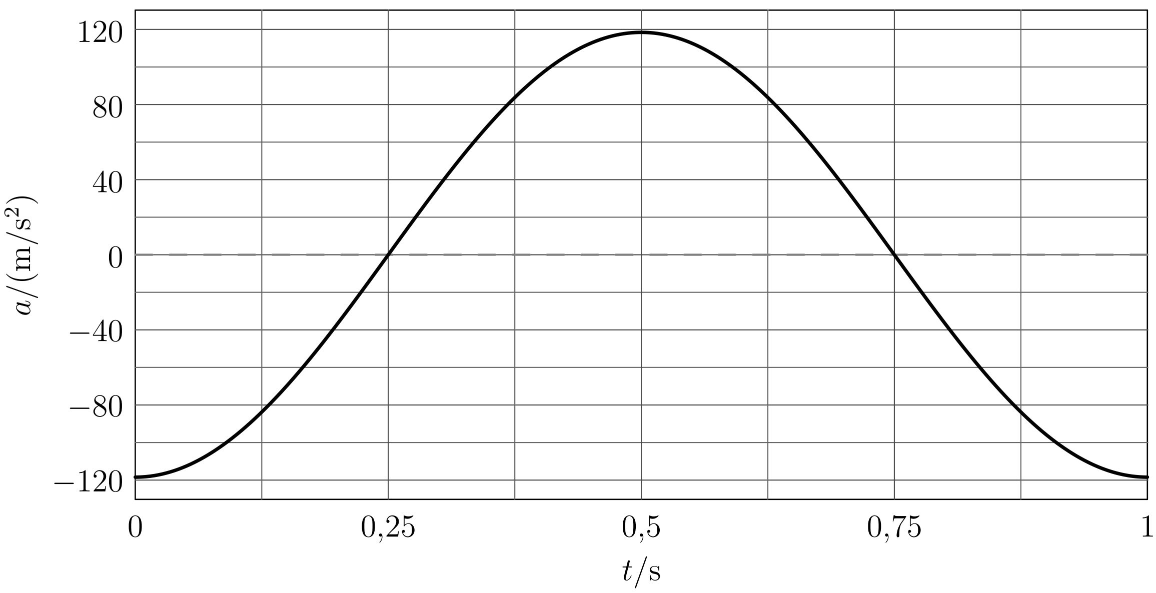
e) Wykres przedstawiający zależność prędkości kulki od czasu.
Równanie:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$



f) Wykres przedstawiający zależność przyspieszenia kulki od czasu.
Równanie:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



63 Zadanie – Kulka na sprężynie

Po idealnie gładkim stole porusza się kulka o masie 670 g, która umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości 63 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Kulkę odciągnięto na odległość 12 cm od położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie. Pomiń opory ruchu.
a) Wyznacz amplitudę.
b) Wyznacz okres drgań.
c) Wyznacz częstotliwość
d) Wyznacz częstość kołową.
e) Wyznacz maksymalną prędkość kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
f) Wyznacz maksymalne przyspieszenie kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięte.

g) Wyznacz maksymalną energię potencjalną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
h) Wyznacz maksymalną energię kinetyczną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

Odpowiedź:
a) Amplituda wynosi: $x_m = 12$ cm.
b) Okres drgań wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}648$ s, gdzie m to masa kulki, a k to stała sprężystości.
c) Częstotliwość wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 1{,}54$ Hz.
d) Częstość kołowa wynosi: $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 9{,}7\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
e) Maksymalna prędkość kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$v_{max} = \omega x_m \approx 1{,}16\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
f) Maksymalne przyspieszenie kulki zostaje osiągnięte na krańcach toru i wynosi:
$a_{max} = \omega^2 x_m \approx 11{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
g) Maksymalna energia potencjalna kulki zostaje osiągnięta na krańcach toru i wynosi:
$E_{pot} = \frac{k{x_m}^2}{2} \approx 0{,}454$ J.
h) Maksymalna energia kinetyczna kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$E_{kin} = \frac{m{v_m}^2}{2} \approx 0{,}454$ J.

64 Zadanie – Drgająca ciecz

Jaś nalał pewną ciecz o objętości 11 cm^3 do pionowo ustawionej U-rurki, której przekrój poprzeczny wynosił 0,4 cm^2. Następnie dmuchnął do jednego z ramion tak mocno, że poziom wody podniósł się w drugim ramieniu. Zmiany poziomu cieczy zachodzą jedynie w prostych fragmentach ramion rurki. Pomiń opory ruchu cieczy.
a) Wykaż, że siła, która dąży do przywrócenia stanu równowagi, to siła harmoniczna.
b) Oblicz częstotliwość, z jaką będzie drgała ciecz.

Odpowiedź:
a) Siła, która powoduje ruch to siła ciężkości: $Q = mg$, gdzie m to masa części cieczy, g to przyspieszenie ziemskie. Masę możemy wyrazić jako: $m = \rho V_{nad}$, gdzie ρ to gęstość cieczy, V_{nad} to objętość części cieczy. Objętość natomiast to: $V_{nad} = 2xS$, gdzie x to wychylenie cieczy ponad poziom równowagi, a S to przekrój poprzeczny. Zbierając wszystko razem otrzymujemy: $Q = 2Sg\rho x = kx$. Wartość siły ciężkości jest więc proporcjonalna do wychylenia cieczy z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi, zatem spełnia cechy siły harmonicznej.
b) Ciecz będzie drgała z częstotliwością: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Sg}{V}} \approx 1{,}34$ Hz.

65 Zadanie – Wahadło na planecie

Na pewnej planecie mała kulka o masie 45 g została zawieszona na nitce o długości 18 cm. Kulka waha się z okresem wynoszącym 0,5 s oraz amplitudą znacznie mniejszą od długości nici. Opory ruchu można pominąć.
a) Czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne tej planety? Jeśli tak, to ile ono wynosi?
b) Jak zmieni się okres wahań kulki, jeżeli zwiększymy jej masę trzykrotnie?
c) Jaka musi być długość nici, aby ta sama kulka wahała się z okresem równym 1 s?

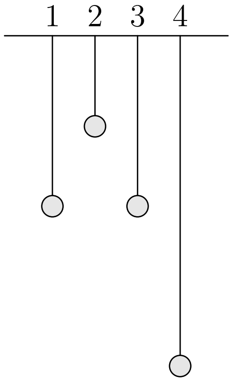
Odpowiedź:
a) Tak, przyspieszenie grawitacyjne wynosi: $g = \frac{4\pi^2}{T^2} l \approx 28{,}4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, gdzie l to długość nici, a T to okres drgań.

b) Okres wahań nie zależy od masy kulki, więc okres wahań się nie zmieni.
c) Długość nici musi wynosić: $L = 4l = 72$ cm.

66 Zadanie – Rezonans mechaniczny

Na rozciągniętej poziomo lince zawieszamy cztery wahadła. W poniższej tabeli zestawiono wartości ich długości oraz mas zawieszonych ciężarków, gdzie l i m są jednostkami odpowiednio długości i masy.

numer wahadła	1	2	3	4
długość	l	$0{,}5l$	l	$2l$
masa	m	$2m$	$3m$	m



Pierwsze wahadło wprawiono w ruch. Po pewnym czasie zaobserwowano ruch pozostałych wahadeł. Które z nich miało największe wychylenie? Drugie, ponieważ znajduje się najbliżej? Trzecie, ponieważ ma taką samą długość nici? Czy może czwarte, ponieważ ma taką samą masę?

Odpowiedź: Najbardziej w ruch zostanie wprawione wahadło trzecie, ponieważ jego okres drgań jest równy okresowi drgań wahadła pierwszego.

67 Zadanie – Łamigłówka z elektrostatyki

Do dyspozycji masz uziemienie oraz trzy jednakowe metalowe kule, dwie z nich naładowane są ładunkiem Q, a trzecia ładunkiem $-Q$. Otrzymaj na jednej z nich ładunek $\frac{3}{8}Q$. Możesz łączyć kule ze sobą oraz z uziemieniem.

Odpowiedź: Najszybsza droga do uzyskania na jednej kuli ładunku o wartości $\frac{3}{8}Q$:

I połączenie kul o ładunkach Q i $-Q$

II połączenie kul o ładunkach 0 i Q

III połączenie kul o ładunkach $\frac{1}{2}Q$ i 0

IV połączenie kul o ładunkach $\frac{1}{2}Q$ i $\frac{1}{4}Q$

V i w ten sposób uzyskaliśmy ładunek $\frac{3}{8}Q$.

Uwaga! Za każdym razem łączymy kule na tyle długo, aby uzyskać taki sam ładunek na obydwu kulach.

68 Zadanie – Naładowane kule

Powierzchnie dwóch jednakowych plastikowych kul naładowano jednorodnie: pierwszej kuli ładunkiem $-q$, a drugiej ładunkiem $-2q$. Środki kul na początku były w odległości d od siebie, następnie przemieszczono jedną z kul i ta odległość wynosiła 0,3d.

a) Uzupełnij luki i skreśl wyrazy tak, aby tabela zawierała prawdziwe informacje o siłach działajacych na kule przedstawione na rysunku.

kula 1		kula 2	
przed zsunięciem			
zwrot siły działającej na kulę 1:	w prawo/w lewo	zwrot siły działającej na kulę 2:	w prawo/w lewo
wyrażenie opisujące wartość tej siły:		wyrażenie opisujące wartość tej siły:	
po zsunięciu			
zwrot siły działającej na kulę 1:	w prawo/w lewo	zwrot siły działającej na kulę 2:	w prawo/w lewo
wyrażenie opisujące wartość tej siły:		wyrażenie opisujące wartość tej siły:	

b) Oblicz stosunek wartości siły działającej po zsunięciu do tej, która działała na początku.

Odpowiedź: a)

<table>
<tr><td colspan="2">kula 1</td><td colspan="2">kula 2</td></tr>
<tr><td colspan="4">przed zsunięciem</td></tr>
<tr><td>zwrot siły działającej na kulę 1:</td><td>~~w prawo~~/w lewo</td><td>zwrot siły działającej na kulę 2:</td><td>w prawo/~~w lewo~~</td></tr>
<tr><td>wyrażenie opisujące wartość tej siły:</td><td>$F = k\frac{2q^2}{d^2}$</td><td>wyrażenie opisujące wartość tej siły:</td><td>$F = k\frac{2q^2}{d^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">po zsunięciu</td></tr>
<tr><td>zwrot siły działającej na kulę 1:</td><td>~~w prawo~~/w lewo</td><td>zwrot siły działającej na kulę 2:</td><td>w prawo/~~w lewo~~</td></tr>
<tr><td>wyrażenie opisujące wartość tej siły:</td><td>$F = k\frac{2q^2}{(0{,}3d)^2}$</td><td>wyrażenie opisujące wartość tej siły:</td><td>$F = k\frac{2q^2}{(0{,}3d)^2}$</td></tr>
</table>

b) Stosunek sił wynosi $\frac{1}{(0{,}3)^2} \approx 11{,}1$.

69 Zadanie – Natężenie pola elektrycznego

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 14 nm od jądra atomowego o liczbie atomowej 12. Opisz również kierunek i zwrot wektora natężenia pola elektrycznego względem jądra. Pominń wpływ innych obiektów.

Odpowiedź: Wartość natężenia pola elektrycznego $|\vec{E}| = kne/r^2 \approx 88{,}2 \cdot 10^6$ N/C, gdzie n jest liczbą atomową, e ładunkiem protonu, a k stałą elektryczną. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest taki sam jak prosta przechodząca przez jądro i punkt, w którym określamy pole. Zwrot $\vec{E}$ jest *od jądra.*

70 Zadanie – Przyciągnięty elektron

Oblicz pracę siły elektrostatycznej ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku $+3e$, gdzie e jest ładunkiem protonu, podczas przyciągania elektronu z odległości 7 mm do 4 nm. Przyjmij, że elektron na początku i na końcu procesu spoczywa. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Odpowiedź: Praca

$$W_{1\to 2} = -k\,n\,e\,e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \approx 1{,}08 \text{ eV} \approx 173 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

gdzie $n = +3$.

71 Zadanie – Praca nad ładunkiem w polu dipola elektrycznego

Oblicz pracę, jaką wykonała zewnętrzna siła, przemieszczając proton po półokręgu w polu trwałego, nieruchomego dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego $2{,}1 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo proton spoczywał na symetralnej dipola w odległości 1,1 nm od tego dipola. Na końcu proton również spoczywał na symetralnej dipola, ale w odległości 2,4 nm od tego dipola i po jego drugiej stronie.

Odpowiedź: Praca zewnętrznej siły jest równa 0.

72 Zadanie – Obrót molekuły w polu innej cząsteczki

Oblicz, ile energii zostanie przekazane otoczeniu, gdy molekuła posiadająca moment dipolowy o wartości $3{,}5 \cdot 10^{-30}$ Cm ustawi się tak, by jej moment dipolowy był skierowany przeciwnie do momentu dipolowego drugiej, unieruchomionej molekuły znajdującej się w odległości 1,9 nm. Wartość momentu dipolowego drugiej molekuły jest równa $17{,}6 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle i mają zgodne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł. Przyjmij, że molekuły są trwałymi dipolami punktowymi. Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych jest równa

$$E_p = k\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r}\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r}\right)\frac{1}{r^3}$$

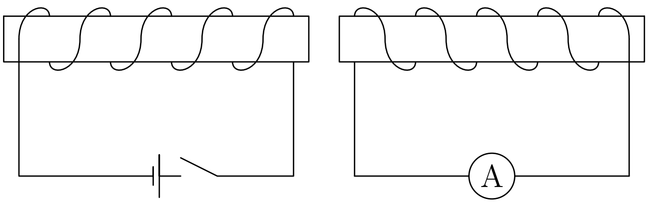
gdzie k jest stałą elektryczną, $\vec{p}_i$ momentem dipolowym, a $\vec{r}$ wektorem względnego położenia dipoli. Korzystając z tego wzoru, uzasadnij, które jego składowe są istotne w rozważanym problemie. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Odpowiedź: Energia przekazana otoczeniu

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB} = 2\,k\,p_1\,p_2/r^3 \approx 1010\ \mu\text{eV} \approx 1610 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$$

73 Zadanie – Zwojnica

Na schemacie przedstawiono dwie zwojnice. W pierwszym obwodzie znajduje się bateria i włącznik, w drugim amperomierz. Po zamknięciu obwodu po lewej stronie w obwodzie po prawej stronie amperomierz zarejestrował przepływ prądu.



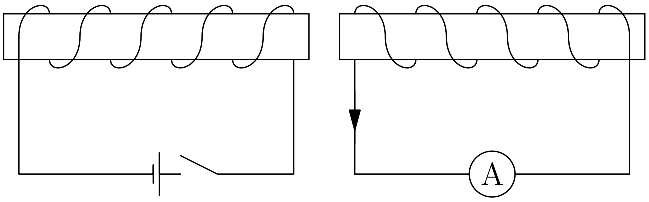
a) Jak wyjaśnisz przepływ prądu w obwodzie po prawej stronie?

b) Zaznacz na rysunku, w którym kierunku będzie płynął prąd w obwodzie po prawej stronie. Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedź:

a) Tuż po zamknięciu obwodu po lewej stronie wzrasta w nim natężenie prądu, co powoduje zmianę pola magnetycznego wokół zwojnicy po lewej stronie, a więc także pola magnetycznego w otoczeniu zwojnicy po prawej stronie. Zajdzie zjawisko indukcji elektromagnetycznej.

b) Zgodnie z regułą Lenza w obwodzie po prawej stronie popłynie prąd wyindukowany, taki żeby przeciwdziałać przyczynie wywołującej go. Gdy zamykamy obwód, zwiększamy strumień pola elektromagnetycznego wokół zwojnicy, więc prąd w zwojnicy po prawej stronie popłynie w taki sposób, że bieguny elektromagnesu, jakim jest zwojnica, ustawią się przeciwnie niż w zwojnicy po lewej stronie.



74 Zadanie – Cewka i magnes

Układ składa się z wykonanej z miedzianego drutu, podłączonej tylko do amperomierza cewki oraz trwałego, silnego magnesu. Cewka i magnes mogą być niezależnie przesuwane wzdłuż prostej, która jest jednocześnie osią cewki i magnesu (bieguny magnesu leżą na tej prostej). W poniższej tabeli, w wymienionych trzech przypadkach opisz zachowanie wartości bezwzględnej natężenia prądu, $|I|$, płynącego przez cewkę (*maleje, rośnie, stała i różna od 0, równa 0*) oraz wypadkowe oddziaływanie elektromagnetyczne między cewką a magnesem (*przyciągają się, odpychają się, nie oddziałują*).

opis	$\boldsymbol{|I|}$	**oddziaływanie**
Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki		
Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu		
Magnes jest ze stałą prędkością zbliżany do nieruchomej cewki		

Odpowiedź:

opis	$\boldsymbol{|I|}$	**oddziaływanie**
Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki	maleje	przyciągają się
Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu	maleje	przyciągają się
Magnes jest ze stałą prędkością zbliżany do nieruchomej cewki	rośnie	odpychają się

75 Zadanie – Generator fal

Uczeń nalał wody do wanny. Na powierzchni wody położył drewnianą listewkę połączoną z generatorem drgań. Generator poruszał listewką pionowo, ze stałą częstotliwością tak, że listewka cały czas była w kontakcie z wodą. W górnym położeniu znajdowała się co 0,24 s. Uczeń wytworzył w ten sposób na powierzchni wody falę płaską. Jej prędkość wynosi 0,38 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz częstotliwość wytwarzanych fal oraz odległość między kolejnymi grzbietami.

Odpowiedź: Częstotliwość wytwarzanych fal wynosi ok. 4,2 Hz, a odległość między kolejnymi grzbietami fali ok. 9,1 cm.

76 Zadanie – Dźwięk w piaskowcu

Prędkość dźwięku w piaskowcu jest równa 2600 m/s. Oblicz okres oraz częstotliwość fali rozchodzącej się w płycie z tego piaskowca, jeśli długość fali jest równa 0,8 km.

Odpowiedź: Okres fali $T = \lambda/v \approx 0{,}308$ s, a jej częstotliwość $f = 1/T \approx 3{,}25$ Hz.

77 Zadanie – Częstotliwość światła

Wiązka światła o długości fali 700 nm w próżni pada na powierzchnię szkła o bezwzględnym współczynniku załamania tego światła równym 1,74. Oblicz częstotliwość i długość fali tego światła w szkle. Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

Odpowiedź: Częstotliwość fali w szkle $f_2 = f_1 = c/\lambda_1 \approx 429$ THz, gdzie f_1 i λ_1 to odpowiednio częstotliwość i długość fali w próżni. Długośc fali w szkle $\lambda_2 = v_2 T = cT/n = \lambda_1/n \approx 402$ nm, gdzie v_2 to prędkość fali w szkle.

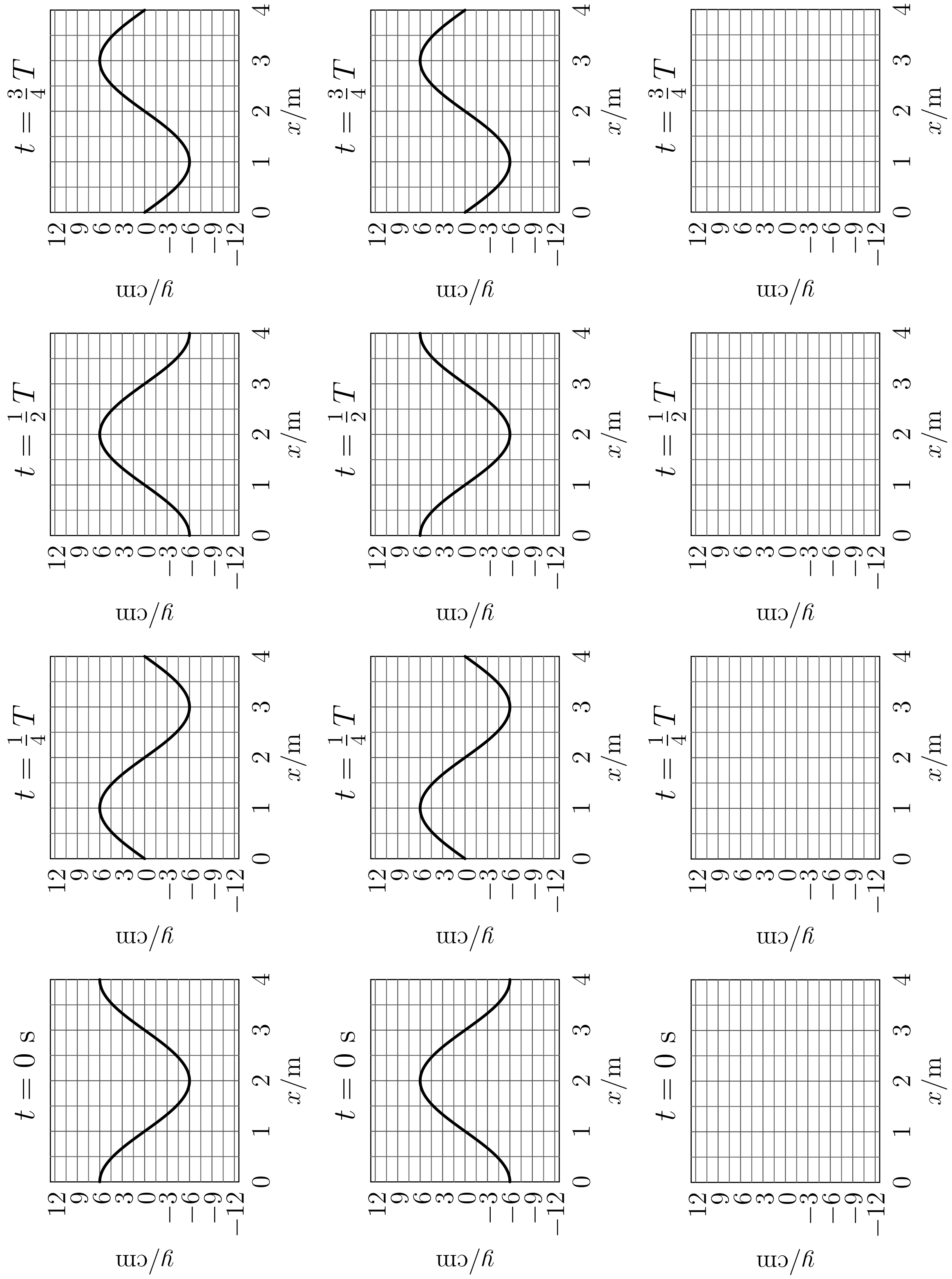
78 Zadanie – Fala biegnąca

Wzdłuż sznurka biegnie fala, która opisana jest wzorem: $y(x,t) = A\cos(Bx - Ct + D)$, gdzie x to położenie, a t to czas. Stałe numeryczne wynoszą odpowiednio: $A = 7$ mm, $B = 74$ rad/m, $C = 37$ rad/s, $D = 1$ rad.
a) Wyznacz amplitudę fali.
b) Wyznacz długość fali.
c) Wyznacz okres fali.
d) Wyznacz częstotliwość fali.
e) Wyznacz prędkość fali.
f) Wyznacz przemieszczenie sznurka w punkcie $x = 12{,}5$ cm w chwili $t = 8{,}9$ s.

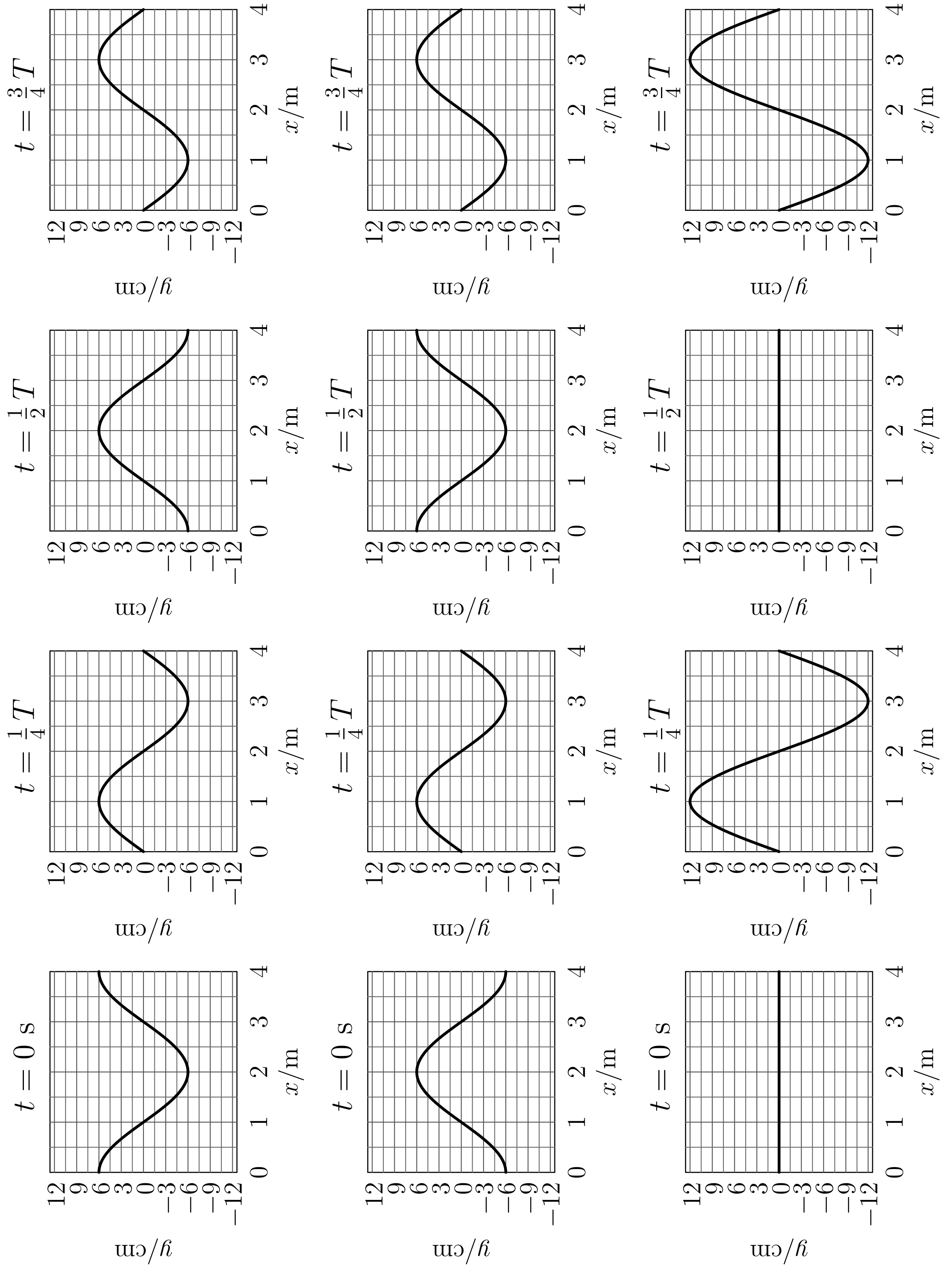
Odpowiedź:
a) Amplituda fali wynosi: $y_m = 7$ mm i jest równa co do wartości parametrowi A.
b) Długość fali wynosi: $\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx 8{,}5$ cm, gdzie k to liczba falowa równa co do wartości parametrowi B.
c) Okres fali wynosi: $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0{,}17$ s, gdzie ω to częstość kołowa równa co do wartości parametrowi C.
d) Częstotliwość fali wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 5{,}9$ Hz.
e) Prędkość fali wynosi: $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \approx 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
f) Przemieszczenie w punkcie x w chwili t wynosi:
$y = 0{,}007 \cdot \cos(74 \cdot 0{,}125 - 37 \cdot 8{,}9 + 1)\,\text{m} \approx 1{,}2$ mm.

79 Zadanie – Fale przeciwbieżne

Na poniższym rysunku umieszczono zależności wychylenia y od położenia x w wyróżnionych chwilach t dla dwóch fal: dla pierwszej fali w pierwszym rzędzie i dla drugiej fali w drugim rzędzie. Jak będzie wyglądała ich suma (superpozycja)? Narysuj odpowiednie zależności $y(x)$ w trzecim rzędzie.



Odpowiedź:



80 Zadanie – Kuter rybacki

Dwóch rybaków wypłynęło kutrem rybackim na morze w poszukiwaniu ławicy ryb. Płynęli z prędkością 18 km na godzinę względem dna. Fale morskie, płynące w przeciwną stronę, uderzały w przednią część kadłuba około 70 razy w ciągu minuty. Odległość między kolejnymi grzbietami fal wynosiła 5 m.

W celu znalezienia ławicy ryb, rybacy wykorzystali sonar, czyli urządzenie, które wysyłało pionowo w głąb wody fale ultradźwiękowe o częstotliwości 160 kHz i długości 9 mm. Od chwili

wysłania impulsu do chwili jego powrotu po odbiciu się od ławicy ryb upłynęło 60 ms.
a) Ile wynosi szybkość przemieszczania się fal morskich względem dna?
b) Ile wynosi szybkość rozchodzenia się fal ultradźwiękowych emitowanych przez sonar?
c) Jaka jest głębokość, na której znajduje się ławica ryb?

Odpowiedź:
a) Szybkość przemieszczania się fal morskich względem dna wynosi $v_f = \lambda_f f_f - v_k \approx 0{,}83\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie λ_f - odległość między grzbietami fal, f_f - częstotliwość uderzania fal morskich o kuter, v_k - prędkość kutra.
b) Szybkość rozchodzenia się fal ultradźwiękowych wynosi $v_s = \lambda_s f_s \approx 1440\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie λ_s to długość fali, a f_s to częstotliwość fali wysłanej przez sonar.
c) Ławica ryb znajduje się na głębokości $h = \lambda_s f_s \frac{t}{2} \approx 43$ m, gdzie t to czas od wysłania do powrotu impulsu.

81 Zadanie – Struna

Rozważmy gitarową strunę o długości 0,662 m, która rozpięta jest pomiędzy dwoma zaciskami. Przy częstościach rezonansowych, w wyniku interferencji, w strunie powstaje fala stojąca. Drganie własne o najniższej częstości rezonansowej nazywamy modem podstawowym lub pierwszą harmoniczną. W przypadku powyższej struny częstotliwość modu podstawowego wynosi 325 Hz.
a) Z jaką prędkością rozchodzi się fala w strunie?
b) Jaką częstotliwość ma druga harmoniczna?

Odpowiedź:
a) Fala rozchodzi się z prędkością $v = 2lf_1 \approx 430\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie l to długość struny, a f_1 to częstotliwość modu podstawowego.
b) Druga harmoniczna ma częstotliwość równą $f_2 = 650$ Hz.

82 Zadanie – Prędkość dźwięku w stali

Paweł i Gaweł stoją na szynach kolejowych w odległości 726 m od siebie. Paweł uderzył młotkiem w szynę. Gaweł, przykładając ucho do szyny, usłyszał dźwięk o 2 sekundy wcześniej niż dźwięk, który doleciał w powietrzu. Oblicz prędkość, z jaką rozchodzi się dźwięk w stali, z której zrobiono szyny. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 339 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Odpowiedź: Prędkość rozchodzenia się dźwięku w stali wynosi: $v_s = \frac{1}{\frac{1}{v_p} - \frac{\Delta t}{s}} \approx 5130\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie v_p to prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu, Δt to różnica w czasie, s to odległość pomiędzy Pawłem a Gawłem.

83 Zadanie – Radiowóz policyjny

Syrena radiowozu policyjnego wydaje dźwięk o częstotliwości 950 Hz. Samochód zbliża się ze stałą prędkością z oddali do ludzi stojących na przystanku, którzy odbierają dźwięk o częstotliwości 1040 Hz. Prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu wynosi 341 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
a) Ile wynosi prędkość radiowozu?
b) Znając prędkość radiowozu, oblicz częstotliwość dźwięku, jaką usłyszą ludzie na przystanku, gdy radiowóz znajdzie się w znacznej odległości, oddalając się od nich.

Odpowiedź:
a) Prędkość radiowozu wynosi: $v_r = v_p \frac{f' - f_s}{f'} \approx 106\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, gdzie v_p to prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu, f_s to częstotliwość syreny, f' to częstotliwość, którą odbierają ludzie na przystanku.
b) Częstotliwość dźwięku, którą odbiorą ludzie na przystanku po przejechaniu radiowozu będzie wynosić: $f'' = f_s \frac{v_p}{v_p + v_r} \approx 874$ Hz.

84 Zadanie – Nietoperz

Nietoperz orientuje się w przestrzeni, wysyłając i odbierając odbite fale dźwiękowe. Spoczywający nietoperz wysyła dźwięki o częstotliwości 85 kHz. Wydając ten sam dźwięk, osobnik leciał z prędkością 13 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, prostopadle do pionowej ściany jaskini. Jaką częstotliwość miała odbierana przez nietoperza fala dźwiękowa, która wróciła do niego po odbiciu? Prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu wynosi 339 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: Fala dźwiękowa, która wróciła do nietoperza, miała częstotliwość równą: $f' = f \frac{v_p + v_n}{v_p - v_n} \approx 92$ kHz, gdzie f to częstotliwość fali wysłanej przez nietoperza, v_p to prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu, v_n to prędkość nietoperza.

85 Zadanie – Odkurzacz

Natężenie fali dźwiękowej I to moc fali przypadająca na jednostkę powierzchni, przez którą przechodzi fala. Poziom natężenia dźwięku β definiujemy jako $\beta = (10\ \text{dB}) \log \frac{I}{I_0}$, gdzie I_0 to standardowe natężenie odniesienia, $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Jednostką natężenia dźwięku jest decybel. Poziom natężenia szeptu wynosi 21 dB, a odpowiadające mu natężenie I_1 jest 10000 razy mniejsze niż natężenie I_2 pracującego odkurzacza. Oblicz poziom natężenia dźwięku w decybelach pracującego odkurzacza.

Odpowiedź: Poziom natężenia pracującego odkurzacza wynosi $\beta_{odku} = (10\ \text{dB}) \log \frac{I_2}{I_0} = (10\ \text{dB}) \log \frac{10000\, I_1}{I_0} = (10\ \text{dB}) \log 10^4 + (10\ \text{dB}) \log \frac{I_1}{I_0} = 40\ \text{dB} + 21\ \text{dB} = 61\ \text{dB}$.

86 Zadanie – Fala podłużna w pręcie

Oblicz prędkość rozchodzenia się podłużnej fali w długim, metalowym pręcie. Długość fali jest znacznie większa od średnicy pręta. Gęstość metalu, z którego wykonano pręt, jest równa 8800 kg/m^3, a moduł Younga tego metalu jest równy 272 GPa. Jeśli nie pamiętasz zależności prędkości fali od modułu Younga i gęstości, to w opisanym przypadku możesz ją uzyskać, rozważając wymiary tych wielkości.

Odpowiedź: Prędkość fali jest równa $v = \sqrt{E/\rho} \approx 5560$ m/s.

87 Zadanie – Interferencja fal dźwiękowych

W jednorodnym ośrodku umieszczono dwa głośniki. Pierwszy głośnik znajduje się w odległości 11,72 m, a drugi w odległości 3,72 m od mikrofonu. Każdy z głośników oddzielnie wytwarzał w okolicy mikrofonu falę o takiej samej amplitudzie, a w obszarze między tym głośnikiem a mikrofonem zmiany ciśnienia można było w przybliżeniu opisać jako falę płaską o długości fali 200 cm. Następnie włączono oba głośniki. Drgają one w taki sam sposób, czyli w zgodnej fazie. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ, czy w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, nastąpi wzmocnienie czy osłabienie dźwięku w porównaniu z sytuacją, gdy był włączony tylko jeden z głośników.

Odpowiedź: Iloczyn wartości bezwzględnej różnicy odległości i długości fali $|d_1 - d_2|/\lambda = 4$, a więc w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, fale spotykają się w zgodnej fazie – nastąpi wzmocnienie.

88 Zadanie – Siatka dyfrakcyjna

Wiązka monochromatycznego światła oświetla siatkę dyfrakcyjną posiadającą 500 rys na jednym milimetrze. Na ekranie zaobserwowano prążek pierwszego rzędu pod kątem 16°.
a) Jaka jest długość fali światła?
b) Jaka to barwa światła?

Odpowiedź: Długość fali światła wynosi: $\lambda = \frac{\sin\alpha}{mn} \approx 551$ nm, gdzie α to kąt pod jakim obserwuje się prążek, m to liczba rys na jednym milimetrze siatki dyfrakcyjnej, n to numer rzędu. Dana długość fali odpowiada barwie zielonej.

89 Zadanie – Doświadczenie Younga

Zielone światło o długości fali 550 nm oświetla dwie bardzo wąskie szczeliny odległe o 1,1 mm. Ekran, na którym obserwujemy obraz interferencyjny, jest odległy od szczelin o 5,6 m. Ile wynosi odległość między jasnymi prążkami?

Odpowiedź: Odległość między jasnymi prążkami wynosi: $x \approx \frac{nL\lambda}{d} \approx 2{,}8$ mm, gdzie n to numer rzędu, L odległość ekranu od szczelin, λ długość fali i d odległość między szczelinami.

90 Zadanie – Czy to fala?

W otoczeniu strefy subdukcji wychylenie powierzchni Ziemi opisano następującą funkcją zależną od położenia x oraz czasu t:

$$f(x,t) = N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + \left(\frac{t}{T}\right)^2\right)$$

gdzie N, L, T są stałymi. Funkcja opisywała wychylenie dla $x \in (0, L)$ oraz $t \in (0, T)$. Sprawdź, czy ta funkcja spełnia równanie falowe, a więc czy opisywane wychylenie było falą.

Odpowiedź:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + \left(\frac{t}{T}\right)^2\right)/L^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2N\left(-2\left(\frac{t}{T}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{L} + \left(\frac{t}{T}\right)^2\right) + \cos\left(\frac{x}{L} + \left(\frac{t}{T}\right)^2\right)\right)/T^2$$

A więc $f(x,t)$ nie spełnia równania falowego, wobec czego nie opisuje fali.

91 Zadanie – Zderzenie z α

Z jądrem ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ zderza się cząstka α. Uzupełnij zapis tej reakcji, wpisując właściwe liczby lub symbole w 5 miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$$ {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{\dots}_{\dots}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{\dots}_{\dots}\dots $$

Odpowiedź:

$$ {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} $$

92 Zadanie – Procesy jądrowe

Uzupełnij zapis reakcji jądrowej, wpisując właściwe liczby lub symbole w miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{144}_{54}\mathrm{Xe} + \dots{}^{\dots}_{\dots}\dots $$

Odpowiedź:

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{144}_{54}\mathrm{Xe} + 2{}^{1}_{0}\mathrm{n} $$

93 Zadanie – Czas połowicznego rozpadu

W próbce po $900 \cdot 10^3$ latach liczba radioaktywnych jąder atomowych pewnego izotopu zmniejszyła się 64 razy. Oblicz czas połowicznego rozpadu tego izotopu.

Odpowiedź: Czas połowicznego rozpadu to około $T_{1/2} = t/n = 150 \cdot 10^3$ lat.

94 Zadanie – Wiek próbki

Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu jest równy $1{,}54 \cdot 10^6$ s. Oblicz wiek próbki, jeśli wiadomo, że 85% jąder tego izotopu w próbce już się rozpadło. Wynik podaj w tygodniach.

Odpowiedź: Najbardziej prawdopodobny wiek próbki to około $t = n\,T_{1/2} \approx 6{,}97$ tygodnia.

95 Zadanie – Datowanie geologiczne

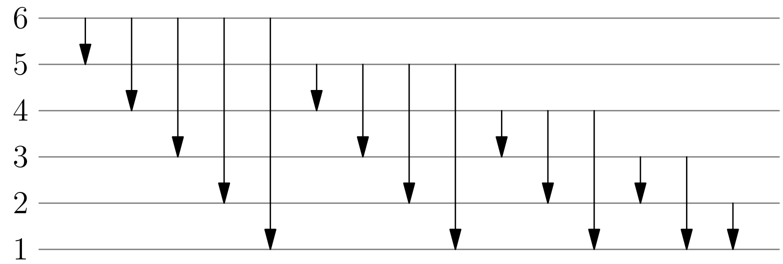
W pewnej próbce granitu znajduje się 1,24 mg argonu ${}^{40}\mathrm{Ar}$ i 1,74 mg potasu ${}^{40}\mathrm{K}$. Wyznacz wiek tej próbki. Czas połowicznego rozpadu ${}^{40}\mathrm{K}$ wynosi $1{,}25 \cdot 10^9$ lat. Wiadomo, że tylko ok. 11% rozpadających się jąder ${}^{40}\mathrm{K}$ zmienia się w jądra ${}^{40}\mathrm{Ar}$. Przyjmij, że wszystkie jądra ${}^{40}\mathrm{Ar}$ w próbce powstały z rozpadu ${}^{40}\mathrm{K}$ i że poza tym rozpadem inne procesy nie wpływały na zmianę składu tych dwóch pierwiastków w próbce granitu.

Odpowiedź: Najbardziej prawdopodobny wiek próbki $t = n \cdot T_{1/2} \approx 3{,}63 \cdot 10^9$ lat.

96 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 6$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej n (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

Odpowiedź:
a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



b) Można zaobserwować 15 linii.
c) Przejście z poziomu 6 na poziom 5.

97 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej l i magnetycznej m określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 4$.

Odpowiedź: Możliwe stany to:
$l = 0$ z $m \in \{0\}$
$l = 1$ z $m \in \{-1, 0, 1\}$
$l = 2$ z $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$l = 3$ z $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

98 Zadanie – Liczba fotonów

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 770 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 65% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 37 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s.

Odpowiedź: Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\text{abs}}/(\varepsilon_{\text{eff}} E_\gamma) \approx 2210 \cdot 10^{14}$.

99 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 210 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 1,18 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s = $4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

Odpowiedź: Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 4{,}73$ eV.

100 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa na środku studni

Cząstka jest uwięziona w jednowymiarowej, nieskończenie głębokiej studni potencjału. Studnia ma szerokość L. Położenie cząstki opisujemy zmienną $x \in [0, L]$. Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia tej cząstki na środku studni, czyli dla $x = L/2$. Kwantowa funkcja falowa opisująca cząstkę jest równa

$$\Psi(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

gdzie $n = 7$, $L = 38 \cdot 10^{-10}$ m. Wynik podaj w jednostkach nm^{-1}.

Odpowiedź:

$$|\Psi|^2 = \frac{2}{L} \approx 0{,}526 \text{ nm}^{-1}$$

101 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Dla każdego ze stanów opisanych następującymi funkcjami falowymi oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru:
a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi} a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm^{-3}. Funkcje falowe określone są w układzie kartezjańskim XYZ, jądro spoczywa w środku tego układu, a r jest odległością od środka układu do punktu (x, y, z).

Odpowiedź:
a)

$$|\Psi_{100}(0{,}0{,}0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0{,}0{,}0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

102 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną x. Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \exp(-x/L) \cdot \sin\left(2\pi\frac{x}{L} + \frac{\pi}{4}\right)$$

gdzie N oraz $L = 8$ nm są stałymi. Zmienna x przyjmuje wartości od 0 do $\frac{3}{2}L$. Wypisz wszystkie wartości x w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np. $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.

Odpowiedź: Wartości x, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: $3L/8$, $7L/8$, $11L/8$, a więc 3 nm, 7 nm, 11 nm.

103 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

Cząstka o masie m jest uwięziona w sześcianie o krawędzi L. Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.
a) Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.
b) Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
c) Dla cząstki znajdującej się w stanie opisywanym funkcją falową

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} \sin(kx)\left(1 - 4\sqrt{2}\cos(kx)e^{-i3\omega t}\right)\sin(ky)\sin(kz)e^{-i3\omega t}$$

gdzie $k \equiv \frac{\pi}{L}$ oraz $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$, wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

d) Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

Wskazówka. Dla dodatnich liczb całkowitych p i r

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{pr}$$

Odpowiedź: a) Dla dodatnich liczb całkowitych n_x, n_y, n_z unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t)\,\psi_{n_y}(y,t)\,\psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n_x kx)e^{-in_x^2\omega t}$$

b) Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

c) Możliwe mierzone wartości energii dla stanu Ψ_s to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów Ψ_{111} oraz Ψ_{211}.
d) Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii $6\hbar\omega$ jest równe $\frac{8}{9} \approx 0{,}889$.

104 Zadanie – Jednostki masy

Przelicz kilogramy na gramy:
5 kg to .... g
64 kg to .... g

Przelicz tony na kilogramy:
3 t to .... kg
1001000 t to .... kg

Przelicz gramy na dekagramy:
170 g to .... dag
2005 g to .... dag

Odpowiedź:
Kilogramy na gramy:
5000 g
64000 g

Tony na kilogramy:
3000 kg
1001000000 kg

Gramy na dekagramy:
17 dag
200,5 dag

105 Zadanie – Gęstość

Pytanie 1. Jaką masę ma sześcienny klocek o krawędzi 4 cm, jeśli gęstość materiału, z którego został wykonany, wynosi 9 g/cm^3?
Pytanie 2. Jaką gęstość ma kula o objętości 1 litra, jeśli jej masa to 4 kg?
Pytanie 3. Jaką objętość musi mieć klocek wykonany z materiału o gęstości 25 kg/m^3, który ma masę 75 kg?

Odpowiedź: Sześcienny klocek o krawędzi 4 cm i gęstości 9 g/cm^3 ma masę 576 g.
Gęstość kuli o masie 4 kg i objętości 1 litra wynosi 4 kg/dm^3.
Objętość klocka wykonanego z materiału o gęstości 25 kg/m^3, który ma masę 75 kg wynosi 3 m^3.

106 Zadanie – Gęstość na Marsie

Gęstość pewnej skały na powierzchni Marsa to 3,29 g/cm^3. Łazik marsjański pobrał próbkę tej skały o objętości 14 cm^3. Jaką masę miała pobrana próbka skały?

Odpowiedź: Masa próbki to 46,06 g.

107 Zadanie – Gęstość zaludnienia

Na pewnej planecie są trzy kontynenty, każdy w kształcie innej figury geometrycznej.
Pierwszy kontynent jest w kształcie kwadratu o boku 2000 km. Mieszka tu 40000000 osób.
Drugi kontynent to prostokąt o bokach 4000 km i 7000 km. Mieszka tu 196000000 osób.
Trzeci kontynent to trapez o wysokości 1000 km i podstawach o długości 400 km i 200 km. Mieszka na nim 1800000 osób.
Oblicz gęstość zaludnienia na każdym z kontynentów.

Odpowiedź: Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 10 osób na km^2.
Gęstość zaludnienia na prostokątnym kontynencie to 7 osób na km^2.
Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 6 osób na km^2.

108 Zadanie – Rura z przewężeniem

Całym wnętrzem poziomo umieszczonej rury płynie woda. Rura posiada przewężenie, przez które woda przepływa z szybkością 62 cm/s. Przed przewężeniem woda płynie z szybkością 49 cm/s. Pomiń efekty związane z lepkością i ściśliwością. Przepływ jest laminarny. Gęstość wody jest równa 1000 kg/m^3.
a) Oblicz zmianę ciśnienia między dwoma punktami znajdującymi się na osi rury, z czego pierwszy punkt znajduje się przed przewężeniem, a drugi w przewężeniu.
b) Napisz, w którym z punktów ciśnienie jest większe.

Odpowiedź:
a) Zmiana ciśnienia $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) \approx -72{,}2$ Pa.
b) Ciśnienie jest większe przed przewężeniem.

109 Zadanie – Startujący samolot

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyśpieszeniem 5,71 m/s^2. Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 9 s?

Odpowiedź: 51,39 m/s

110 Zadanie – W ile sekund do setki?

Samochód, ruszając z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej, osiągnął po pierwszej sekundzie ruchu szybkość 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę przebędzie ten samochód w drugiej sekundzie ruchu, a jaką w piątej? Ile czasu potrzebuje ten samochód, aby rozpędzić się do 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Odpowiedź: W drugiej sekundzie ruchu samochód przejechał około 6,67 m, a w piątej 20 m. Natomiast do setki samochód rozpędzi się w 6,25 s.

111 Zadanie – Kolumna wojskowa

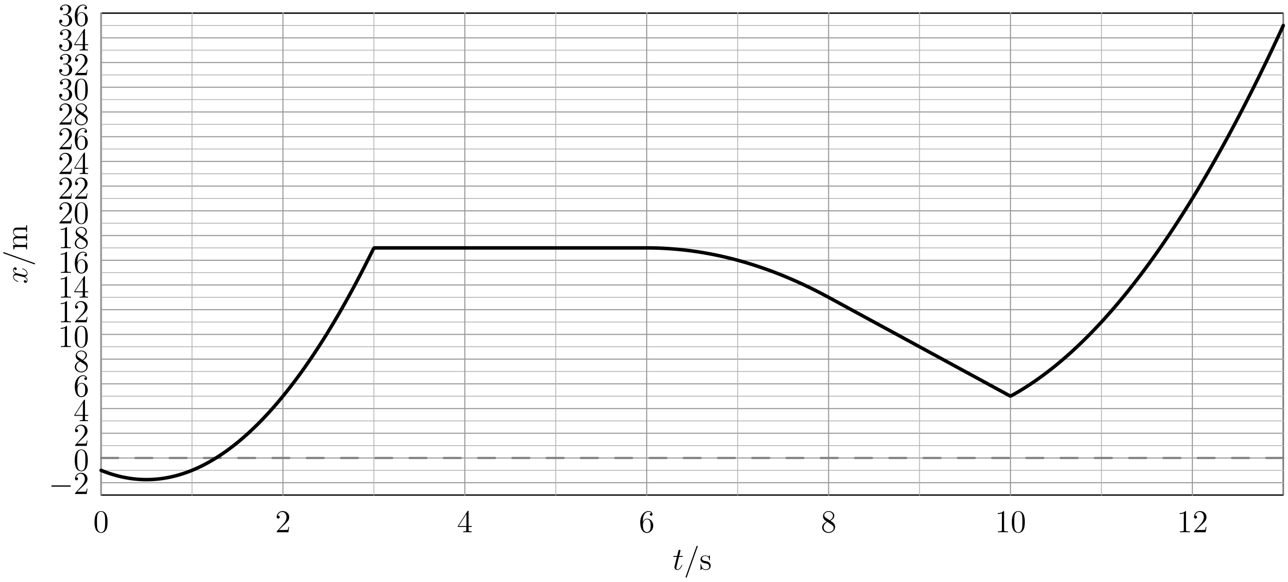
Piesza kolumna wojskowa o długości 9 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 4 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 2 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny

wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 26 km/h.
a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?
b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.
Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

Odpowiedź:
a) Wykonanie zadania zajmie mu $t = l(\frac{1}{V_2-V_1} + \frac{1}{V_2+V_1}) + t_1 \approx 44{,}5$ min, gdzie l to długość kolumny wojskowej, V_1 to szybkość kolumny, t_1 to czas przekazywania informacji, a V_2 to szybkość żołnierza na rowerze.
b) W tym czasie pokona on drogę $s = lV_2(\frac{1}{V_2-V_1} + \frac{1}{V_1+V_2}) + t_1V_1 \approx 18{,}6$ km.

112 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

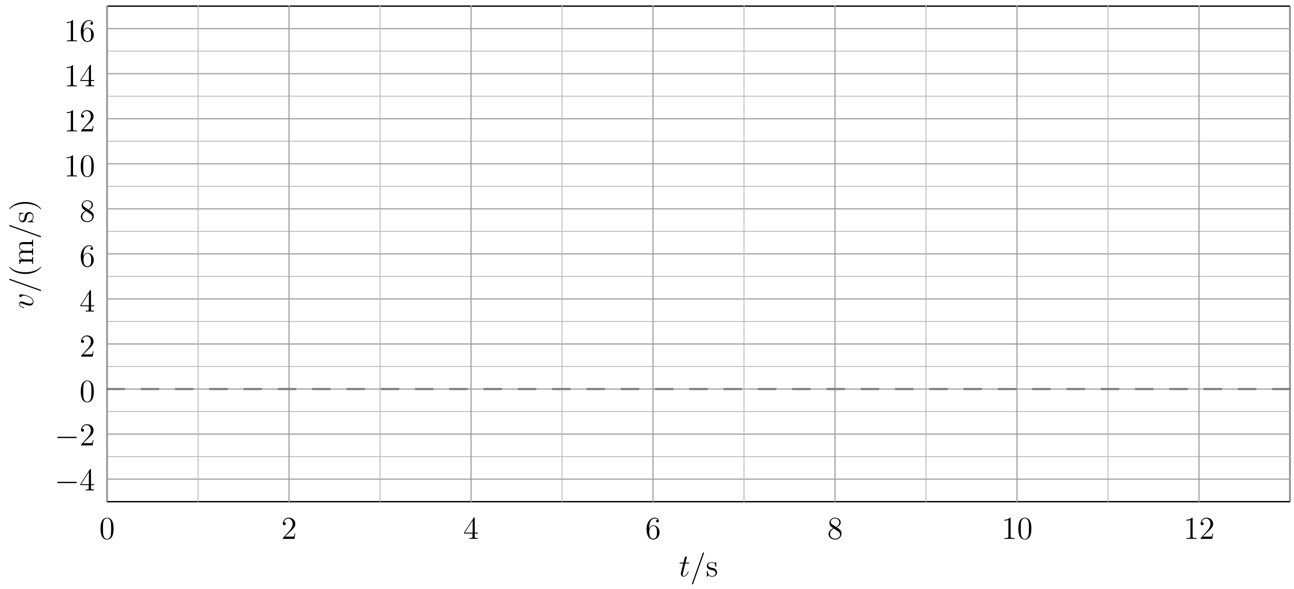
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



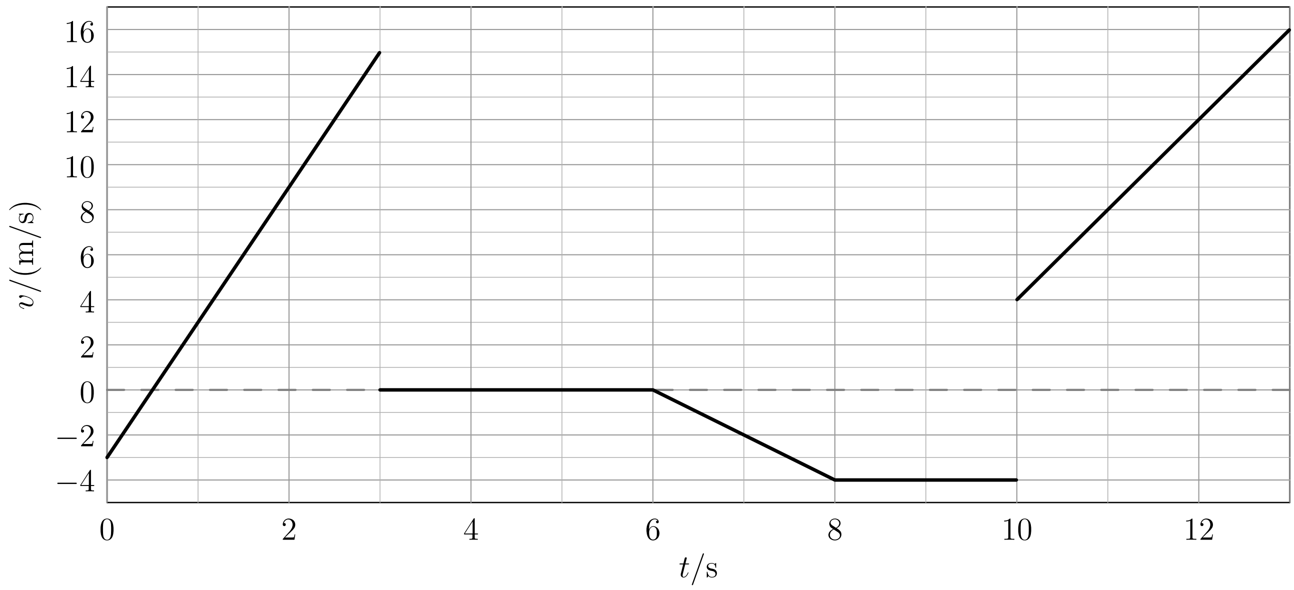
W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,3[$	$]3,6[$	$]6,8[$	$]8,10[$	$]10,13]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	6	0	−2	0	4

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0,13]$ s.



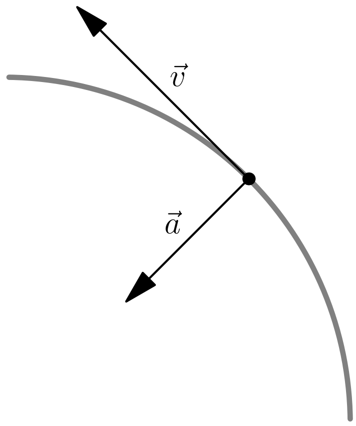
Odpowiedź: Poprawny wykres:



113 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 45 m ze stałą wartością prędkości 48,6 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

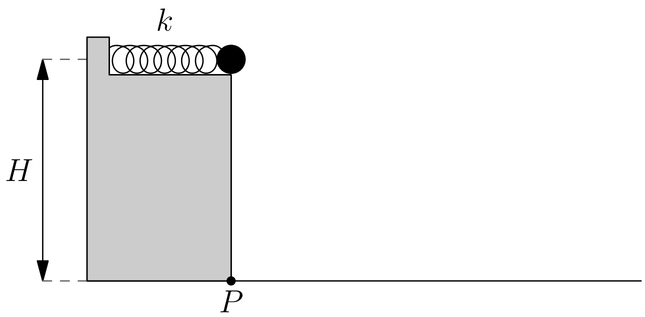
Odpowiedź: a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.



b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 4,05 m/s^2.

114 Zadanie – Rzut poziomy

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 10$ N/m, ściśnięto o 10 cm, naciskając ją kulką o masie równej 160 g. Jaka będzie odległość kulki od punktu P do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości $H = 3{,}7$ m nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominąć. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



Odpowiedź: Zasięg rzutu kulki o masie m wyniesie $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 68{,}7$ cm, gdzie x to ściśnięcie sprężyny.

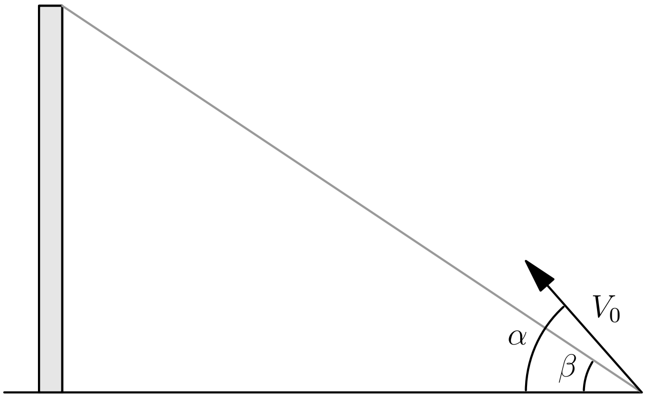
115 Zadanie – Strzelec

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 150 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 920 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Odpowiedź: Pocisk opadł o około 13 cm.

116 Zadanie – Rzut ukośny

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 65°$ do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 12 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem $\beta = 45°$ względem powierzchni ziemi. Jaką wartość prędkości V_0 powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.



Odpowiedź: Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan\alpha - \tan\beta)\cos^2\alpha\tan\beta}} \approx 17 \text{ m/s},$$

gdzie y to wysokość słupa.

117 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

Odpowiedź:
I sposób – graniczna wartość v.
Minimalna wartość prędkości v_m spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l - y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l - y) + y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l - y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości v_m, gdyż dla większych wartości prędkości v parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości v_m. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.
II sposób – równanie na y.
Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l - y)$. Z równania okręgu, $A(l - y) + y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l - y)(l + y - A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0, l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A - l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości y dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l, l]$. Stąd $A \in [0, 2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

III sposób – równanie na x.
Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$, istnieje, jeśli $2lB - 1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

118 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 1{,}3$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + B\,t^2$$

gdzie $A = 2{,}4$ m, $\omega = 1{,}6\ \mathrm{s}^{-1}$, $\phi = 1{,}4$ oraz $B = 1{,}4\ \mathrm{m/s^2}$.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\omega\cos(\omega t + \phi) + 2B\,t$$

$$v(t_1) \approx 0{,}018\ \mathrm{m/s}$$

$$a(t) = -A\,\omega^2\sin(\omega t + \phi) + 2B$$

$$a(t_1) \approx 4{,}84\ \mathrm{m/s^2}$$

119 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 2D

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} A\cos(\omega t) \\ B\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

A	B	ω
2 m	5 m	4 s^{-1}

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 6$ s.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 7{,}25 \\ 8{,}48 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} -13{,}6 \\ 72{,}4 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

120 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
$-2\ \mathrm{m/s^2}$	$-4\ \mathrm{m/s}$	$16\ \mathrm{m}$	$-5\ \mathrm{m/s}$	$-20\ \mathrm{m}$	$-2\ \mathrm{m/s^3}$	$4\ \mathrm{m/s^2}$	$-5\ \mathrm{m/s}$

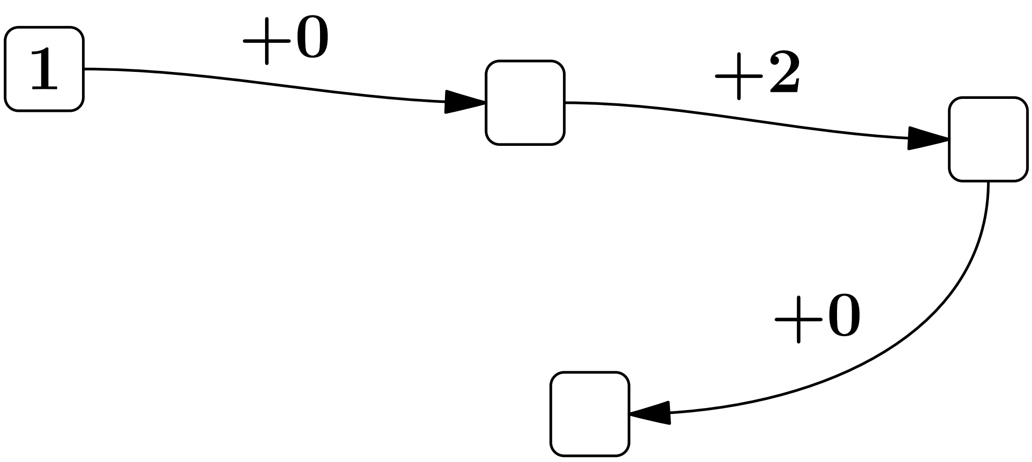
Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 5$ s.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

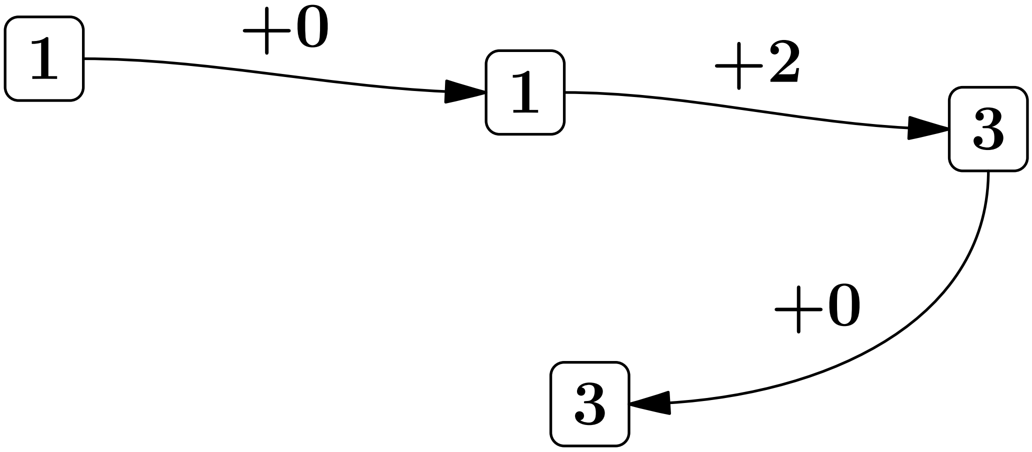
$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} -24 \\ -5 \\ -115 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -52 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

121 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie, 0–10

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

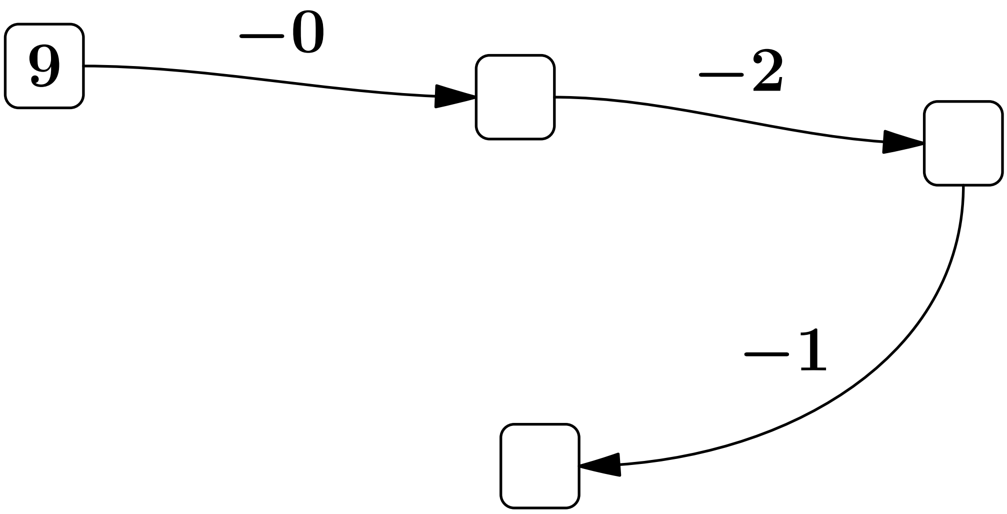


Odpowiedź:

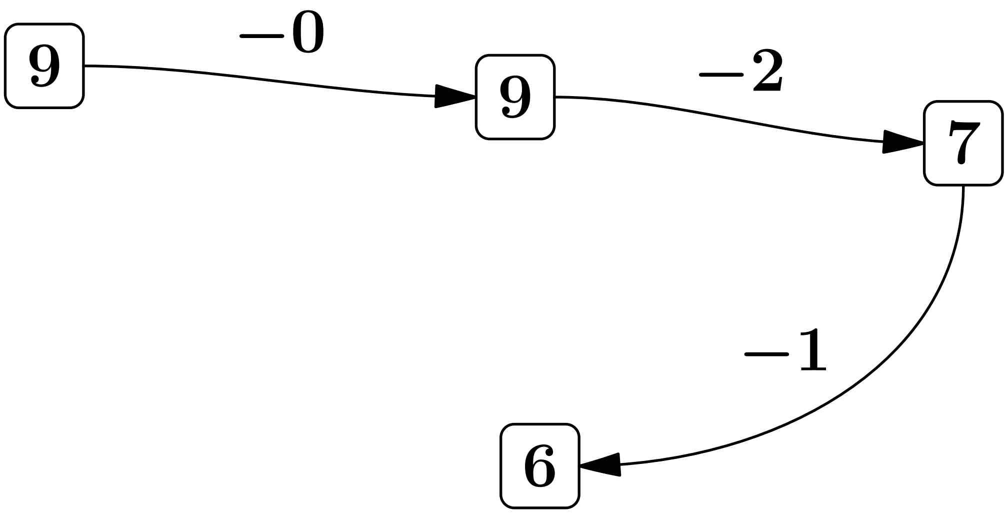


122 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie, 0–10

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

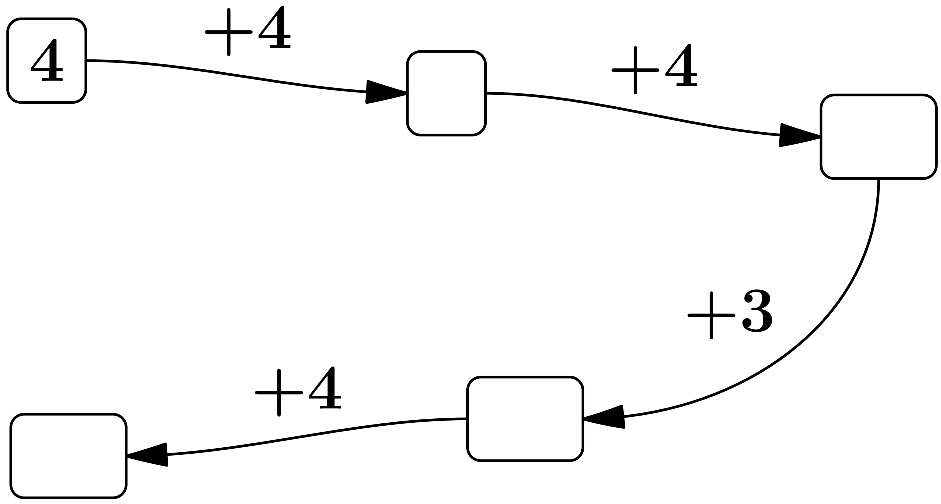


Odpowiedź:

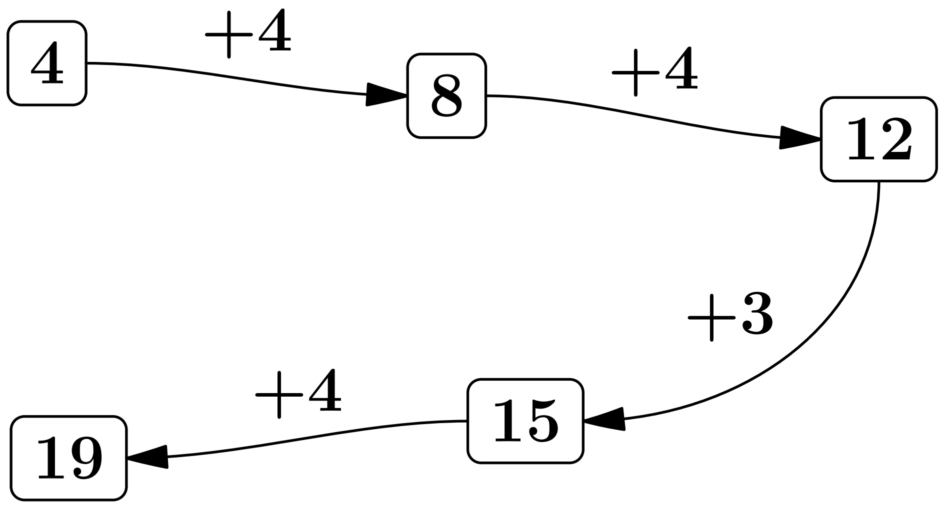


123 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 0–4, 0–20

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

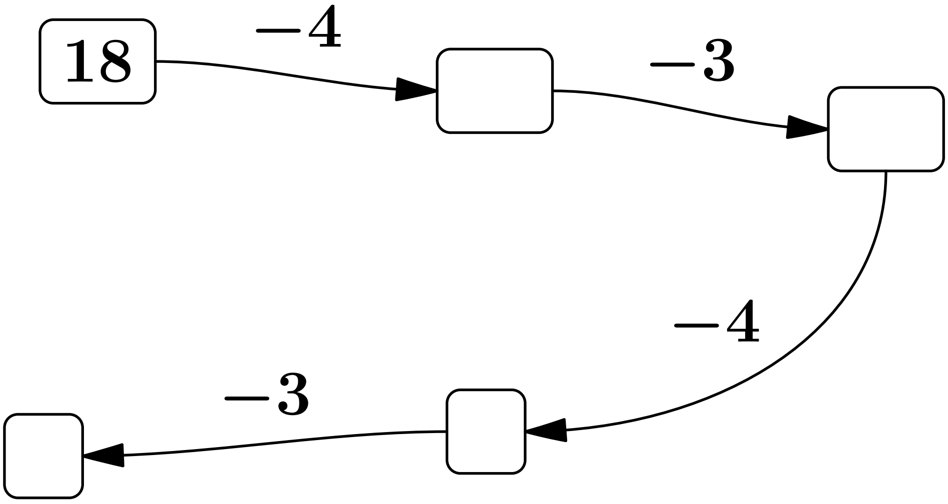


Odpowiedź:

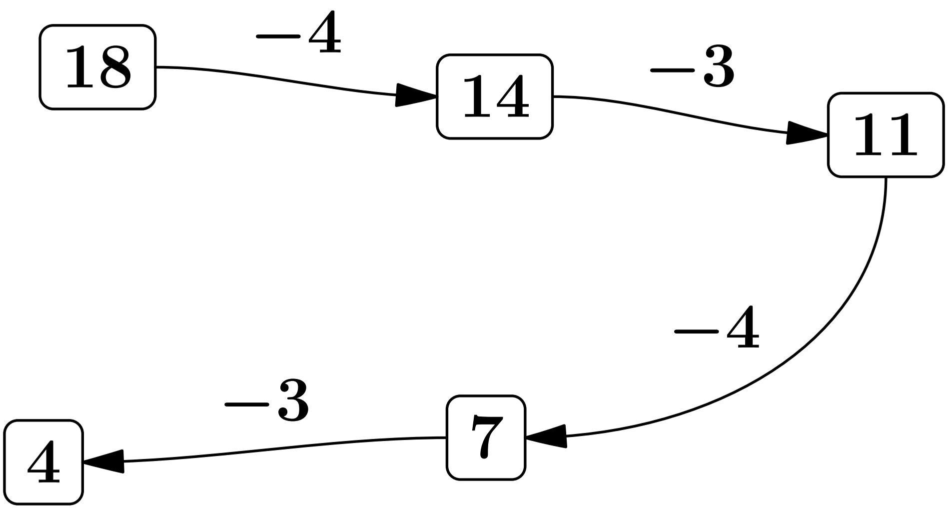


124 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 0–4, 0–20

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

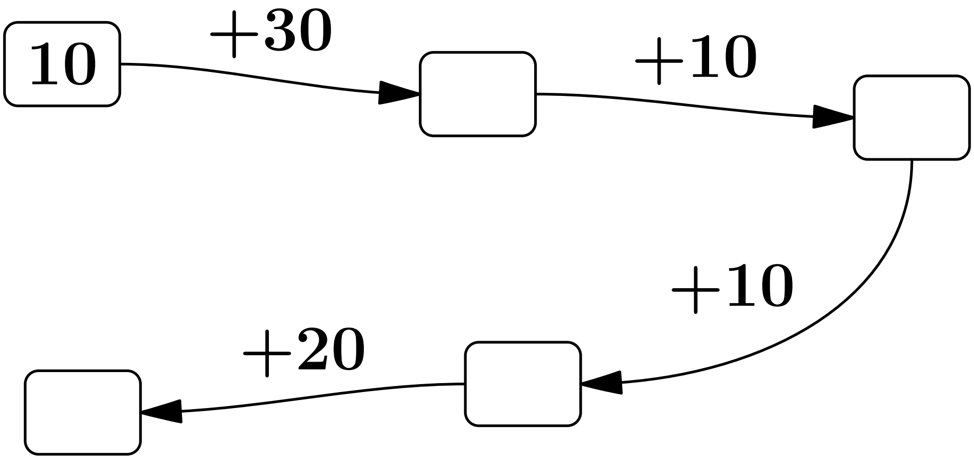


Odpowiedź:

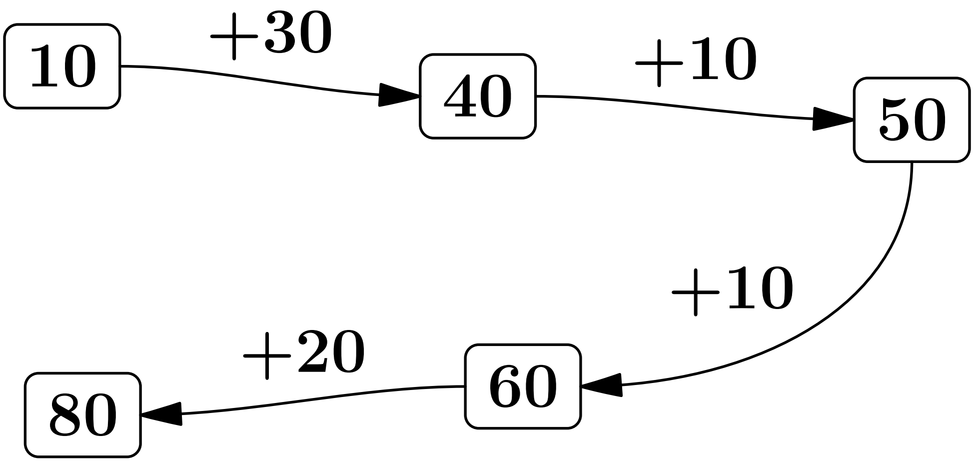


125 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie wielokrotności 10, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

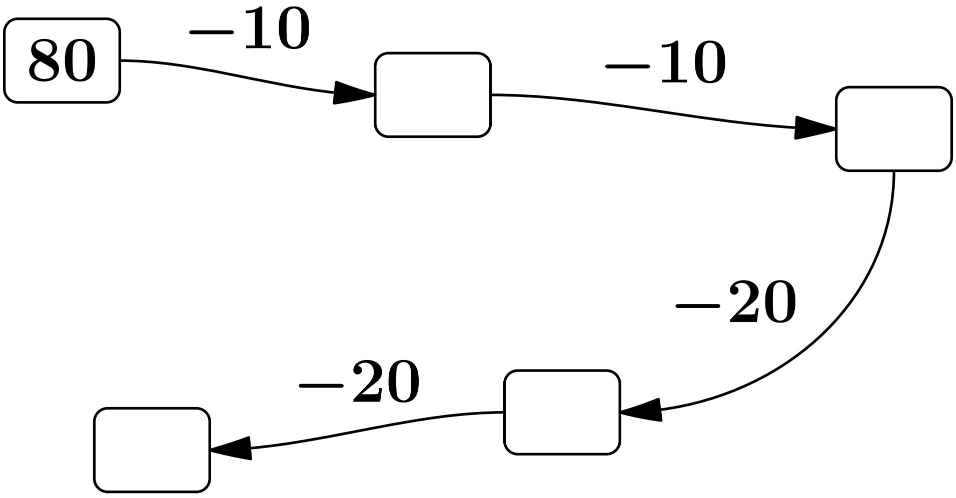


Odpowiedź:

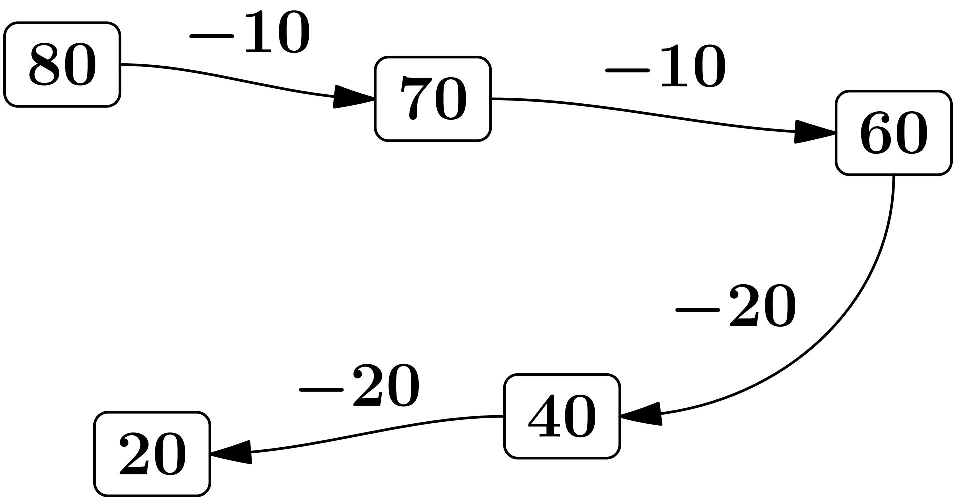


126 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie wielokrotności 10, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

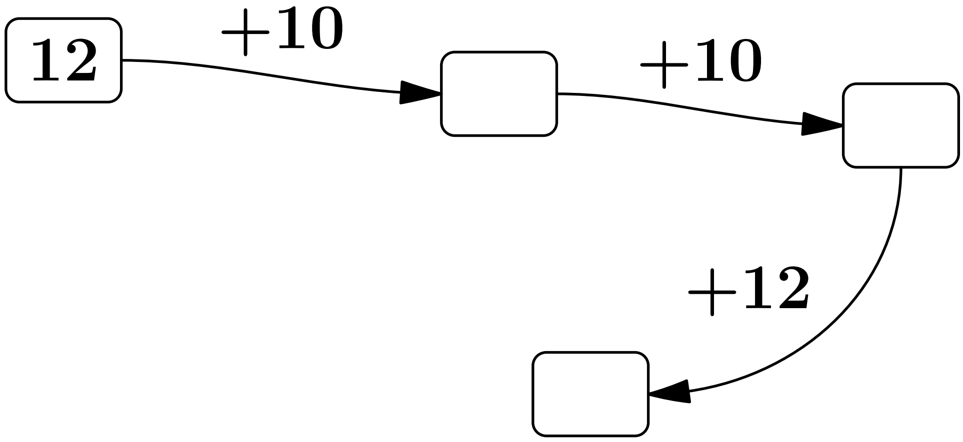


Odpowiedź:

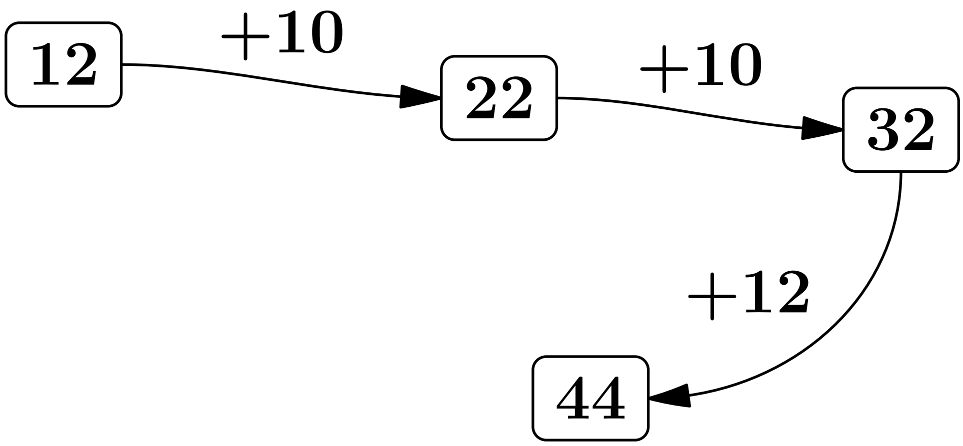


127 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–12, 0–45

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

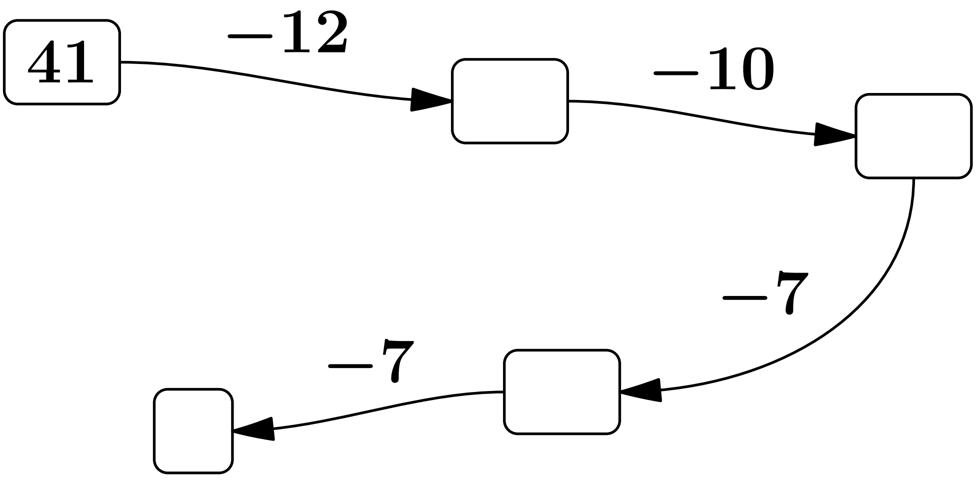


Odpowiedź:

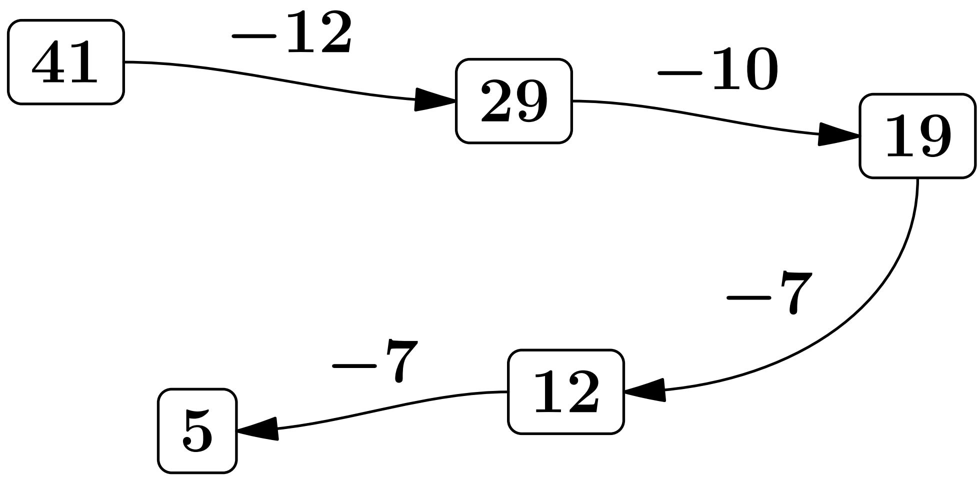


128 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–12, 0–45

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

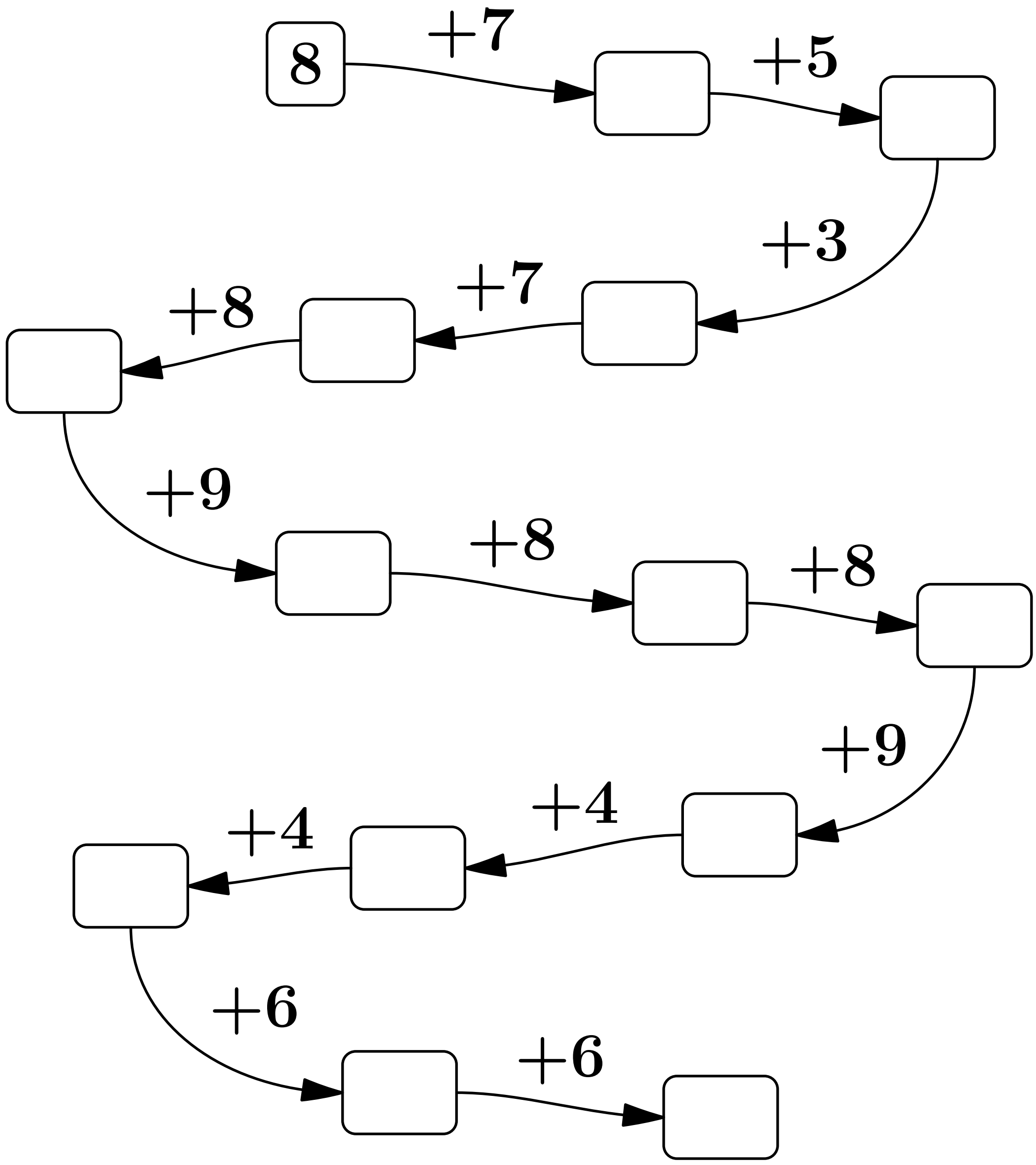


Odpowiedź:

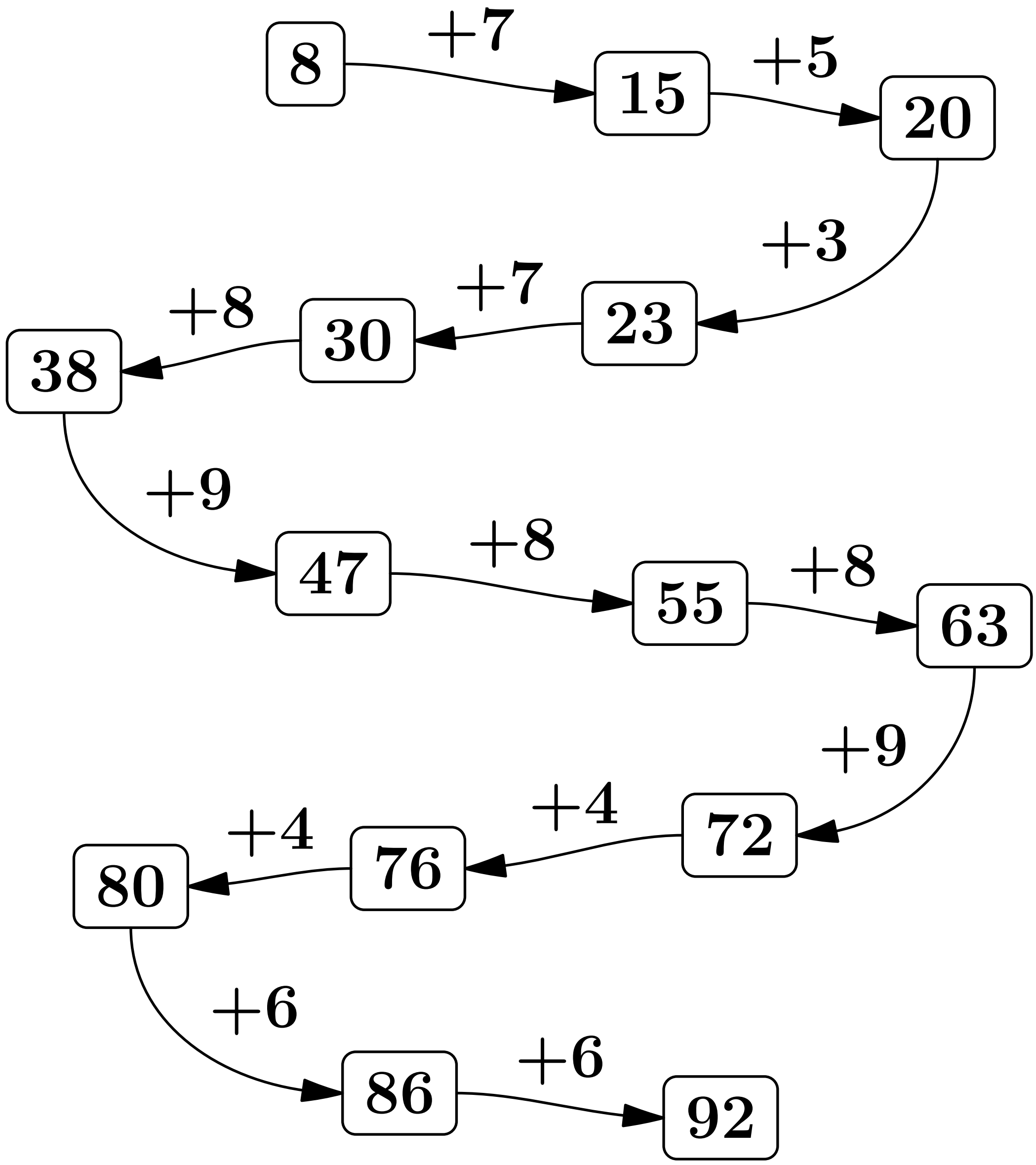


129 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 2–9, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

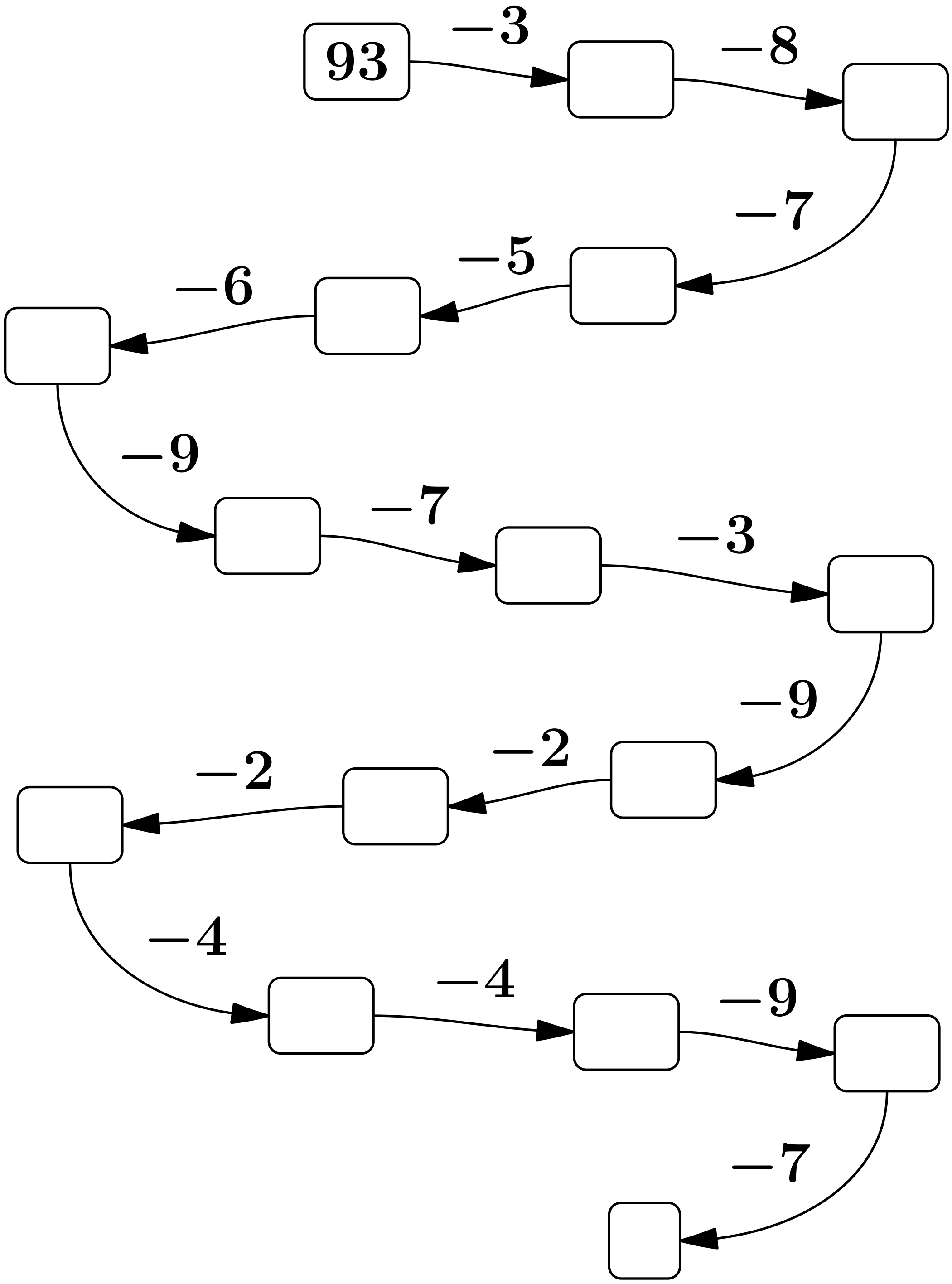


Odpowiedź:

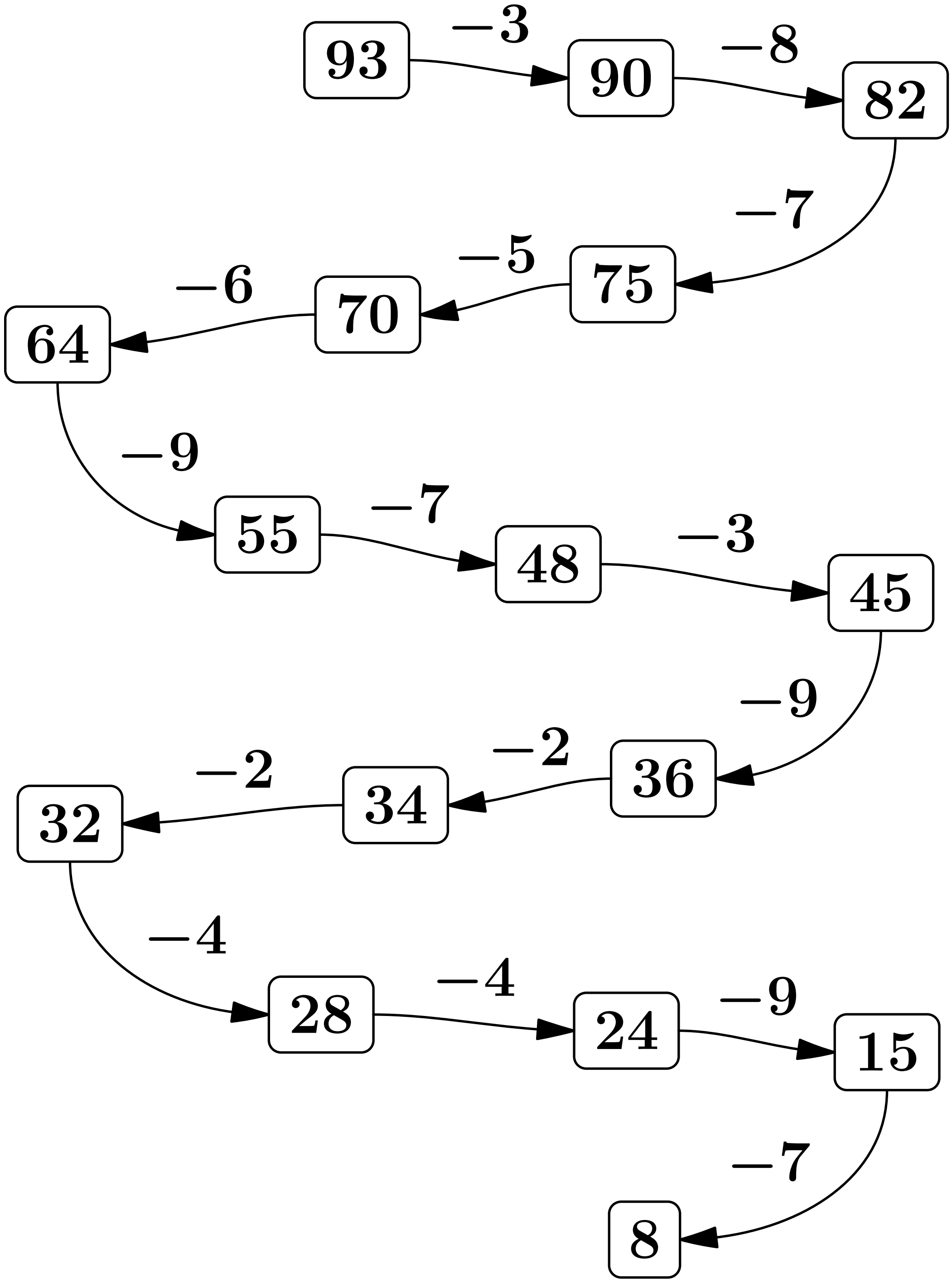

8
+7
15
+5
20
+3
23
+7
30
+8
38
+9
47
+8
55
+8
63
+9
72
+4
76
+4
80
+6
86
+6
92

130 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 2–9, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

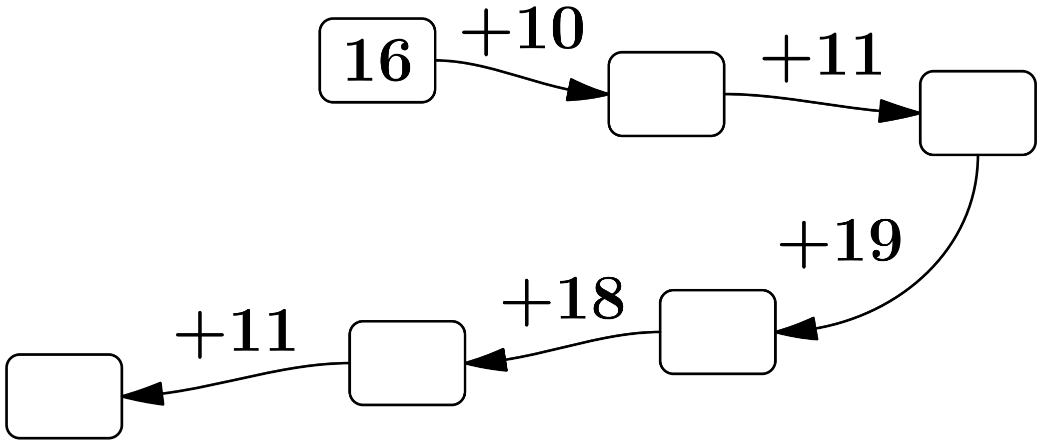


Odpowiedź:

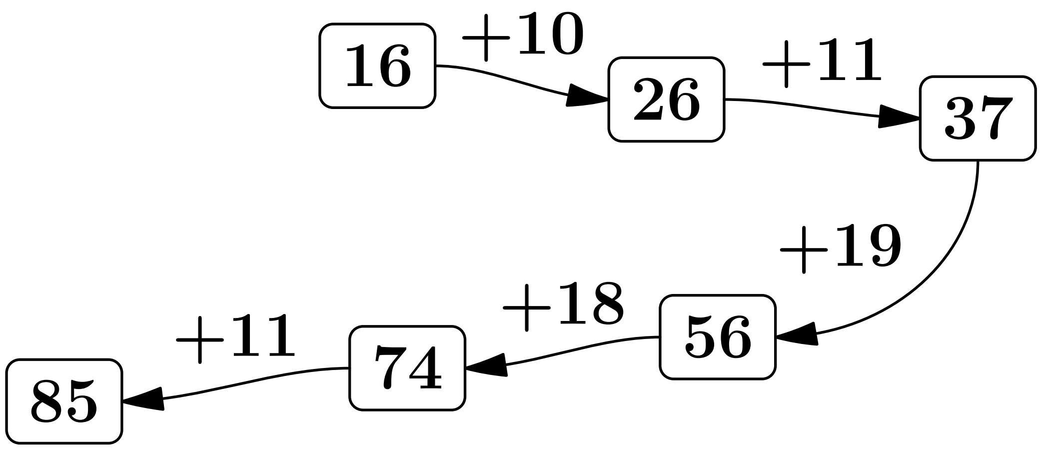

93
−3
90
−8
82
−7
75
−5
70
−6
64
−9
55
−7
48
−3
45
−9
36
−2
34
−2
32
−4
28
−4
24
−9
15
−7
8

131 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–20, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

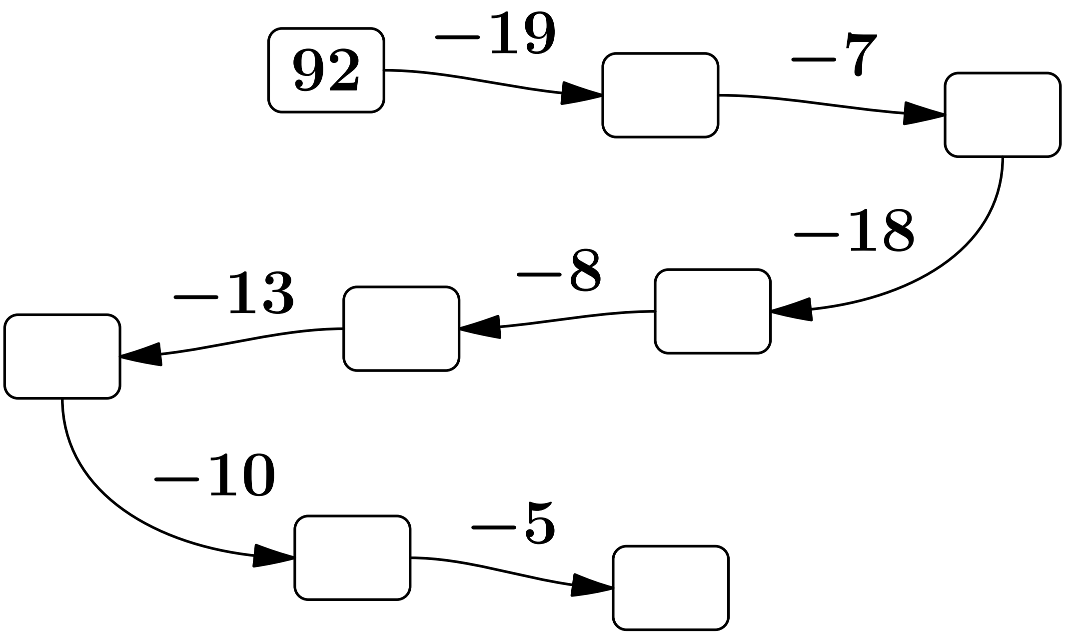


Odpowiedź:

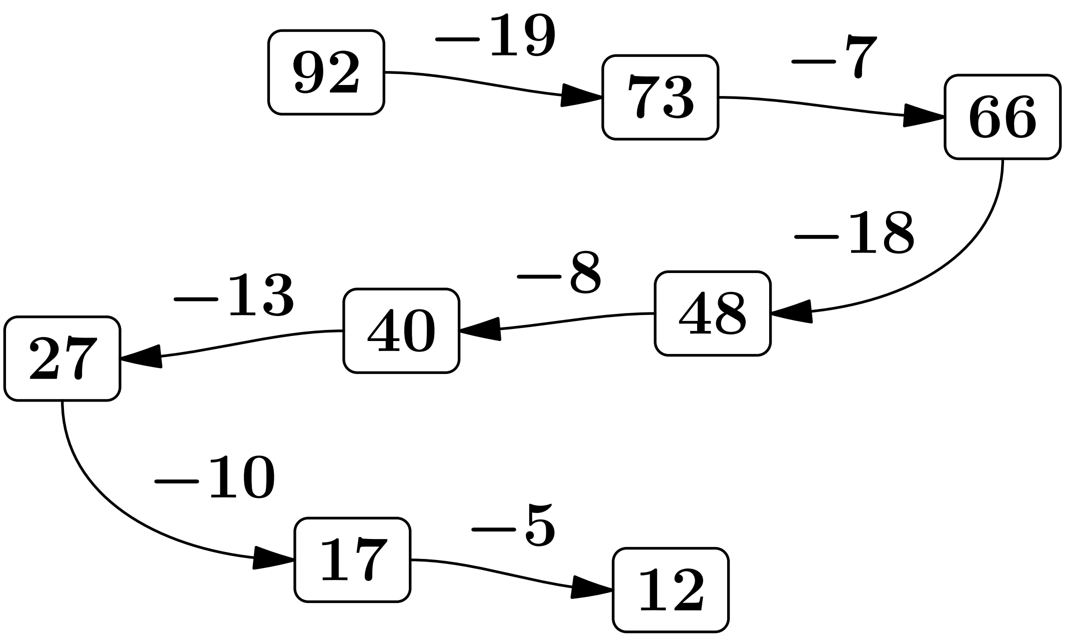


132 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–20, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



Odpowiedź:



133 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 1–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

	8		2	
		1		

Odpowiedź:

		10		
	8		2	
7		1		1

134 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 1–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

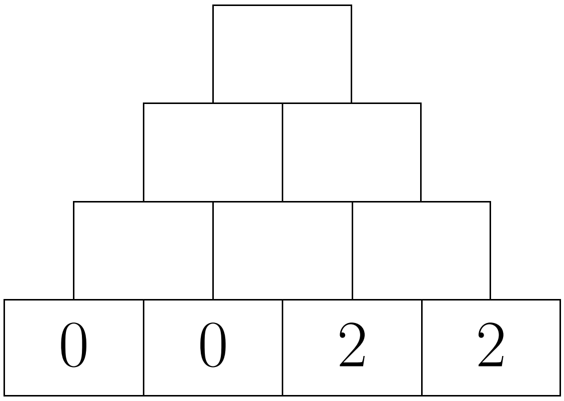
	6			
		4		2

Odpowiedź:

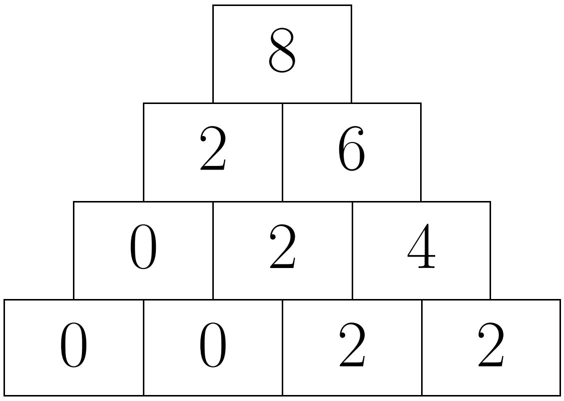
		4		
	6		2	
10		4		2

135 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



Odpowiedź:



136 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">3</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Odpowiedź:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

137 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

	7				3	
		2		2		

Odpowiedź:

			18			
		11		7		
	7		4		3	
5		2		2		1

138 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

	8		3			
20						9

Odpowiedź:

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">2</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">20</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">9</td></tr>
</table>

139 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

<table>
<tr><td colspan="5"></td><td colspan="2"></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">22</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">11</td></tr>
</table>

Odpowiedź:

<table>
<tr><td colspan="5"></td><td colspan="2">98</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="2">57</td><td colspan="2">41</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">39</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2">23</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">29</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">15</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">24</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">12</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">22</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">11</td></tr>
</table>

140 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

49				
97		28	20	19

Odpowiedź:

12				
17	5			
29	12	7		
49	20	8	1	
97	48	28	20	19

141 Zadanie – Dodawanie pisemne, 35

Oblicz poniższe sumy.

a)

	1	7
+		7

b)

	1	7
+	1	6

Odpowiedź:

a)

	1	7
+		7
	2	4

b)

	1	7
+	1	6
	3	3

142 Zadanie – Dodawanie pisemne, 55

Oblicz poniższe sumy.

a)

	2	8
+	1	8

b)

	3	3
+	2	1

Odpowiedź:

a)

	2	8
+	1	8
	4	6

b)

	3	3
+	2	1
	5	4

143 Zadanie – Dodawanie pisemne, 100

Oblicz poniższe sumy.

a)

	5	6
+	3	2

b)

	5	6
+	4	0

Odpowiedź:

a)

	5	6
+	3	2
	8	8

b)

	5	6
+	4	0
	9	6

144 Zadanie – Dodawanie pisemne, 150

Oblicz poniższe sumy.

a)

	4	7
+	7	0

b)

	8	9
+	5	4

Odpowiedź:

a)

	4	7
+	7	0
1	1	7

b)

	8	9
+	5	4
1	4	3

145 Zadanie – Dodawanie pisemne, 1500

Oblicz poniższe sumy.

a)

	5	2	3
+	4	4	1

b)

	7	9	3
+	7	0	4

Odpowiedź:

a)

	5	2	3
+	4	4	1
	9	6	4

b)

	7	9	3
+	7	0	4
1	4	9	7

146 Zadanie – Liczba stron

Wanda rozpoczęła czytanie książki od początku 16 strony, a po dwóch godzinach skończyła czytać na końcu 83 strony.
a) Ile stron przeczytała Wanda?
b) Ile średnio stron czytała Wanda przez jedną godzinę?

Odpowiedź: Wanda przeczytała 68 stron, a czytała średnio 34 strony na godzinę.

147 Zadanie – Śliwki

Jaś miał 15 śliwek. Następnie zjadł jedną trzecią śliwek. Ile śliwek zostało Jasiowi?

Odpowiedź: Jasiowi zostało 10 śliwek.

148 Zadanie – Jabłka

Jaś policzył posiadane przez Maćka jabłka – było ich 30 – a następnie wziął połowę posiadanych przez Maćka jabłek i dodał je do swoich zapasów jabłek. Wtedy okazało się, że Jaś posiada 6 razy tyle jabłek, co Maciek. Ile jabłek posiadają razem Jaś i Maciek?

Odpowiedź: Jaś i Maciek mają razem 105 jabłek.

149 Zadanie – Kamyki

Daria i Nela zebrały na plaży kamyki. Jeśli Daria dałaby Neli 8 kamyków, to miałyby po tyle samo kamyków. A jeśli Nela dałaby Darii 5 kamyków, to Daria miałaby 3 razy tyle kamyków, co Nela. Ile kamyków ma każda z dziewczynek?

Odpowiedź: Daria miała 34 kamyki, a Nela 18 kamyków.

150 Zadanie – Działania na liczbach ujemnych

Oblicz:
a) $-2 + (-36) =$
b) $-3 - (-118) =$
c) $38 + (-31) =$
d) $-29 - 8 + 11 =$

Odpowiedź:
a) -38
b) 115
c) 7
d) -26

151 Zadanie – Winda

W wysokim bloku z wielopoziomowym parkingiem podziemnym jest winda, która porusza się między piętrami. Winda ruszyła z parteru (piętro 0) 12 pięter do góry, a następnie 8 pięter w dół. Po chwili zjechała 5 pięter w dół, a następnie pojechała 16 pięter w górę. Na którym piętrze jest teraz winda, jeśli przed chwilą zjechała 8 pięter w dół?

Odpowiedź: Winda znajduje się na 7 piętrze.

152 Zadanie – Ślimak

Ślimak, aby wspiąć się na szczyt wieży, musi jeszcze przebyć w pionie odległość 2880 cm. Za każdym razem przez 6 godz. ślimak sunie do góry, a następnie odpoczywa przez 3 godz. Wspinając się pokonuje 20 mm na minutę w górę muru, a odpoczywając zsuwa się o 10 mm na minutę w dół. Po ilu godzinach ślimak dotrze na szczyt wieży, jeśli właśnie zaczął się wspinać?

Odpowiedź: Ślimak dotrze na szczyt wieży po 42 godz.

153 Zadanie – Rodzaje magnetyków

Zaobserwowano, że próbka materiału umieszczona w pobliżu cewki, przez którą płynął prąd elektryczny, była przyciągana do cewki. Po wyłączeniu prądu płynącego przez cewkę magnetyzacja próbki zmniejszyła się do zera. Podkreśl nazwę opisującą rodzaj magnetyka, z którego wykonana jest próbka: diamagnetyk, paramagnetyk.

Odpowiedź: Próbkę wykonano z paramagnetyka.

154 Zadanie – Jednostki objętości

Przelicz m^3 na km^3:
80000000 m^3 to .... km^3
1400000 m^3 to .... km^3

Przelicz m^3 na cm^3:
3 m^3 to .... cm^3
19 m^3 to .... cm^3

Przelicz mm^3 na cm^3:
29000 mm^3 to .... cm^3
300200 mm^3 to .... cm^3

Odpowiedź:
m^3 na km^3:
0,08 km^3
0,0014 km^3

m^3 na cm^3:
3000000 cm^3
19000000 cm^3

mm^3 na cm^3:
29 cm^3
300,2 cm^3

155 Zadanie – Rozładowanie akumulatora

Przez 17 godzin rozładowywano akumulator, mierząc płynący prąd amperomierzem. Średnie natężenie prądu podczas rozładowania było równe 22 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez amperomierz. Wynik podaj w kulombach.

Odpowiedź: Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 1350$ C.

156 Zadanie – Alarm samochodowy

Przez pewien alarm samochodowy w trybie czuwania przepływa prąd o średnim natężeniu 40 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez ten układ w trakcie 18 dób. Wynik podaj w kulombach i amperogodzinach.

Odpowiedź: Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 17{,}3$ Ah ≈ 62200 C.

157 Zadanie – Opornik

Gdy przez opornik płynął stały prąd o natężeniu 20 mA, napięcie mierzone między końcówkami opornika było równe 1,28 V.
a) Oblicz opór opornika.
b) Zakładając, że opornik spełnia prawo Ohma, oblicz natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy napięcie mierzone między jego końcówkami jest równe 5,12 V.

Odpowiedź:
a) Opór $R = U_1/I_1 = 64\ \Omega$.
b) Natężenie prądu $I_2 = U_2/R = I_1U_2/U_1 = 80$ mA.

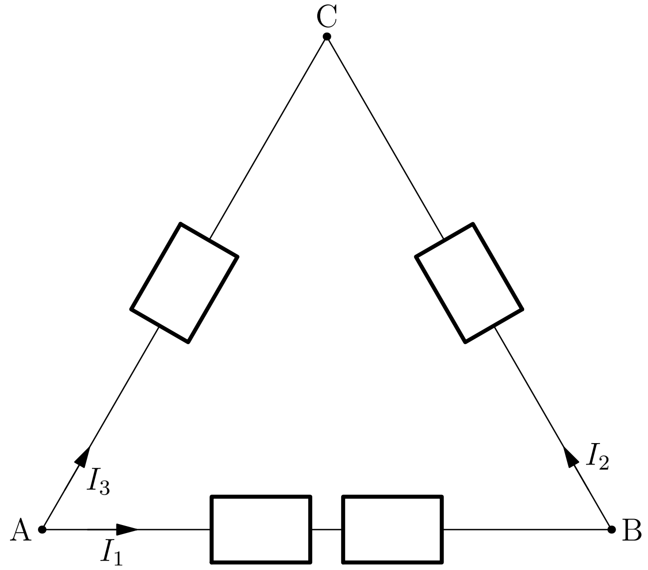
158 Zadanie – Opór zastępczy

Cztery oporniki o takich samych oporach $R = 8\ \Omega$ połączono w sposób przedstawiony na rysunku. Napięcie U między punktami A i C wynosi 2 V.

a) Oblicz opór zastępczy między zaciskami A i C.

b) Oblicz natężenia prądów I_1, I_2 i I_3 zaznaczonych na rysunku.

c) Oblicz spadek napięcia między punktami B i C.



Odpowiedź:

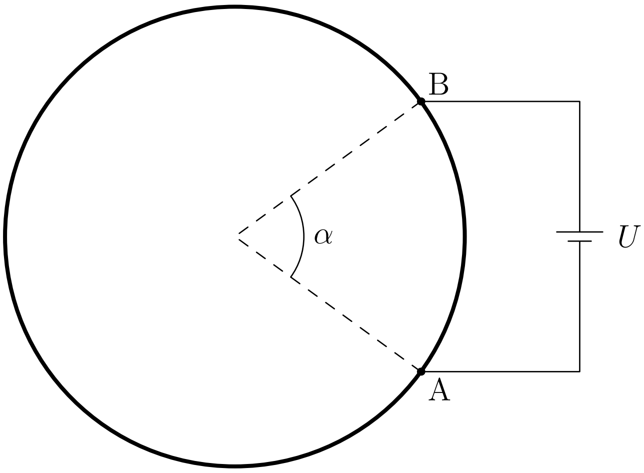
a) Opór zastępczy takiego ukladu wynosi 6 Ω.

b) Natężenia poszczególnych prądów wynoszą $I_1 = I_2 = 83{,}3$ mA, a $I_3 = 250$ mA.

c) Spadek napięcia między punktami B i C wynosi 0,667 V.

159 Zadanie – Obwód elektryczny w kształcie okręgu

Kawałek drutu o długości 11 cm wykonany z jednorodnego przewodnika wygięto w kształt okręgu. Pomiędzy punktami A i B włączono baterię. Położenie punktów A i B przedstawia rysunek, $\alpha = 72°$. Napięcie U na baterii wynosi 1,3 V. Oblicz moc wydzielaną w tym obwodzie. Opór właściwy zastosowanej substancji wynosi $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ω·m. Pole powierzchni przekroju poprzecznego drutu wynosi $S = 27$ mm^2. Pomiń opór elektryczny przewodów połączeniowych oraz opór wewnętrzny baterii.

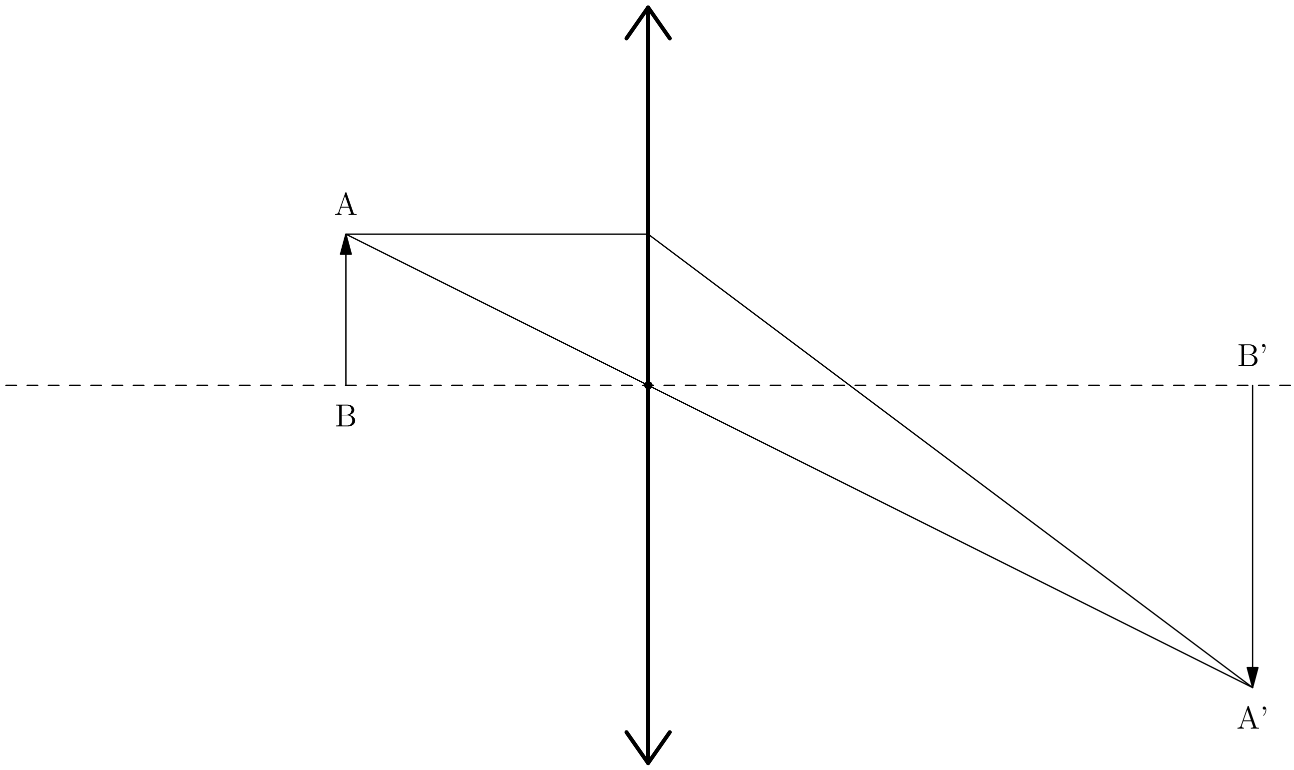


Odpowiedź: Moc wydzielana w układzie wynosi ok. 151000 W.

160 Zadanie – Gdzie ta soczewka?

Poniższy rysunek przedstawia w schematyczny sposób przedmiot AB oraz obraz A'B' powstały po przejściu przez cienką soczewkę światła emitowanego przez przedmiot AB. Zaznaczono też oś optyczną BB'. Wypisz 3 cechy obrazu. Znajdź położenie soczewki oraz rozstrzygnij, czy użyto soczewki skupiającej, czy rozpraszającej.

Odpowiedź: Obraz jest powiększony, odwrócony i rzeczywisty.



Soczewka jest skupiająca.

161 Zadanie – Odległość do diody

Cienka soczewka o ogniskowej 3 cm musi być odsunięta na odległość 4 cm od ekranu, aby uzyskać na nim ostry obraz świecącej diody znajdującej się na osi optycznej soczewki.
a) Oblicz odległość od soczewki do diody.
b) Oblicz stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu.

Odpowiedź:
a) Odległość od soczewki do diody to 12 cm.
b) Stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu to 3.

162 Zadanie – Płytka równoległościenna

Wiązka światła pada na szklaną płytkę równoległościenną znajdującą się w powietrzu. Promień padający tworzy z powierzchnią graniczną kąt 50°. Bezwzględne współczynniki załamania światła dla powietrza i szklanej płytki wynoszą odpowiednio: n_1 = 1,003 i n_2 =1,662.
a) Ile wynosi kąt odbicia przy pierwszej powierzchni?
b) Ile wynosi kąt załamania przy pierwszej powierzchni?
c) Ile wynosi kąt odbicia przy drugiej powierzchni?
d) Ile wynosi kąt załamania przy drugiej powierzchni?
e) Czy wychodząca wiązka jest równoległa do wchodzącej?

Odpowiedź:
a) Kąt odbicia przy pierwszej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{odb,I}} = 90° - 50° = 40°$.
b) Kąt załamania przy pierwszej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{zał,I}} = \arcsin(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_{\text{pad,I}})) \approx 23°$.
c) Kąt odbicia przy drugiej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{odb,II}} = \alpha_{\text{pad,II}} = \alpha_{\text{zał,I}} = 23°$.
d) Kąt załamania przy drugiej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{zał,II}} = \arcsin(\frac{n_2}{n_1}\sin(\alpha_{\text{pad,II}})) = \alpha_{\text{pad,I}} =$

40°.
e) Tak, wychodząca wiązka jest równoległa do wchodzącej.

163 Zadanie – Kij w basenie

Z poziomego dna basenu, prostopadle do dna, wystaje kij o długości 1,9 m. Ponad powierzchnią wody znajduje się 25% jego długości. Padają na niego promienie słoneczne pod kątem 55° do powierzchni wody. Ile wynosi długość cienia kija na dnie basenu? Współczynnik załamania wody wynosi 1,33, a powietrza 1.

Odpowiedź: Długość cienia na dnie basenu wynosi: $x = a + b \approx 1{,}01$ m.
Zmienna a to długość cienia na powierzchni wody: $a = \frac{lp}{\operatorname{tg}\phi} \approx 0{,}33$ m, gdzie l to długość kija, p to procent jego długości, która wystaje ponad wodę, ϕ to kąt padania promieni do powierzchni wody.
Zmienna b to długość fragmentu cienia na dnie basenu: $b = l(1-p)\operatorname{tg}\beta \approx 0{,}68$ m, gdzie β to kąt załamania uzyskany z prawa załamania: $\sin\beta = \frac{n_p}{n_w}\sin(90° - \phi) \approx 0{,}4313$, gdzie n_p to współczynnik załamania powietrza, a n_w to współczynnik załamania wody.

164 Zadanie – Polaryzacja odbitego światła

Studenci powinni określić materiał, z którego została wykonana sześcienna bryła. Mają tego dokonać tylko na podstawie badania polaryzacji odbitego od jej ściany światła. Dysponują wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskali, gdy kąt między normalną do ściany a odbitą wiązką był równy 60,5°. Na podstawie odpowiednich obliczeń wskaż, z którego z następujących materiałów najprawdopodobniej wykonano bryłę (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): fluorek sodu (1,33), diament (2,42), korund (1,77). Bryła znajduje się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Odpowiedź: Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 1{,}77$. A więc materiałem jest najprawdopodobniej korund.

165 Zadanie – Polaryzacja i geolog

Młoda geolog podczas wycieczki w Sudetach znalazła fragment kryształu. W celu jego identyfikacji badała polaryzację odbitego od ściany kryształu światła. Dysponowała wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskała, gdy kąt między normalną do ściany kryształu a odbitą wiązką był równy 55°. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ najbardziej prawdopodobny minerał, którego fragment był badany. Wybierz spośród (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): cyrkon (1,92), fluoryt (1,43), korund (1,77). Kryształ znajdował się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Odpowiedź: Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 1{,}43$. A więc minerałem jest najprawdopodobniej fluoryt.

166 Zadanie – Jednostki powierzchni

Przelicz km^2 na m^2:
137 km^2 to .... m^2
364 km^2 to .... m^2

Przelicz m^2 na cm^2:
12 m^2 to .... cm^2
201 m^2 to .... cm^2

Przelicz mm^2 na cm^2
1700 mm^2 to .... cm^2
5030 mm^2 to .... cm^2

Odpowiedź:
km^2 na m^2:
137000000 m^2
364000000 m^2

m^2 na cm^2:
120000 cm^2
2010000 cm^2

mm^2 na cm^2:
17 cm^2
50,3 cm^2

167 Zadanie – Prostokąty

O ile zmieni się pole prostokąta o bokach 14 cm i 48 cm, jeśli pierwszy bok zwiększymy 10 razy, a drugi bok zmniejszymy 6 razy?

Odpowiedź: Różnica powierzchni tych prostokątów wynosi 448 cm^2

168 Zadanie – Boki prostokątów

Oblicz długość:
a) boku kwardatu o polu powierzchni 16 m^2.
b) boku prostokąta o polu powierzchni 12 m^2, którego drugi z boków jest równy 4 m.
c) boku kwadratu o obwodzie 12 m.
d) boku prostokąta o obwodzie 24 m, którego drugi z boków jest równy 3 m.

Odpowiedź:
a) 4 m.
b) 3 m.
c) 3 m.
d) 9 m.

169 Zadanie – Jednostki długości

Przelicz kilometry na metry:
268 km to .... m
550 km to .... m

Przelicz metry na centymetry:
11 m to .... cm
1002 m to .... cm

Przelicz milimetry na centymetry:
300 mm to .... cm
10101 mm to .... cm

Odpowiedź:
kilometry na metry:
268000 m
550000 m

metry na centymetry:
1100 cm
100200 cm

milimetry na centymetry:
30 cm
1010,1 cm

170 Zadanie – Jednostki czasu

Przelicz minuty na sekundy:
15 min. to .... s
147 min. to .... s

Przelicz godziny na minuty:
11 godz. to .... min.
14 godz. to .... min.

Przelicz sekundy na godziny:
39600 s to .... godz.
46800 s to .... godz.

Odpowiedź:
minuty na sekundy:
900 s
8820 s

godziny na minuty:
660 min.
840 min.

sekundy na godziny:
11 godz.
13 godz.

171 Zadanie – Prędkość człowieka

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 67650 metrów w ciągu 165 minut?

Odpowiedź: Człowiek porusza się z prędkością 24,6 km/h.

172 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 331 m/s.

Odpowiedź: Minimalna odległości od ściany to około 13,2 m.

173 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 8,5 m/s. Maciek, który wyruszył 13 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 52 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 1105 s?

Odpowiedź: Maciek jechał z prędkością 9 m/s.

174 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 200 cm/s przez 13 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 230 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 180 cm/s przez 5,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Odpowiedź: Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 201 cm/s.

175 Zadanie – Droga do szkoły

Jaś pokonuje swoją drogę do szkoły ze średnią szybkością 25 km/h. Pierwszą część drogi pokonuje rowerem miejskim, a drugą autobusem. Oba odcinki drogi są sobie równe. Rowerem porusza się ze średnią szybkością 20 km/h. Oblicz średnią szybkość jazdy autobusem. Wynik podaj z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

Odpowiedź: Autobus jedzie ze średnią szybkością ok. 33 km/h.

176 Zadanie – Samochód

Samochód pana Krzysztofa spala 5 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 4 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 2 zł?

Odpowiedź: Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 10 pełnych km.

177 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 14,7 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 1470 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki to 3 km/h.

178 Zadanie – Przejażdżka metrem

Uczeń wsiadł do metra na początku pociągu. Postanowił przejść podczas jazdy na jego koniec korytarzem o długości $l = 115$ m. Gdy tam dotarł, pociąg wjechał na kolejną stację. Uczeń szedł ze średnią szybkością $v_p = 4{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ względem pociągu. Pociąg przejechał drogę $s = 1100$ m. Oblicz średnią szybkość, z jaką jechał pociąg względem stacji metra u, oraz średnią szybkość ucznia względem ziemi v_z.

Odpowiedź: Pociąg jechał ze średnią szybkością 40,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, uczeń względem ziemi poruszał się ze średnią szybkością 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

179 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 15 mm zakończony jest otworem o średnicy 7 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 50 cm/s?

Odpowiedź: Szybkość wody w otworze to ok. 230 cm/s.

180 Zadanie – Odcinki

Odcinek w skali 1:16 ma 18 cm długości. Jaką długość ma ten odcinek w skali 18:1?

Odpowiedź: Odcinek ma długość 5184 cm.

181 Zadanie – Fotografia

Łazik marsjański przesłał zdjęcie znalezionego obiektu do analizy. Na zdjęciu w skali 1:20 obiekt miał 4,5 mm. Aby go dokładniej zbadać, powiększono zdjęcie. Jaką wielkość będzie miał ten obiekt w skali 6:1?

Odpowiedź: Na powiększonym zdjęciu obiekt będzie miał długość 540 mm.

182 Zadanie – Sonda

Sonda wykonała zdjęcia powierzchni Marsa. Po analizie obrazów stwierdzono, że na zdjęciach krater wulkanu miał średnicę 14 cm, a wysokość wulkanu była równa 1,4 cm. Jakie były rzeczywiste rozmiary tego wulkanu w kilometrach, jeśli zdjęcia zostały wykonane w skali 1:15000?

Odpowiedź: Wysokość wulkanu jest równa 0,21 km, a średnica krateru ma 2,1 km.

183 Zadanie – Przyssawka

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 11 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1010 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 97,9 kg.

184 Zadanie – Pod wodą

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 15 m. Przyjmij gęstość wody 1026 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 151 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

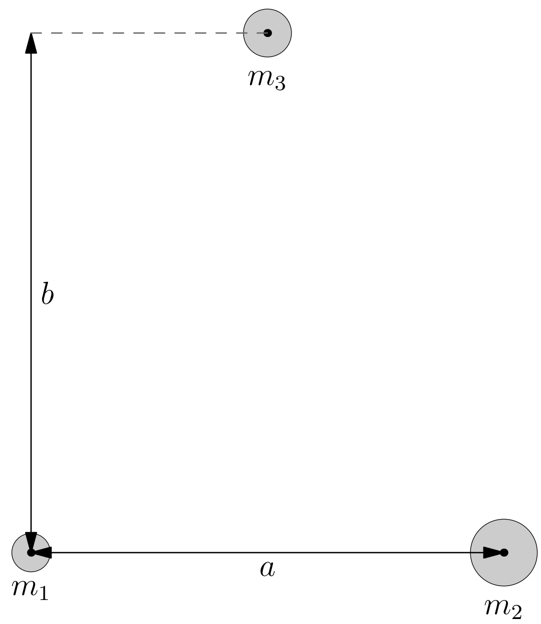
185 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 5 cm, a duży średnicę 49 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 300 kg leżącą na dużym tłoku?

Odpowiedź: Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 3,12 kg.

186 Zadanie – Środek masy

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0{,}4$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg, $m_3 = 0{,}8$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 7$ cm, a wysokość to $b = 10{,}5$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy m_1.



Odpowiedź: Środek masy znajduje się w punkcie $S = (x_c, y_c)$, gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 4{,}67 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 3{,}5 \text{ cm}.$$

187 Zadanie – Lot mionu

Mion leci ze stałą prędkością $1{,}9 \cdot 10^8$ m/s względem laboratorium. W układzie związanym z mionem rozpadł się on po czasie $2{,}4$ μs od początku lotu. Ile czasu trwał lot mionu w układzie związanym z laboratorium? Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

Odpowiedź: W układzie związanym z laboratorium czas lotu mionu

$$t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t_0 \approx 3{,}1\ \mu\text{s}$$

gdzie $\beta = v/c$, v jest prędkością mionu, a c prędkością światła w próżni.

188 Zadanie – Jednostki temperatury

Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Celsjusza na skalę Kelwina:
-12°C to ..... K.
-16°C to ..... K.
Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Fahrenheita na skalę Kelwina:
5°F to ...... K.
-4°F to ...... K.

Odpowiedź: Temperatury w Kelwinach:
261,15 K
257,15 K

258,15 K
253,15 K

189 Zadanie – Temperatury

W różnych krajach stosuje się inne skale temperatur, np. w Polsce temperaturę podaje się w skali Celsjusza, a w USA w skali Fahrenheita. Naukowcy używają najczęściej skali Kelwina. Aby dowiedzieć się, jak przeliczyć temperatury, zapoznaj się z poniższymi wzorami, w których T_K oznacza temperaturę podaną w skali Kelwina, T_C oznacza temperaturę podaną w stopniach Celsjusza, a T_F oznacza temperaturę podaną w stopniach Fahrenheita.

$$T_K = 273{,}15 + T_C \qquad T_C = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

Dwaj chłopcy, Adaś z Polski i John z USA, mierzyli codziennie temperaturę przed domem, otrzymując następujące wyniki:
Adaś: -11°C, -8°C, -12°C, -14°C.
John: 14°F, 23°F, 41°F, 5°F.
Obaj chłopcy biorą udział w konkursie badawczym i muszą przesłać wyniki swoich pomiarów w skali Kelwina.
Pytanie 1. Jakie będą wartości uzyskanych przez nich temperatur w skali Kelwina?
Pytanie 2. Ile wynosi średnia temperatura u każdego z chłopców? Odpowiedź podaj w skali Kelwina.

Odpowiedź: Temperatury Adasia (w Kelwinach): 262,15 K, 265,15 K, 261,15 K, 259,15 K.
Temperatury Johna: 263,15 K, 268,15 K, 278,15 K, 258,15 K.
Średnia temperatura Adasia (w Kelwinach): 261,9 K.
Średnia temperatura Johna (w Kelwinach): 266,9 K.

190 Zadanie – Średnia temperatura

Stacja meteorologiczna prowadziła przez tydzień pomiary średniej dobowej temperatury, uzyskując następujące wyniki: 1°C, 3°C, -1°C, 2°C, -2°C, 0°C, 4°C.
Ile wynosi średnia temperatura w tym tygodniu?

Odpowiedź: Średnia temperatura wynosi: 1°C

191 Zadanie – Zmiana energii wewnętrznej układu

W pewnym procesie dostarczyliśmy do układu ciepło o wartości 340 J, wykonaliśmy pracę nad tym układem (np. sprężając go) o wartości 100 J oraz odebraliśmy od układu ciepło o wartości 170 J, a układ wykonał pracę o wartości 110 J. Oblicz zmianę energii wewnętrznej tego układu wskutek opisanego procesu.

Odpowiedź: Zmiana energii wewnętrznej układu: $\Delta U = Q_1 + W_1 + Q_2 + W_2 = 160$ J. Zauważ, że $Q_2 < 0$ oraz $W_2 < 0$.

192 Zadanie – Szybkość średnia atomu

W pewnym ośrodku o temperaturze 27°C, poruszają się atomy argonu. Oblicz szybkość średnią kwadratową, z jaką poruszają się cząsteczki tego gazu, wiedząc, że jego masa molowa wynosi 40 g/mol.

Odpowiedź: Szybkość średnia kwadratowa argonu jest równa w przybliżeniu 13,7 m/s.

193 Zadanie – Pęcherzyk powietrza

Z dna jeziora o głębokości 27,4 m odrywa się pęcherzyk powietrza o promieniu 4,4 mm. Temperatura na dnie jeziora wynosi 4,2°C. Pęcherzyk po dotarciu na powierzchnię jeziora zmienił się w półsferyczną bańkę o promieniu 10,1 mm. Jaka temperatura panuje na powierzchni jeziora, jeśli ciśnienie atmosferyczne wynosi 100 kPa? Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1000 kg/m^3, a gęstość powietrza w warunkach normalnych 1,29 kg/m^3. Pomiń wpływ napięcia powierzchniowego na ciśnienie w pęcherzyku. Załóż, że temperatura powietrza w pęcherzyku jest zawsze równa temperaturze otoczenia.

Odpowiedź: Temperatura na powierzchni jeziora wynosi około 6,9°C.

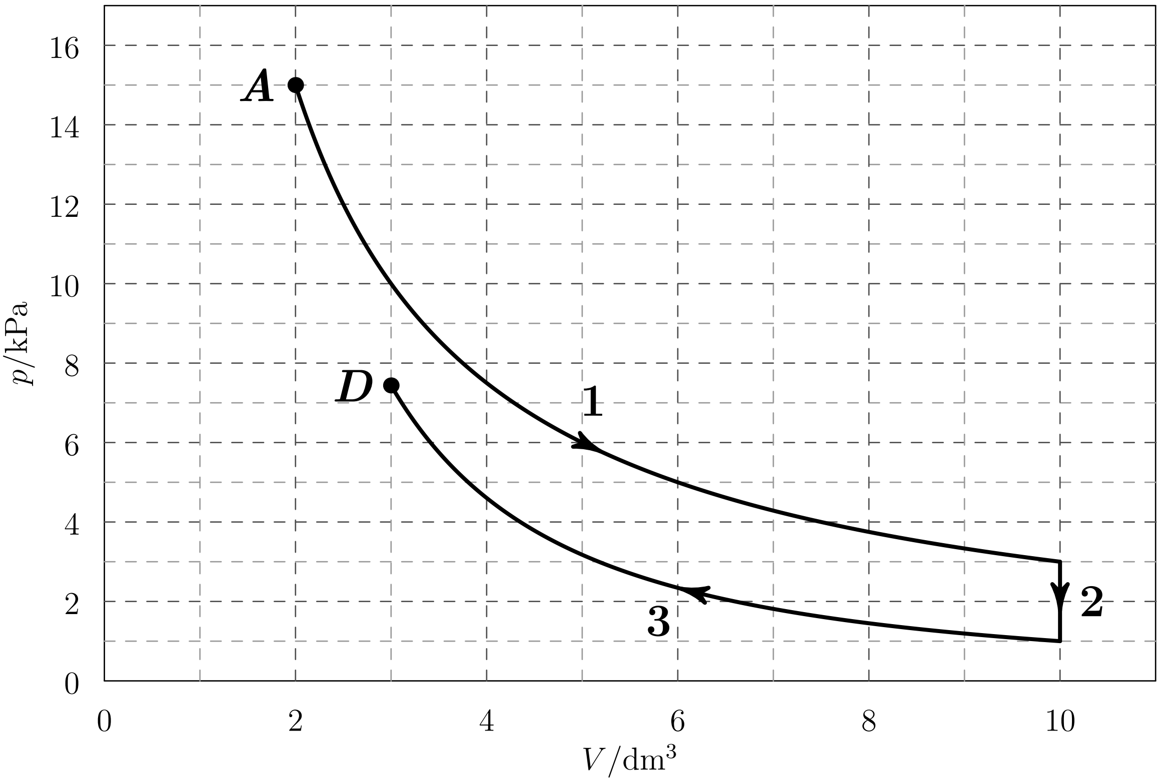
194 Zadanie – Entropia i porcja wody

Oblicz zmianę entropii wody o masie 52 g podczas przemiany jej stanu ze stałego (lód) w stan ciekły (płyn) w temperaturze topnienia pod ciśnieniem 1 atm. Przyjmij ciepło topnienia równe 334 kJ/kg.

Odpowiedź: Zmiana entropii: $\Delta S \approx 17368$ J / 273 K $\approx 63{,}6$ J/K.

195 Zadanie – Przemiany gazowe

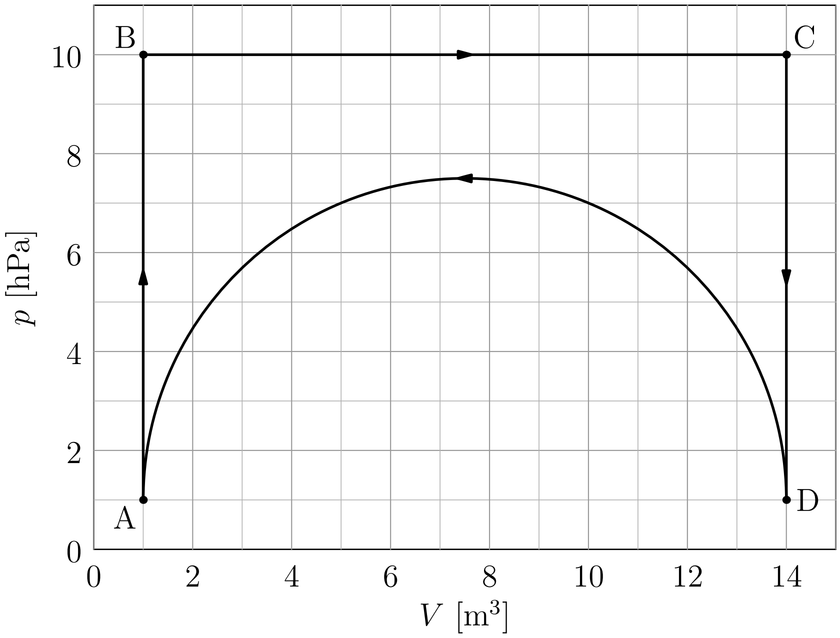
Ustalona porcja gazowego neonu przeszła przemiany 1, 2 i 3 przedstawione na poniższym wykresie, gdzie p oznacza ciśnienie gazu, a V jego objętość. Początkowo parametry gazu opisywał punkt A. Wiadomo, że przemiana 3 była adiabatyczna.
a) Podaj nazwy przemian 1 i 2. W przypadku przemiany 1 swoją hipotezę dotyczącą rodzaju przemiany sprawdź w 3 różnych punktach.
b) Dla każdej z przemian wskaż wielkości, które są zawsze równe 0 w trakcie tej przemiany.
c) Czy gaz w punkcie D ma większą temperaturę niż w punkcie A?
d) Czy z punktu D może ta porcja gazu dotrzeć do punktu A w przemianie izobarycznej?



Odpowiedź:
a) Przemiana 1 to przemiana izotermiczna, gdyż pV ma zawsze tę samą wartość, np. $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ (w jednostkach kPa·dm^3). Przemiana 2 jest przemianą izochoryczną.
b) W trakcie przemiany 1 zmiana temperatury oraz zmiana energii wewnętrznej są równe 0, w trakcie przemiany 2 zmiana objętości oraz praca (wykonana nad gazem lub wykonana przez gaz), a w trakcie przemiany 3 wymienione z otoczeniem ciepło.
c) Nie. Iloczyn pV w punkcie A jest równy $2 \cdot 15 = 30$, a w punkcie D jest mniejszy niż $8 \cdot 3 = 24$ (w jednostkach kPa·dm^3).
d) Nie, gdyż ciśnienia w tych punktach są różne.

196 Zadanie – Praca wykonana przez gaz

Oblicz pracę wykonaną przez gaz podczas jednego cyklu przedstawionego na wykresie poniżej. Fragment DA ma kształt półokręgu.



Odpowiedź: Praca wykonana przez gaz wynosi około 5070 J.

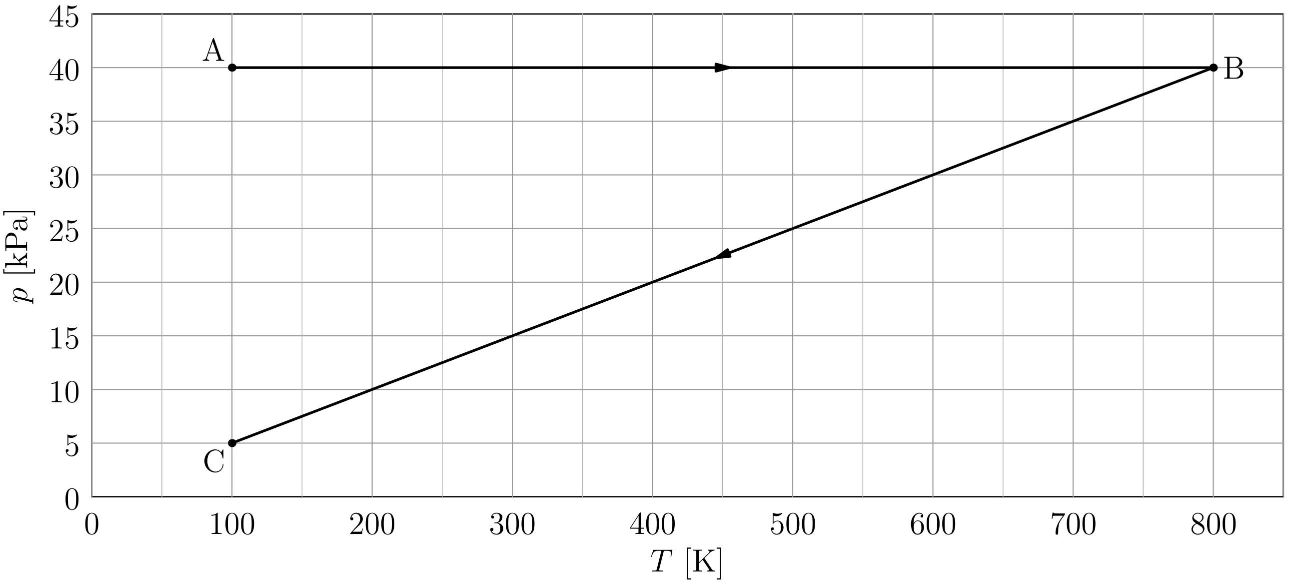
197 Zadanie – Przemiany gazu doskonałego

W szczelnym naczyniu, zamkniętym tłokiem, znajduje się argon. Masa gazu jest równa 2 kg, a początkowa temperatura 18°C. Gaz poddano przemianie izobarycznej, dostarczając mu 840 J ciepła. Jaką pracę wykonał argon podczas rozprężania? Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 40 g/mol.

Odpowiedź: Gaz wykonał pracę około 336 J.

198 Zadanie – Ciepło, energia wewnętrzna i praca w przemianach gazowych

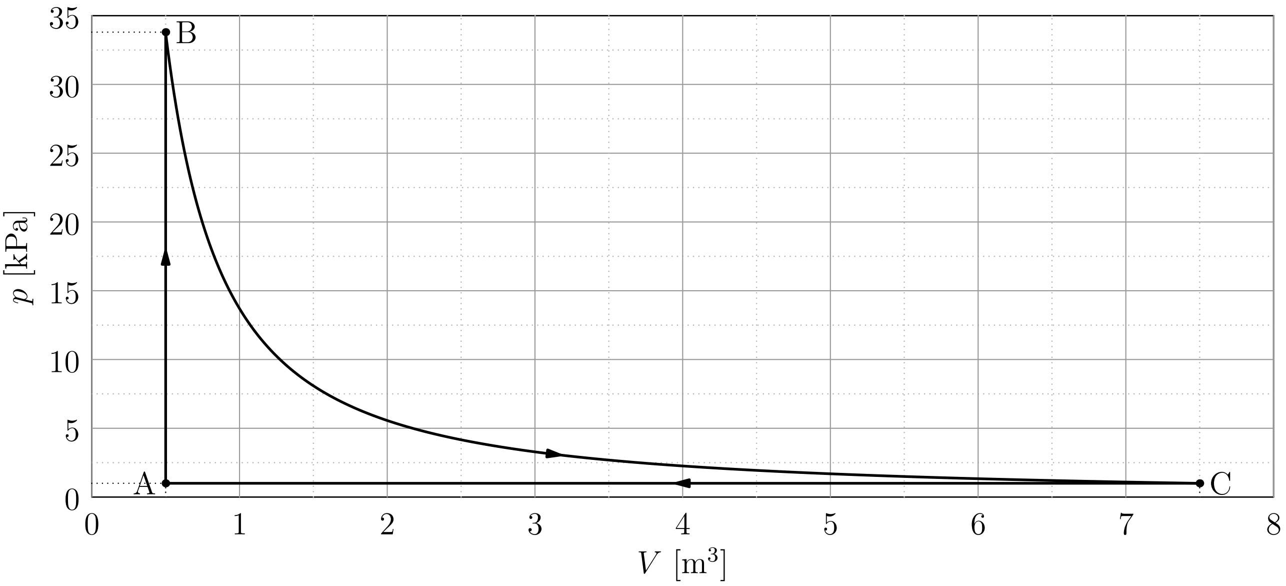
Oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu doskonałego, pracę wykonaną przez gaz oraz ciepło wymienione z otoczeniem podczas przemiany przedstawionej na wykresie poniżej. Przyjmij, że zmiana objętości wyniosła 0,21 m^3.



Odpowiedź: Podczas przemiany energia wewnętrzna gazu nie zmieniła się. Praca jaką wykonał gaz wynosi 8400 J, z otoczenia pobrał 8400 J ciepła.

199 Zadanie – Ciepło oddane i pobrane

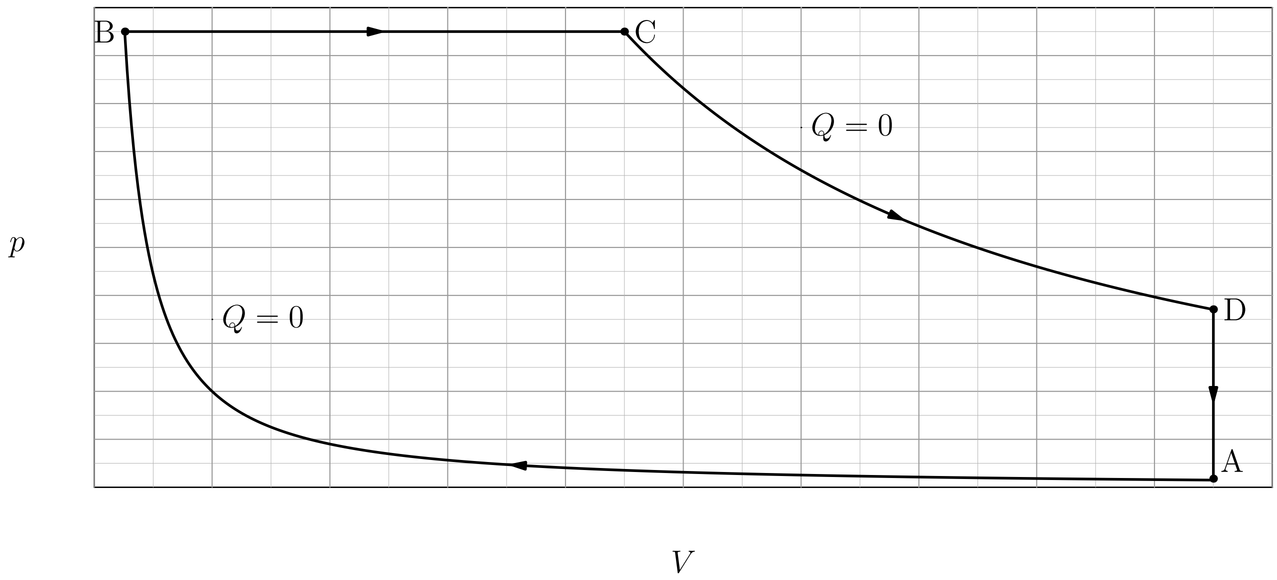
Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest poddawany przemianom przedstawionym na wykresie poniżej. Wiedząc, że przemiana B-C jest przemianą adiabatyczną oraz że ciśnienie w punkcie A jest równe 1 kPa, a w punkcie B ciśnienie wynosi 33,8 kPa, oblicz:
a) energię pobraną przez gaz z grzejnika;
b) energię oddaną chłodnicy;
c) wypadkową pracę w jednym cyklu silnika cieplnego, w którym gaz poddawany jest opisanym przemianom;
d) sprawność tego silnika.



Odpowiedź: Gaz pobrał z grzejnicy 24,6 kJ ciepła, a do chłodnicy oddał 17,5 kJ ciepła. Praca wykonana przez gaz wynosi 7,1 kJ, sprawność silnika jest równa 29%.

200 Zadanie – Cykl przemian gazu

Wyznacz sprawność cyklu dla ustalonej porcji gazu doskonałego przedstawionego na rysunku poniżej. Wynik przedstaw tylko w zależności od temperatur oraz stosunku ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej. Przemiany A-B oraz C-D są adiabatyczne. Dane są temperatury w punktach A, B, C, D.



Odpowiedź: Sprawność przedstawionego cyklu w zależności od temperatur:

$$\eta = 1 + \frac{1}{\kappa}\frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

κ - stosunek ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej, wykładnik adiabaty.

201 Zadanie – Przemiana adiabatyczna i izotermiczna

Porcję 2 kg argonu o temperaturze 613,7 K i ciśnieniu $3 \cdot 10^5$ Pa sprężono adiabatycznie, a następnie rozprężono izotermicznie. Ilość ciepła pobrana w procesie izotermicznym jest równa przyrostowi energii wewnętrznej gazu w procesie adiabatycznym i wynosi 250 kJ. Oblicz objętość i ciśnienie gazu po przemianie
a) adiabatycznej
b) izotermicznej.
Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 40 g/mol, a wykładnik adiabaty 1,66.

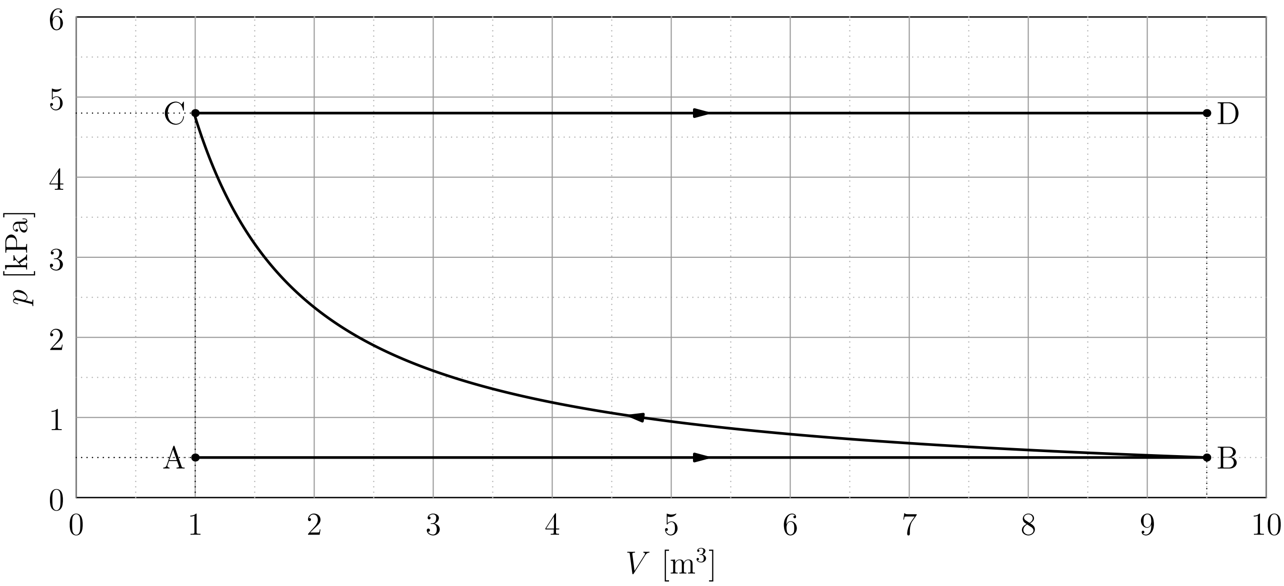
Odpowiedź: Po przemianie adiabatycznej parametry gazu wynoszą 0,52 m^3, $6{,}87 \cdot 10^5$ Pa. Po przemianie izotermicznej parametry gazu wynoszą 1,04 m^3, $3{,}39 \cdot 10^5$ Pa.

202 Zadanie – Entropia gazu

Zmianę entropii gazu doskonałego wyraża uniwersalny dla każdej przemiany wzór.

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_p} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{T_k}{T_p}$$

n - liczba moli, R - uniwersalna stała gazowa, V_k - objętość końcowa, V_p - objętość początkowa, C_v - ciepło molowe przy stałej objętości, T_k - temperatura końcowa, T_p - temperatura początkowa.
Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego został poddany przemianie izotermicznej i dwóm przemianom izobarycznym. Końcowe ciśnienie gazu jest równe 4,8 kPa. Korzystając z przedstawionego wzoru oraz wykresu poniżej, oblicz zmianę entropii dla każdego z trzech procesów. Zinterpretuj otrzymane wyniki.



Odpowiedź: Zmiana entropii w procesie A-B jest równa 46,8 J/K, o tyle samo entropia zmienia się w procesie C-D. Można zauważyć, że zmiana entropii w procesie izobarycznym zależy tylko od zmiany objętości gazu i ciepła molowego przy stałym ciśnieniu. W procesie B-C zmiana entropii wynosi −18,7 J/K. Przemiany przedstawione na wykresie odpowiadają sytuacji, w której gaz jest zamknięty w pojemniku z ruchomym tłokiem. Przemiany A-B i C-D przedstawiają izobaryczne rozprężanie gazu, przemiana B-C izotermiczne sprężanie gazu. Czasami entropia jest określana jako miara nieuporządkowania gazu. W stanie A cząsteczki mogą zajmować mniejszą objętość pojemnika niż w stanie B. Są bardziej ściśnięte i „uporządkowane” niż w stanie B. Także temperatura w stanie A jest niższa - można powiedzieć, że ruch cząsteczek jest bardziej „uporządkowany”. Gaz, rozprężając się, zwiększa zajmowaną objętość pojemnika, cząsteczki są bardziej „nieuporządkowane”. Również temperatura rośnie. W przemianie A-B entropia wzrasta. W przemianie izotermicznej B-C ściskając gaz, zmniejszamy zajmowaną przez niego objętość. Cząsteczki w stanie C są bardziej „uporządkowane” przestrzennie niż w stanie B. W przemianie B-C entropia gazu maleje. W przemianie C-D gaz zachowuje się tak samo, jak w przemianie A-B, rozpręża się. Entropia gazu rośnie.

203 Zadanie – Równanie van der Waalsa

Porcję 2 kg chloru ogrzano od temperatury 420 K do temperatury 510 K. Podczas przemiany objętość gazu wzrosła od 4 m^3 do 8 m^3. Zakładając, że gaz spełnia równanie van der Waalsa, oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu. Załóż, że masa molowa użytego gazu to 35 g/mol, ciepło molowe przy stałej objętości 12,8 J/(K·mol), a stałe występujące w równaniu van der Waalsa $a = 0{,}658$ J·m^3/(mol)^2, $b = 0{,}056 \cdot 10^{-3}$ m^3/mol.

Odpowiedź: Zmiana energii wewnętrznej gazu wynosi 66,1 kJ.

204 Zadanie – Wzory redukcyjne 1

Oblicz:
a) $(-3\sin 150^\circ + 4\,\mathrm{tg}\,225^\circ) \cdot 2\cos 225^\circ =$
b) $-3\sin 225^\circ + 3\cos 225^\circ =$
c) $(3\sin 45^\circ - \cos 150^\circ)\cdot(3\sin 45^\circ + \cos 150^\circ) =$

Odpowiedź: a) $-3{,}54$
b) 0
c) 3,75

205 Zadanie – Wzory redukcyjne 2

Oblicz:
a) $(-3\sin(-45^\circ) + 6\,\mathrm{tg}\,480^\circ) \cdot 3\cos 930^\circ =$
b) $6\sin 930^\circ + 3\cos(-150^\circ) =$
c) $(3\sin 480^\circ - \cos(-45^\circ))\cdot(3\sin(-150^\circ) + \cos(-150^\circ)) =$
d) $\mathrm{tg}\,930^\circ \cdot \sin 480^\circ + \sin 930^\circ \cdot \cos(-45^\circ) - \sin(-150^\circ) =$
e) $(\mathrm{tg}\,780^\circ)^2 - 3(\mathrm{ctg}\,420^\circ)^2 =$
f) $\sin^2(-45^\circ) + \cos^2(-45^\circ) =$

Odpowiedź: a) 21,5
b) $-5{,}6$
c) $-4{,}47$
d) 0,646
e) 2
f) 1

206 Zadanie – Wzory redukcyjne 3

Oblicz:
a) $(\sin(-162^\circ) + 5\cos(-162^\circ))^2 - 2 \cdot 5\cos(-162^\circ)\sin(-162^\circ) =$
b) $5\sin 597^\circ + 2\cos(-457^\circ) =$
c) $(2\sin 134^\circ - \cos(-162^\circ))\cdot(2\sin(-457^\circ) + \cos(-457^\circ)) =$
d) $\mathrm{tg}\,597^\circ \cdot \sin 134^\circ + \sin 597^\circ \cdot \cos(-162^\circ) - \sin(-457^\circ) =$
e) $(\mathrm{tg}\,780^\circ)^2 - 3(\mathrm{ctg}420^\circ)^2 =$
f) $\sin^2(-162^\circ) - \cos^2(-162^\circ) =$

Odpowiedź: a) 22,71
b) $-4{,}44$
c) $-5{,}035$

d) 2,9
e) 2
f) −0,809

207 Zadanie – Zbiory liczb naturalnych

Zbiory A, B i C składają się z następujących elementów:

$A = \{6, 7, 10, 12, 15, 19\}$

$B = \{2, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 22\}$

$C = \{2, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 21\}$

Określ:
a) sumę $A \cup B$,
b) sumę $B \cup C$,
c) sumę $A \cup B \cup C$,
d) różnicę $A \setminus B$,
e) różnicę $B \setminus C$,
f) różnicę $A \setminus C$,
g) iloczyn (część wspólną) $A \cap B$,
h) iloczyn $B \cap C$,
i) iloczyn $A \cap C$,
j) iloczyn $A \cap B \cap C$.

Odpowiedź:
a) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 19, 22\}$
b) $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 21, 22\}$
c) $A \cup B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 22\}$
d) $A \setminus B = \{6, 7, 19\}$
e) $B \setminus C = \{4, 9, 22\}$
f) $A \setminus C = \{7, 19\}$
g) $A \cap B = \{10, 12, 15\}$
h) $B \cap C = \{2, 5, 10, 11, 12, 13, 15\}$
i) $A \cap C = \{6, 10, 12, 15\}$
j) $A \cap B \cap C = \{10, 12, 15\}$

208 Zadanie – Działania na zbiorach

Uprość poniższe wyrażenia, w których występują zbiory A i B:
a) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
b) $(A \cup B) \cap (B \setminus A)$
c) $A \cap (B \cup A)$
d) $(B \cup B) \setminus A$

Odpowiedź:
a) $\{\}$
b) $B \setminus A$
c) A
d) $B \setminus A$

