Warszawa, 2017-09-23

# Spis wszystkich zadań napisanych po polsku w Gezmat

Adresy autorów znajdziesz na stronie projektu (linki - nagłówek, stopka) oraz w pliku gezmat.cxx

Instrukcję, jak używać GEZMAT, by tworzyć własne zestawy zadań i dodawać własne zadania, znajdziesz na stronie projektu. Ten plik został wygenerowany po wywołaniu w konsoli systemu Linux polecenia: `./gezmat.bash def/all_problems_pl.gzm`
**Ważne!** Plik `def/all_problems_pl.gzm` jest tworzony po wywołaniu

`./gezmat.bash def/pl-prepare-all-problems-config.gzm`

Nie edytuj tych plików! Możesz zmienić nazwę pliku `def/all_problems_pl.gzm` i wtedy go edytować jako swój własny plik konfiguracyjny.

## 1 Zadanie – Ogrzewanie wody

Ile ciepła należy dostarczyć 400 g wody, aby ogrzać ją o 60 K? Wynik wyraź w kJ. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K).

**Odpowiedź:** Należy dostarczyć 100,8 kJ.

## 2 Zadanie – Ochładzanie sali

W pomieszczeniu są klimatyzatory o maksymalnej mocy chłodniczej 4 kW. W sali znajduje się 35 studentów. Można przyjąć, że każdy z nich wydziela ciepło z szybkością około 350 kJ/godz. W pomieszczeniu znajduje się także 12 żarówek, każda o mocy 80 W. Ponieważ na zewnątrz panuje wysoka temperatura, przez ścianę przenika ciepło z szybkością 6 MJ/godz. Ile klimatyzatorów powinno być włączonych, jeśli powietrze w pomieszczeniu ma być utrzymywane w stałej temperaturze 20°C?

**Odpowiedź:** Powinny być włączone 2 klimatyzatory.

## 3 Zadanie – Kolektor słoneczny

Na dachu zamontowany jest kolektor słoneczny o sprawności $n = 25\%$. Energia słoneczna docierająca do kolektora przekazywana jest do wody krążącej w rurach kolektora. Jaka jest powierzchnia kolektora, jeśli w ciągu godziny ogrzewa 191 litrów wody, zwiększając jej temperaturę o 20°C? Przyjmij, że w danej godzinie natężenie promieniowania słonecznego wynosi 750 W/m$^2$. Ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K), a jej gęstość 1000 kg/m$^3$.

**Odpowiedź:** Powierzchnia kolektora słonecznego wynosi 23,8 m$^2$.

## 4 Zadanie – Ciepło właściwe ciała

Do aluminiowego kalorymetru o masie 200 g włożono kulę o masie 404 g. Następnie do naczynia wlano 45 g wrzącej wody i zamknięto kalorymetr, aby zminimalizować wymianę ciepła z otoczeniem. Po ustaleniu się równowagi termicznej układu zmierzono temperaturę wody, wyniosła ona 45°C. Temperatura początkowa kalorymetru i kuli jest równa temperaturze otoczenia i wynosi 27°C. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200

J/(kg·K), a ciepło właściwe aluminium 900 J/(kg·K). Oblicz ciepło właściwe kuli, a następnie sprawdź w tablicy, z jakiego materiału jest najprawdopodobniej zbudowana. Zastanów się, dlaczego otrzymana wartość różni się od wartości podanej w tablicy.

| substancja | ciepło właściwe J/(kg·K) |
|---|---|
| cyna | 220 |
| miedź | 380 |
| nikiel | 460 |
| glin | 900 |

**Odpowiedź:** Ciepło właściwe kuli wynosi 984 J/(kg·K). Otrzymana wartość ciepła właściwego różni się od wartości podanych w tablicy. W obliczeniach nie uwzględniliśmy wymiany ciepła między otoczeniem a układem, która występuje mimo zastosowania kalorymetru. Kula jest prawdopodobnie zbudowana z glinu.

## 5 Zadanie – Topienie złota

Jubiler na stopienie złota zużył 2560 J energii. Oblicz, ile złota stopił jubiler, wiedząc, że złoto było już podgrzane do temperatury topnienia oraz że ciepło topnienia złota wynosi 64 kJ/kg.

**Odpowiedź:** Złotnik stopił 40 g złota.

## 6 Zadanie – Parowanie wody

Do naczynia zawierającego 0,5 kg wody włożono grzałkę o mocy 500 W, a następnie doprowadzono wodę do wrzenia. Ile wody wyparowało w ciągu 2 minut wrzenia? Przyjmij, że ciepło parowania wody wynosi 2270 kJ/kg.

**Odpowiedź:** Wyparowało 26,4 g wody.

## 7 Zadanie – Silnik spalinowy

Samochód jedzie po autostradzie ze stałą prędkością. By utrzymać prędkość, silnik pracuje z mocą 17 kW. Sprawność silnika wynosi 28%. Ile zapłacimy za benzynę zużytą przez samochód jadący przez 3 godziny? Cena benzyny na stacji paliw wynosi 4,77 zł/l, ciepło spalania wynosi 42 MJ/kg, a jej gęstość 0,7 g/cm$^3$.

**Odpowiedź:** Za benzynę zapłacimy 106,39 zł.

## 8 Zadanie – Lód w ciepłej wodzie

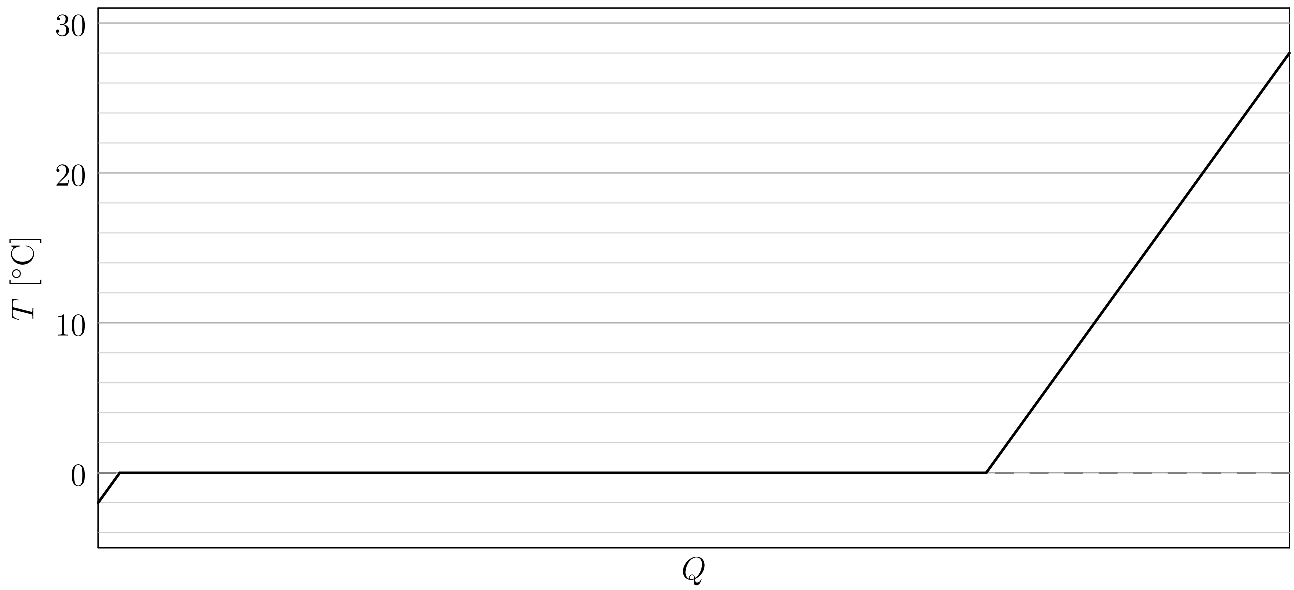
Blok lodu o temperaturze $-5$°C i masie 330 g włożono do 1100 g wody o temperaturze 75°C. Oblicz końcową temperaturę układu, zakładając, że nie następuje wymiana cieplna z otoczeniem. Przyjmij wartości: ciepła właściwego lodu 2050 J/(kg K), ciepła topnienia lodu 334 kJ/kg, ciepła właściwego wody (cieczy) 4200 J/(kg K).

**Odpowiedź:** Końcowa temperatura układu $T_f = (T_w m_w c_w + (T_i c_i - l_i) m_i)/[(m_i + m_w) c_w] \approx$ 38,8°C.

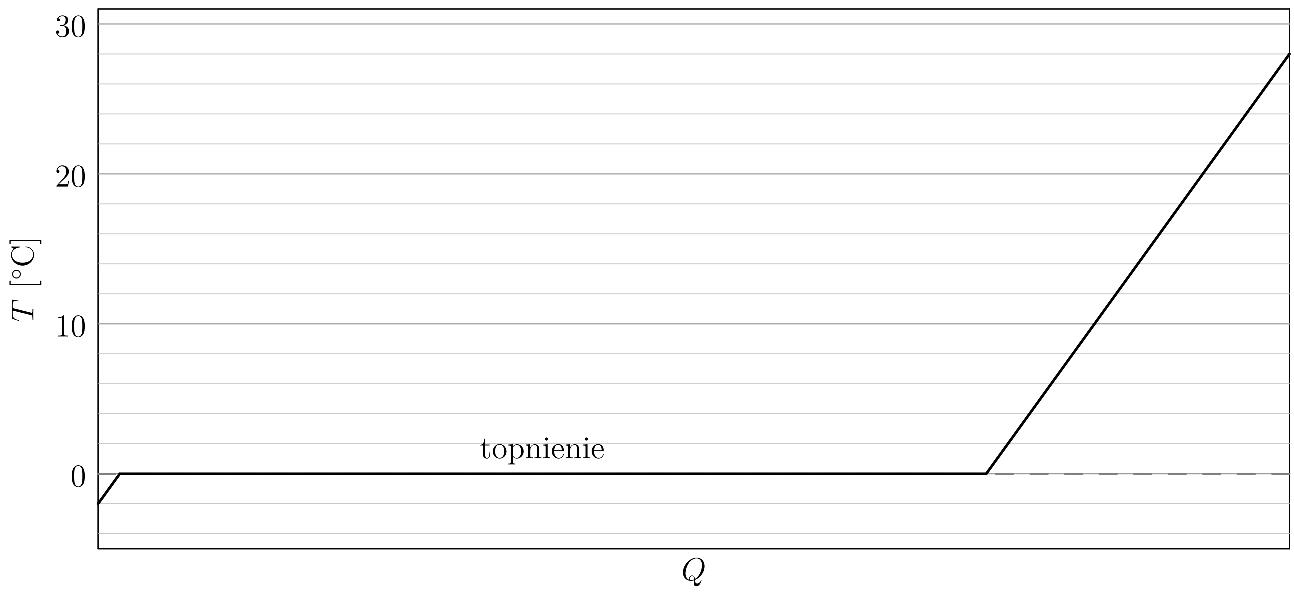
## 9 Zadanie – Zjawiska cieplne

Na rysunku poniżej przedstawiono zależność temperatury próbki 2 g $H_2O$ od wymienionego z otoczeniem ciepła. Rozpoznaj i podpisz przedstawione zjawiska cieplne. Oblicz, ile kalorii próbka wymieniła z otoczeniem podczas całego procesu przedstawionego na rysunku. Potrzebne dane znajdują się w tabeli. Przyjmij, że na diagramie został przedstawiony cały proces przemiany fazowej. Uwaga, rysunek nie zachowuje skali.

| | |
|---|---|
| ciepło topnienia/zamarzania | 336000 J/kg |
| ciepło parowania/skraplania | 2270000 J/kg |
| ciepło właściwe (woda) | 4200 J/(kg·K) |
| ciepło właściwe (lód) | 2100 J/(kg·K) |
| ciepło właściwe (para wodna) | 2000 J/(kg·K) |




**Odpowiedź:**




Całkowita ilość ciepła wymienionego z otoczeniem, podczas wszystkich procesów ukazanych na rysunku, jest równa w przybliżeniu 218 cal.

## 10 Zadanie – Granitowa płyta

Powierzchnia płyty granitowej to $146 \cdot 10^3$ m$^2$, a jej grubość 2 m. Pod płytą panuje temperatura 30°C, a nad płytą −4°C. Oblicz ciepło przepływające przez płytę w trakcie jednej minuty, jeśli współczynnik przewodnictwa cieplnego granitu jest równy 2,38 W/(K · m).

**Odpowiedź:** Ciepło: $Q \approx 354$ MJ.

## 11 Zadanie – Ceglany dom

Ceglany dom ma ściany o grubości 30 cm. Wewnątrz domu utrzymywana jest stała temperatura 20°C. Temperatura powietrza na zewnątrz wynosi 17°C.
a) Oblicz, ile ciepła stracimy w ciągu sekundy przez jedną ze ścian o powierzchni 22 m$^2$. Przyjmij, że przewodnictwo cieplne cegły wynosi 0,8 W/(K·m).
b) Aby zapobiec utracie ciepła, ocieplono budynek z zewnątrz warstwą styropianu o grubości 50 cm. Ile teraz tracimy ciepła przez tę samą ścianę? Przyjmij, że przewodnictwo cieplne styropianu wynosi 0,04 W/(K·m).
c) Jaka temperatura panuje na złączu matariałów?

**Odpowiedź:** Przez ceglany mur tracimy około 176 J na sekundę, a przez mur ocieplony warstwą styropianu 5,1 J na sekundę. Temperatura między cegłą a styropianem jest równa 19,5°C.

## 12 Zadanie – Wydłużenie szyny

Oblicz, o ile zmieni się długość stalowej szyny po ogrzaniu jej do temperatury 14°C, jeśli jej długość przy temperaturze 8°C jest równa 14 m. Współczynnik rozszerzalności cieplnej użytej stali jest równy $0{,}99 \cdot 10^{-5}$ K$^{-1}$.

**Odpowiedź:** Wydłużenie szyny: $\Delta l = \alpha \, \Delta T \, l \approx 0{,}832$ mm.

## 13 Zadanie – Zegar

Pewien zegar, posiadający wahadło z niklu, odmierza dokładnie czas w temperaturze 25°C. Temperatura spadła do −1°C. O ile więcej wahnięć w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej niklu wynosi $13 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Jeden koniec pręta z niklu zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt z niklu jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

**Odpowiedź:** Zegar wykona o 14,6 więcej wahnięć na dobę.

## 14 Zadanie – Spadająca kulka

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z ołowiu, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 49\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 295 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

| substancja | ciepło właściwe [J/(kg·K)] | ciepło topnienia [kJ/kg] | temperatura topnienia [°C] |
|---|---|---|---|
| cyna | 222 | 59 | 232 |
| ind | 233 | 28 | 156 |
| ołów | 128 | 25 | 328 |

**Odpowiedź:** Kulka powinna spadać z prędkością około 5,12 m/s.

## 15 Zadanie – Spadająca kulka (1 wiersz tabeli)

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z cyny, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 37\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 310 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

| substancja | ciepło właściwe [J/(kg·K)] | ciepło topnienia [kJ/kg] | temperatura topnienia [°C] |
|---|---|---|---|
| cyna | 222 | 59 | 232 |

**Odpowiedź:** Kulka powinna spadać z prędkością około 7,44 m/s.

## 16 Zadanie – Lodowiec

Oszacuj masę stopionego lodu z lodowca, który zsunął się i zatrzymał w dolinie. Początkowo lodowiec spoczywał na wysokości 418 m nad doliną i miał masę $8 \cdot 10^9$ kg. Załóż, że energia tracona przez zsuwający się lodowiec i spływającą wodę powstałą podczas topnienia lodowca powoduje dalsze topnienie lodu. Przyjmij ciepło topnienia lodu 334 kJ/kg. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s$^2$.

**Odpowiedź:** Masa stopionego lodu to około $m_i = m_0\, g\, h/l \approx 98 \cdot 10^6$ kg, gdzie $m_0$ jest początkową masą lodowca, $h$ zmianą wysokości lodowca, $l$ ciepłem topnienia lodu, a $g$ wartością przyśpieszenia ziemskiego. Oszacowanie to m.in. zakłada, że $h$ jest zmianą wysokości środka masy lodowca razem z powstałą z niego wodą.

## 17 Zadanie – Promieniowanie kuli

Gorąca kula o promieniu 7 cm, temperaturze powierzchni 800 K i względnej zdolności emisyjnej 0,6 wysyła energię w postaci promieniowania. Ile energii zaabsorbuje w ciągu 2 minut ciało doskonale czarne, które odbiera $8 \cdot 10^{-3}$ energii promieniowania wyemitowanego przez kulę? Stała Stefana-Boltzmanna wynosi $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m$^2$·K$^4$).

**Odpowiedź:** Ciało odbierze około 824 J energii.

## 18 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $16 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 2,5 m/s. Druga część o masie $27{,}5 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 6,2 m/s.

**Odpowiedź:** Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3 v_3 = m_1 v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1 v_1 / v_3 \approx 6{,}45 \cdot 10^3$ kg.

## 19 Zadanie – Spadochroniarz

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 128 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 5,1 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s$^2$. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

**Odpowiedź:** Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 1250$ N.

## 20 Zadanie – Zderzenie wagonów

Wagon kolejowy o masie 21 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 1,4 m/s, uderzył w stojący skład 6 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:
a) wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
b) o ile zmniejszyła się na skutek sczepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

**Odpowiedź:**
a) Po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}2$ m/s.
b) Energia kinetyczna ruchu postepowego zmniejszyła się o $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n+1)v^2)/2 \approx 17{,}6$ kJ.

## 21 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Kula o masie 9 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s$^2$. Wartość siły elektrostatycznej to 96 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 12 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

**Odpowiedź:**
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 130 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 14{,}5$ m/s$^2$.
c) Wartość prędkości po czasie $t$ to $v = at \approx 174$ m/s.

## 22 Zadanie – Kula w cieczy

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 930 kg/m$^3$ pływa w cieczy o gęstości 1500 kg/m$^3$. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

**Odpowiedź:** Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}38$.

## 23 Zadanie – Ołów, lód i woda

Kulę o masie 5,7 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,29 $m^2$. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10500 $kg/m^3$, a gęstość wody 1000 $kg/m^3$. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

**Odpowiedź:** Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left( \frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -17{,}8 \text{ mm}$$

A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

## 24 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3400 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 6 kg, a każdy student może wykonać pracę 32000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 12 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

**Odpowiedź:** Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 75.

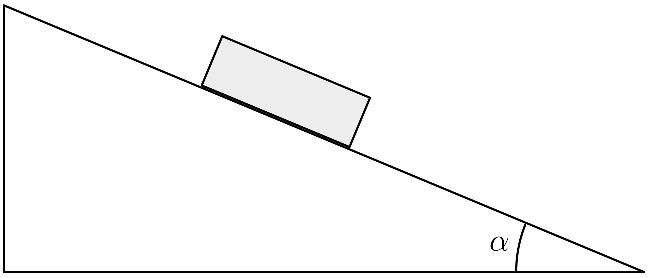
## 25 Zadanie – Wahadło

Kulkę o masie 50 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 7 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 $m/s^2$.

**Odpowiedź:** Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 1,17 m/s.

## 26 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 36^\circ$ zsuwa się cegła o masie 5,9 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 $m/s^2$. Wartość kąta $\alpha$ na rysunku może być inna od podanej.




**Odpowiedź:** Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g\sin\alpha \approx 5{,}76$ m/s$^2$, w dół równi.

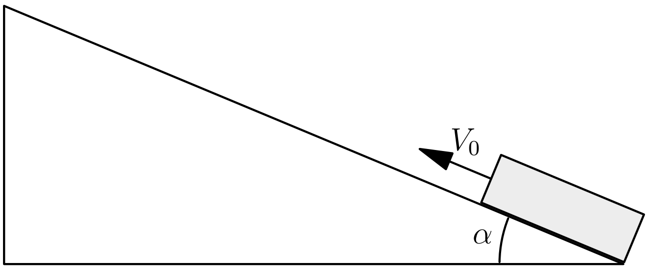
## 27 Zadanie – Równia pochyła

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 37° zsuwa się cegła o masie 4,3 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s$^2$.

**Odpowiedź:** Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g\sin\alpha \approx 5{,}9$ m/s$^2$, w dół równi.

## 28 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 452 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 7$ m/s wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 40°$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 1,4.
a) Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
b) Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
c) Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.

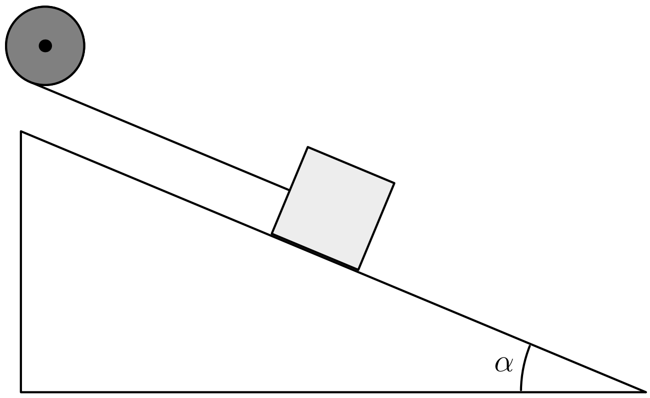



**Odpowiedź:**
a) Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi $a = g(f\cos\alpha + \sin\alpha) \approx 16{,}8$ m/s$^2$, gdzie $\alpha$ to kąt nachylenia równi, a $f$ to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
b) Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to $t = \frac{V_0}{a} \approx 0{,}42$ s.
c) Droga hamowania to $s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}V_0 t \approx 1{,}46$ m.

## 29 Zadanie – Sześcian na równi

Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 40°$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 31 dag i o długości krawędzi 7 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 61 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześcianu znajduje się 50 cm nad stołem.

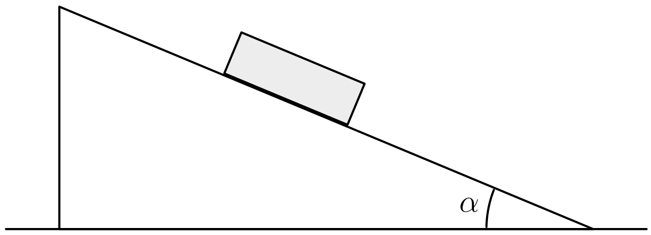
a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?
Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,36.




**Odpowiedź:**
a) Przyśpieszenie sześcianu o masie $m_s$ wyniesie $a = m_s g \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{m_s + \frac{1}{2}m_w} = 1{,}81$ m/s$^2$, gdzie $f$ to współczynnik tarcia klocka o równię, a $m_w$ to masa walca.
b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0{,}926$ s, gdzie $s$ to droga jaką pokona sześcian.

## 30 Zadanie – Jeżdżąca równia

Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie naczylenia $\alpha = 20°$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,2.




**Odpowiedź:** Wartość przyśpieszenia minimalnego wynosi $a_{min} = g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 1{,}5$ m/s$^2$, a wartość przyśpieszenia maksymalnego wynosi $a_{max} = g\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 5{,}96$ m/s$^2$, gdzie $f$ to współczynnik tarcia klocka o równię.

## 31 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 57 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 57 N na drodze 2,5 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 14 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

**Odpowiedź:** Końcowa szybkość łyżwiarza o masie $m$ będzie równa $v = \sqrt{2(F-T)S/m} \approx 1{,}94$ m/s.

## 32 Zadanie – Pocisk

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 50 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 42 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 524 m/s, a po przejściu przez drzewo zmiejszyła się do 404 m/s.
a) Ile wynosi praca sił oporu?
b) Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
c) Ile wynosi czas przebijania drzewa?
Załóż, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

**Odpowiedź:**
a) Praca sił oporu wynosi $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -2780$ J, gdzie $V_1$ i $V_2$ to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie $m$ przed wbiciem w drzewo i po przebiciu drzewa.
b) Wartość opóźnienia kuli wynosi $a = \frac{W}{md} \approx 133$ km/s$^2$, gdzie $d$ to średnica drzewa.
c) Czas wynosi $t = \frac{V_1 - V_2}{a} \approx 0{,}905$ ms.

## 33 Zadanie – Krążek hokejowy

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 5 m, a po zderzeniu przebył drogę 3 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,08. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

**Odpowiedź:** Szybkość początkowa wynosi $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 3{,}54$ m/s, gdzie $s_1$ to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę, $s_2$ to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a $f$ to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

## 34 Zadanie – Droga hamowania

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 60 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

**Odpowiedź:** Droga, jaką pokona samochód, wynosi $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 30$ m, gdzie $V_0$ to prędkość początkowa samochodu, $t_1$ to czas reakcji kierowcy, a $f$ to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

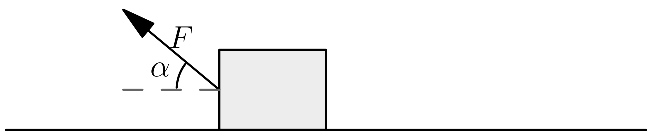
## 35 Zadanie – Spacer z sankami

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 30 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 53 N i tworzy on kąt 15° z poziomem.

**Odpowiedź:** Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 1540$ J.

## 36 Zadanie – Ukośna siła

Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,7 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 8$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,05.
a) Oblicz przyśpieszenie klocka.
b) Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
c) Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?




**Odpowiedź:**
a) Przyśpieszenie klocka wynosi $a \approx 8$ m/s$^2$.
b) Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi $s_{0\to5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 99{,}9$ m, gdzie $t$ to czas.
c) Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi $s_3 = s_{0\to3} - s_{0\to2} \approx 20$ m.

## 37 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $6{,}4 \cdot 10^{24}$ kg i $2{,}73 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $452 \cdot 10^6$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

**Odpowiedź:** Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 0{,}891 \cdot 10^{-3}$ m/s$^2$.

## 38 Zadanie – Samochód na moście

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 74 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 10% ciężaru samochodu?

**Odpowiedź:** Prędkość wynosi $V = \sqrt{gR(1-k)} \approx 25{,}5$ m/s, gdzie $k = 10\%$, a $R$ to promień krzywizny mostu.

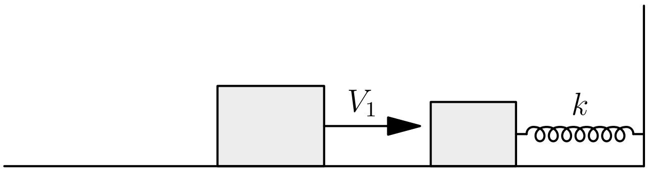
## 39 Zadanie – Obrót Ziemi

Oblicz:
a) z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 77% siły grawitacji działającej na niego.
b) ile wynosi ciężar człowieka o masie 65 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

**Odpowiedź:**
a) Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić $V = \sqrt{Rg(1-k)} \approx 3790$ m/s, gdzie $R$ to promień Ziemi, a $k = 0{,}77$.
b) Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 635 N.

## 40 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,7 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 163$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześcian o masie 1,2 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 2$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.




**Odpowiedź:** Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}} = 13{,}6$ cm, gdzie $m_1$ to masa uderzającego klocka, a $m_2$ to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

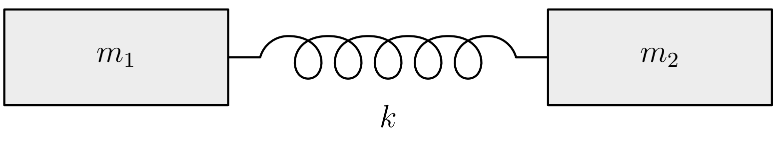
## 41 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,3 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 1 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 0,9 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 1,35 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

**Odpowiedź:** a) Gdy podwieszono odważnik o masie $m_1$ to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}347$ s, gdzie $m_2$ to masa kulki, a $x$ to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2 m_1 g}} = 0{,}301$ s, gdzie $m_3$ to masa klocka.

## 42 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach $m_1$ i $m_2$ połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości $k$. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 46$ N/m, $m_1 = 2$ kg oraz $m_2 = 5$ kg.




**Odpowiedź:** Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 1{,}11$ s.

## 43 Zadanie – Ciężarek na lince

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,97 s zakreśla okrąg o promieniu 118 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 76 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

**Odpowiedź:** Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z $r_1$ do $r_2$ jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx$ 0,402 s.

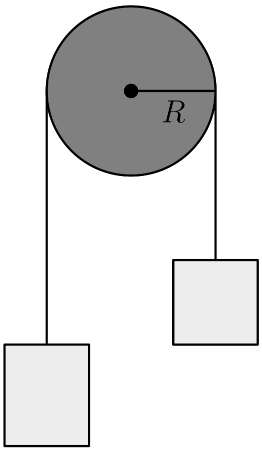
## 44 Zadanie – Tarcza

Na środku tarczy o średnicy 3 m i masie 117 kg, znajduje się człowiek o masie 61 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,6 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

**Odpowiedź:** Częstotliwość układu wyniesie $f_2 = f_1 \frac{Md^2}{8mr^2+Md^2} = 0{,}257$ Hz, gdzie $d$ to średnica tarczy o masie $M$, $f_1$ to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a $r$ to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie $m$ od osi obrotu.

## 45 Zadanie – Maszyna Atwooda

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0{,}6$ m i masie 2 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszone są dwa obciążniki o masach 1,69 kg i 0,89 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomiń. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:
a) załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
b) załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.




**Odpowiedź:**
a) Przyśpieszenie układu wynosi $a_1 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = 3{,}04$ m/s$^2$, gdzie $m_1$ i $m_2$ to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.
b) Przyśpieszenie układu wynosi $a_2 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_3} = 2{,}19$ m/s$^2$, gdzie $m_3$ to masa walca.

## 46 Zadanie – Naturalny satelita

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $59 \cdot 10^3$ kg okrążającego w czasie 36,9 h jednorodną planetę o masie $478 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$.

**Odpowiedź:** Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 52{,}2 \cdot 10^3$ km.

## 47 Zadanie – Zmiana orbity

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 440 kg znajduje się w odległości 6000 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8700 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi 3,69 m/s$^2$, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

**Odpowiedź:** Praca wyniesie $W = \frac{GMm}{2}(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2}) = 213$ MJ, gdzie $G$ to stała grawitacji, $M$ i $m$ to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity, $R$ to promień Marsa, a $h_1$ i $h_2$ to odległości satelity od powierzchni planety.

## 48 Zadanie – Prędkość ucieczki

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety $Z90$, stanowi 41% masy Ziemi, a jej promień wynosi 12800 km. Oblicz:
a) prędkość ucieczki ciała z planety $Z90$.
b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie $Z90$ do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 25 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

**Odpowiedź:**
a) Prędkość ucieczki wyniesie $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 5{,}05$ km/s, gdzie $G$ to stała grawitacji, $R$ to promień planety $Z90$ o masie $M$.
b) Stosunek wysokości wyniesie $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 9{,}82$, gdzie $h$ i $h_z$ to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie $Z90$ i na Ziemi, a $g$ i $g_z$ to odpowiednio przyśpieszenie na planecie $Z90$ i na Ziemi.

## 49 Zadanie – Tunel średnicowy

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 3800 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $7{,}74 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 7200 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

**Odpowiedź:** Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$, gdzie $E_{k2}$ jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, $E_{k1}$ energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to 2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie $M$ jest masą planety, $R$ jej promieniem, $m$ masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to 2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}' = -\int_R^r F(r')\, dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\, dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie $v$ jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 7190 \text{ m/s}$$

## 50 Zadanie – Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach $M_a$ oraz $M_b$ wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi $T$. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 28 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 96 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 660$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$.

**Odpowiedź:** a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie $r_a$ i $r_b$ są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie $v_a$ i $v_b$ oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_aM_a = r_bM_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania $r_b$ i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_aM_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 176 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 51{,}4 \cdot 10^3$ km, $d \approx 227 \cdot 10^3$ km.

## 51 Zadanie – Dwie gwiazdy

Gwiazda $A$ ma masę $M_A$, a gwiazda $B$ masę $M_B$. Gdy były w odległości $d_1$ od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio $v_{A1}$ oraz $v_{B1}$. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy $A$ w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do $d_2$, jeśli szybkość gwiazdy $B$ była wtedy równa $v_{B2}$. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 7 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 13 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 40$ km/s, $v_{B1} = 32$ km/s, $d_1 = 7 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 24$ km/s, $d_2 = 14 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$.

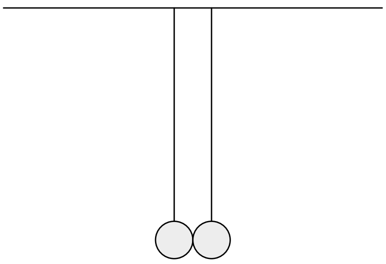
**Odpowiedź:** Szybkość gwiazdy $A$ w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$

$$\approx 34{,}5 \text{ km/s}$$

## 52 Zadanie – Dwie kulki na linkach

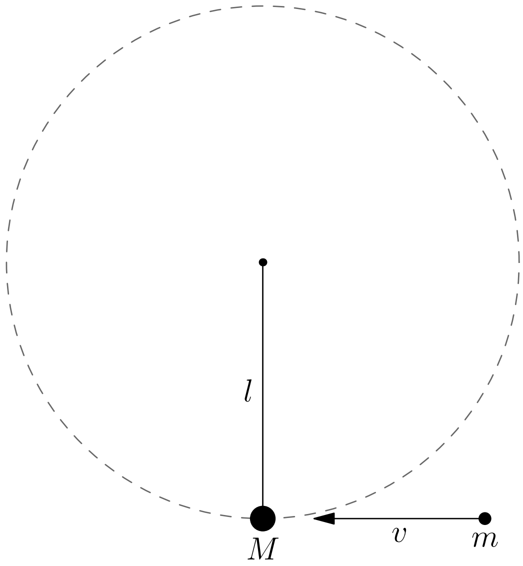
Dwie stykające się małe kulki o masach 0,6 kg i 0,2 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 1,2 m. Lżejsza kulka zostaje odchylona w płaszczyźnie linek o kąt 35° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



**Odpowiedź:** Wysokość wyniesie $H = \frac{m^2 l(1-\cos\alpha)}{(m+M)^2} = 1{,}4$ cm, gdzie $m$ i $M$ są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki, $l$ to długość linki, a $\alpha$ to kąt odchylenia.

## 53 Zadanie – Postrzelone wahadło

Metalowy ciężarek o masie $M = 267$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 47$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości $v$ pocisk o masie $m = 37$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu $l$ w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s$^2$. Pomiń opory ruchu bryły.



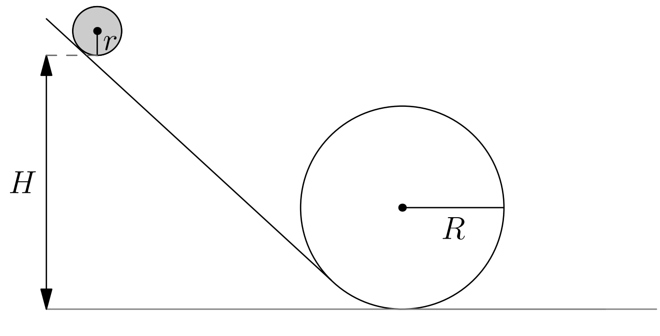

**Odpowiedź:** Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$
$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$
$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 39{,}4$ m/s.

## 54 Zadanie – Pętla śmierci

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0{,}07$ m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu $R = 0{,}5$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



**Odpowiedź:** Minimalna wysokość wynosi $H = 2{,}7(R - r) = 1{,}16$ m.

## 55 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Proton porusza się z prędkością o wartości 2300 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 1,2 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg.

**Odpowiedź:** Proton porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = F/m \approx 26{,}4 \cdot 10^{10}$ m/s$^2$.

## 56 Zadanie – Natężenie pola elektrycznego

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 14 nm od jądra atomowego o liczbie atomowej 5. Opisz również kierunek i zwrot wektora natężenia pola elektrycznego względem jądra. Pomiń wpływ innych obiektów.

**Odpowiedź:** Wartość natężenia pola elektrycznego $|\vec{E}| = kne/r^2 \approx 36{,}7 \cdot 10^6$ N/C, gdzie $n$ jest liczbą atomową, $e$ ładunkiem protonu, a $k$ stałą elektryczną. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest taki sam jak prosta przechodząca przez jądro i punkt, w którym określamy pole. Zwrot $\vec{E}$ jest *od jądra.*

## 57 Zadanie – Przyciągnięty elektron

Oblicz pracę siły elektrostatycznej ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku $+6e$, gdzie $e$ jest ładunkiem protonu, podczas przyciągania elektronu z odległości 3 mm do 6 nm. Przyjmij, że elektron na początku i na końcu procesu spoczywa. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

**Odpowiedź:** Praca

$$W_{1\to 2} = -k\,n\,e\,e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \approx 1{,}44 \text{ eV} \approx 231 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

gdzie $n = +6$.

## 58 Zadanie – Praca nad ładunkiem w polu dipola elektrycznego

Oblicz pracę, jaką wykonała zewnętrzna siła, przemieszczając proton po półokręgu w polu trwałego, nieruchomego dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego $2{,}4 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo proton spoczywał na symetralnej dipola w odległości 1,4 nm od tego dipola. Na końcu proton również spoczywał na symetralnej dipola, ale w odległości 2,9 nm od tego dipola i po jego drugiej stronie.

**Odpowiedź:** Praca zewnętrznej siły jest równa 0.

## 59 Zadanie – Obrót molekuły w polu innej cząsteczki

Oblicz, ile energii zostanie przekazane otoczeniu, gdy molekuła posiadająca moment dipolowy o wartości $4{,}7 \cdot 10^{-30}$ Cm ustawi się tak, by jej moment dipolowy był skierowany przeciwnie do momentu dipolowego drugiej, unieruchomionej molekuły znajdującej się w odległości 1,1 nm. Wartość momentu dipolowego drugiej molekuły jest równa $17{,}2 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle i mają zgodne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł. Przyjmij, że molekuły są trwałymi dipolami punktowymi. Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych jest równa

$$E_p = k\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r}\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r}\right)\frac{1}{r^3}$$

gdzie $k$ jest stałą elektryczną, $\vec{p}_i$ momentem dipolowym, a $\vec{r}$ wektorem względnego położenia dipoli. Korzystając z tego wzoru, uzasadnij, które jego składowe są istotne w rozważanym problemie. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

**Odpowiedź:** Energia przekazana otoczeniu

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB} = 2\,k\,p_1\,p_2/r^3 \approx 6820\ \mu\text{eV} \approx 10900 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$$

## 60 Zadanie – Cewka i magnes

Układ składa się z wykonanej z miedzianego drutu, podłączonej tylko do amperomierza cewki oraz trwałego, silnego magnesu. Cewka i magnes mogą być niezależnie przesuwane wzdłuż prostej, która jest jednocześnie osią cewki i magnesu (bieguny magnesu leżą na tej prostej). W poniższej tabeli, w wymienionych trzech przypadkach opisz zachowanie wartości bezwzględnej natężenia prądu, $|I|$, płynącego przez cewkę (*maleje, rośnie, stała i różna od 0, równa 0*) oraz wypadkowe oddziaływanie elektromagnetyczne między cewką a magnesem (*przyciągają się, odpychają się, nie oddziałują*).

| **opis** | $\boldsymbol{|I|}$ | **oddziaływanie** |
|---|---|---|
| Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu | | |
| Magnes jest ze stałą prędkością zbliżany do nieruchomej cewki | | |
| Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki | | |

**Odpowiedź:**

| **opis** | $\|\boldsymbol{I}\|$ | **oddziaływanie** |
|---|---|---|
| Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu | maleje | przyciągają się |
| Magnes jest ze stałą prędkością zbliżany do nieruchomej cewki | rośnie | odpychają się |
| Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki | maleje | przyciągają się |

## 61 Zadanie – Dźwięk w piaskowcu

Prędkość dźwięku w piaskowcu jest równa 3000 m/s. Oblicz okres oraz częstotliwość fali rozchodzącej się w płycie z tego piaskowca, jeśli długość fali jest równa 2 km.

**Odpowiedź:** Okres fali $T = \lambda/v \approx 0{,}667$ s, a jej częstotliwość $f = 1/T \approx 1{,}5$ Hz.

## 62 Zadanie – Częstotliwość światła

Wiązka światła o długości fali 600 nm w próżni pada na powierzchnię szkła o bezwzględnym współczynniku załamania tego światła równym 1,96. Oblicz częstotliwość i długość fali tego światła w szkle. Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

**Odpowiedź:** Częstotliwość fali w szkle $f_2 = f_1 = c/\lambda_1 \approx 500$ THz, gdzie $f_1$ i $\lambda_1$ to odpowiednio częstotliwość i długość fali w próżni. Długośc fali w szkle $\lambda_2 = v_2 T = cT/n = \lambda_1/n \approx 306$ nm, gdzie $v_2$ to prędkość fali w szkle.

## 63 Zadanie – Fala podłużna w pręcie

Oblicz prędkość rozchodzenia się podłużnej fali w długim, metalowym pręcie. Długość fali jest znacznie większa od średnicy pręta. Gęstość metalu, z którego wykonano pręt, jest równa 9800 kg/m$^3$, a moduł Younga tego metalu jest równy 362 GPa. Jeśli nie pamiętasz zależności prędkości fali od modułu Younga i gęstości, to w opisanym przypadku możesz ją uzyskać, rozważając wymiary tych wielkości.

**Odpowiedź:** Prędkość fali jest równa $v = \sqrt{E/\rho} \approx 6080$ m/s.

## 64 Zadanie – Interferencja fal dźwiękowych

W jednorodnym ośrodku umieszczono dwa głośniki. Pierwszy głośnik znajduje się w odległości 2,42 m, a drugi w odległości 5,02 m od mikrofonu. Każdy z głośników oddzielnie wytwarzał w okolicy mikrofonu falę o takiej samej amplitudzie, a w obszarze między tym głośnikiem a mikrofonem zmiany ciśnienia można było w przybliżeniu opisać jako falę płaską o długości fali 130 cm. Następnie włączono oba głośniki. Drgają one w taki sam sposób, czyli w zgodnej fazie. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ, czy w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, nastąpi wzmocnienie czy osłabienie dźwięku w porównaniu z sytuacją, gdy był włączony tylko jeden z głośników.

**Odpowiedź:** Iloczyn wartości bezwzględnej różnicy odległości i długości fali $|d_1 - d_2|/\lambda = 2$, a więc w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, fale spotykają się w zgodnej fazie – nastąpi wzmocnienie.

## 65 Zadanie – Czy to fala?

W otoczeniu strefy subdukcji wychylenie powierzchni Ziemi opisano następującą funkcją zależną od położenia $x$ oraz czasu $t$:

$$f(x,t) = N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) + K$$

gdzie $N$, $L$, $T$, $a$, $b$, $K$ są stałymi. Funkcja opisywała wychylenie dla $x \in (0, L)$ oraz $t \in (0, T)$. Sprawdź, czy ta funkcja spełnia równanie falowe, a więc czy opisywane wychylenie było falą.

**Odpowiedź:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / L^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / T^2$$

Funkcja $f(x,t)$ spełnia równanie falowe, a więc opisuje falę.

## 66 Zadanie – Zderzenie z $\alpha$

Z jądrem ${}^{19}_{9}\mathrm{F}$ zderza się cząstka $\alpha$. Uzupełnij zapis tej reakcji, wpisując właściwe liczby lub symbole w 5 miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$${}^{19}_{9}\mathrm{F} + {}^{\dots}_{\dots}\alpha \rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + {}^{\dots}_{\dots}\dots$$

**Odpowiedź:**

$${}^{19}_{9}\mathrm{F} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$$

## 67 Zadanie – Procesy jądrowe

Uzupełnij zapis reakcji jądrowej, wpisując właściwe liczby lub symbole w miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{\dots}\dots \rightarrow {}^{94}_{40}\mathrm{Zr} + {}^{137}_{52}\mathrm{Te} + \dots{}^{\dots}_{\dots}\mathrm{n}$$

**Odpowiedź:**

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{94}_{40}\mathrm{Zr} + ^{137}_{52}\mathrm{Te} + 5^{1}_{0}\mathrm{n}$$

## 68 Zadanie – Czas połowicznego rozpadu

W próbce po $318 \cdot 10^3$ latach liczba radioaktywnych jąder atomowych pewnego izotopu zmniejszyła się 64 razy. Oblicz czas połowicznego rozpadu tego izotopu.

**Odpowiedź:** Czas połowicznego rozpadu to około $T_{1/2} = t/n = 53 \cdot 10^3$ lat.

## 69 Zadanie – Wiek próbki

Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu jest równy $8{,}04 \cdot 10^6$ s. Oblicz wiek próbki, jeśli wiadomo, że 95% jąder tego izotopu w próbce już się rozpadło. Wynik podaj w tygodniach.

**Odpowiedź:** Najbardziej prawdopodobny wiek próbki to około $t = n\,T_{1/2} \approx 57{,}5$ tygodnia.

## 70 Zadanie – Datowanie geologiczne

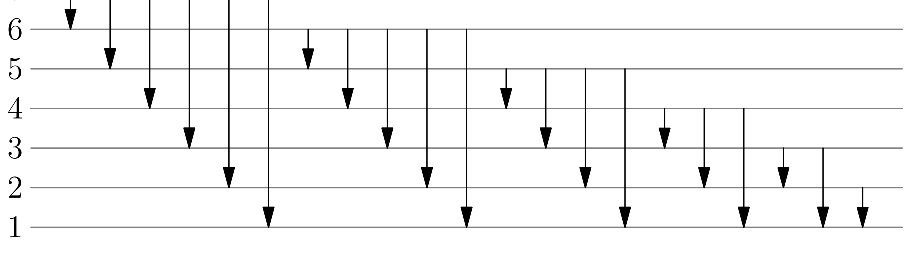
W pewnej próbce granitu znajduje się 0,652 mg argonu $^{40}$Ar i 1,08 mg potasu $^{40}$K. Wyznacz wiek tej próbki. Czas połowicznego rozpadu $^{40}$K wynosi $1{,}25 \cdot 10^9$ lat. Wiadomo, że tylko ok. 11% rozpadających się jąder $^{40}$K zmienia się w jądra $^{40}$Ar. Przyjmij, że wszystkie jądra $^{40}$Ar w próbce powstały z rozpadu $^{40}$K i że poza tym rozpadem inne procesy nie wpływały na zmianę składu tych dwóch pierwiastków w próbce granitu.

**Odpowiedź:** Najbardziej prawdopodobny wiek próbki $t = n \cdot T_{1/2} \approx 3{,}37 \cdot 10^9$ lat.

## 71 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 7$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej $n$ (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

**Odpowiedź:**
a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



b) Można zaobserwować 21 linii.
c) Przejście z poziomu 7 na poziom 6.

## 72 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej $l$ i magnetycznej $m$ określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.

**Odpowiedź:** Możliwe stany to:
$l = 0$ z $m \in \{0\}$
$l = 1$ z $m \in \{-1, 0, 1\}$
$l = 2$ z $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$l = 3$ z $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$l = 4$ z $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

## 73 Zadanie – Liczba fotonów

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 460 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 82% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 30 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s.

**Odpowiedź:** Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\text{abs}}/(\varepsilon_{\text{eff}} E_\gamma) \approx 847 \cdot 10^{14}$.

## 74 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 170 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 3,14 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s $= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

**Odpowiedź:** Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 4{,}16$ eV.

## 75 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru w stanach:
a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi} a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm$^{-3}$. Funkcje określone są w układzie kartezjańskim $XYZ$, jądro spoczywa w środku tego układu, a $r$ jest odległością od środka układu do punktu $(x, y, z)$.

**Odpowiedź:**
a)

$$|\Psi_{100}(0,0,0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0,0,0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

## 76 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną $x$. Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \left(x - \frac{L}{4}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$$

gdzie $N$ oraz $L = 8$ nm są stałymi. Zmienna $x$ przyjmuje wartości od 0 do $\frac{3}{4}L$. Wypisz wszystkie wartości $x$ w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np. $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.

**Odpowiedź:** Wartości $x$, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: 0, $L/4$, $L/2$, a więc 0 nm, 2 nm, 4 nm.

## 77 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

Cząstka o masie $m$ jest uwięziona w sześcianie o krawędzi $L$. Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.
a) Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.
b) Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
c) Dla cząstki znajdującej się w stanie

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} \sin(kx) \left(1 + 4\sqrt{2}\cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky)\sin(kz)e^{-i3\omega t}$$

gdzie $k \equiv \frac{\pi}{L}$ oraz $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$, wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

d) Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

*Wskazówka.* Dla dodatnich liczb całkowitych $p$ i $r$

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right)\, \mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{pr}$$

**Odpowiedź:** a) Dla dodatnich liczb całkowitych $n_x$, $n_y$, $n_z$ unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t)\,\psi_{n_y}(y,t)\,\psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n_x kx) e^{-in_x^2 \omega t}$$

b) Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

c) Możliwe mierzone wartości energii dla stanu $\Psi_s$ to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów $\Psi_{111}$ oraz $\Psi_{211}$.
d) Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii $6\hbar\omega$ jest równe $\frac{8}{9} \approx 0{,}889$.

## 78 Zadanie – Jednostki masy

Przelicz kilogramy na gramy:
21 kg to ......................... g
42 kg to ......................... g

Przelicz tony na kilogramy:
15 t to ......................... kg
10005 t to ......................... kg

Przelicz gramy na dekagramy:
250 g to ......................... dag
5030 g to ......................... dag

**Odpowiedź:**
Kilogramy na gramy:
21000 g
42000 g

Tony na kilogramy:
15000 kg
10005000 kg

Gramy na dekagramy:
25 dag
503 dag

## 79 Zadanie – Gęstość

Pytanie 1. Jaką masę ma sześcienny klocek o krawędzi 3 cm, jeśli gęstość materiału, z którego został wykonany, wynosi 13 g/cm$^3$?
Pytanie 2. Jaką gęstość ma kula o objętości 1 litra, jeśli jej masa to 1 kg?
Pytanie 3. Jaką objętość musi mieć klocek wykonany z materiału o gęstości 24 kg/m$^3$, który ma masę 96 kg?

**Odpowiedź:** Sześcienny klocek o krawędzi 3 cm i gęstości 13 g/cm$^3$ ma masę 351 g.
Gęstość kuli o masie 1 kg i objętości 1 litra wynosi 1 kg/dm$^3$.
Objętość klocka wykonanego z materiału o gęstości 24 kg/m$^3$, który ma masę 96 kg wynosi 4 m$^3$.

## 80 Zadanie – Gęstość na Marsie

Gęstość pewnej skały na powierzchni Marsa to 3,66 g/cm$^3$. Łazik marsjański pobrał próbkę tej skały o objętości 18 cm$^3$. Jaką masę miała pobrana próbka skały?

**Odpowiedź:** Masa próbki to 65,88 g.

## 81 Zadanie – Gęstość zaludnienia

Na pewnej planecie są trzy kontynenty, każdy w kształcie innej figury geometrycznej.
Pierwszy kontynent jest w kształcie kwadratu o boku 2000 km. Mieszka tu 40000000 osób.
Drugi kontynent to prostokąt o bokach 2000 km i 6000 km. Mieszka tu 156000000 osób.
Trzeci kontynent to trapez o wysokości 4000 km i podstawach o długości 400 km i 100 km. Mieszka na nim 19000000 osób.
Oblicz gęstość zaludnienia na każdym z kontynentów.

**Odpowiedź:** Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 10 osób na km$^2$.
Gęstość zaludnienia na prostokątnym kontynencie to 13 osób na km$^2$.
Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 19 osób na km$^2$.

## 82 Zadanie – Rura z przewężeniem

Całym wnętrzem poziomo umieszczonej rury płynie woda. Rura posiada przewężenie, przez które woda przepływa z szybkością 61 cm/s. Przed przewężeniem woda płynie z szybkością 54 cm/s. Pomiń efekty związane z lepkością i ściśliwością. Przepływ jest laminarny. Gęstość wody jest równa 1000 kg/m$^3$.
a) Oblicz zmianę ciśnienia między dwoma punktami znajdującymi się na osi rury, z czego pierwszy punkt znajduje się przed przewężeniem, a drugi w przewężeniu.
b) Napisz, w którym z punktów ciśnienie jest większe.

**Odpowiedź:**
a) Zmiana ciśnienia $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) \approx -40{,}3$ Pa.
b) Ciśnienie jest większe przed przewężeniem.

## 83 Zadanie – Startujący samolot

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyśpieszeniem 9,36 m/s$^2$. Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 4 s?

**Odpowiedź:** 37,44 m/s

## 84 Zadanie – Kolumna wojskowa

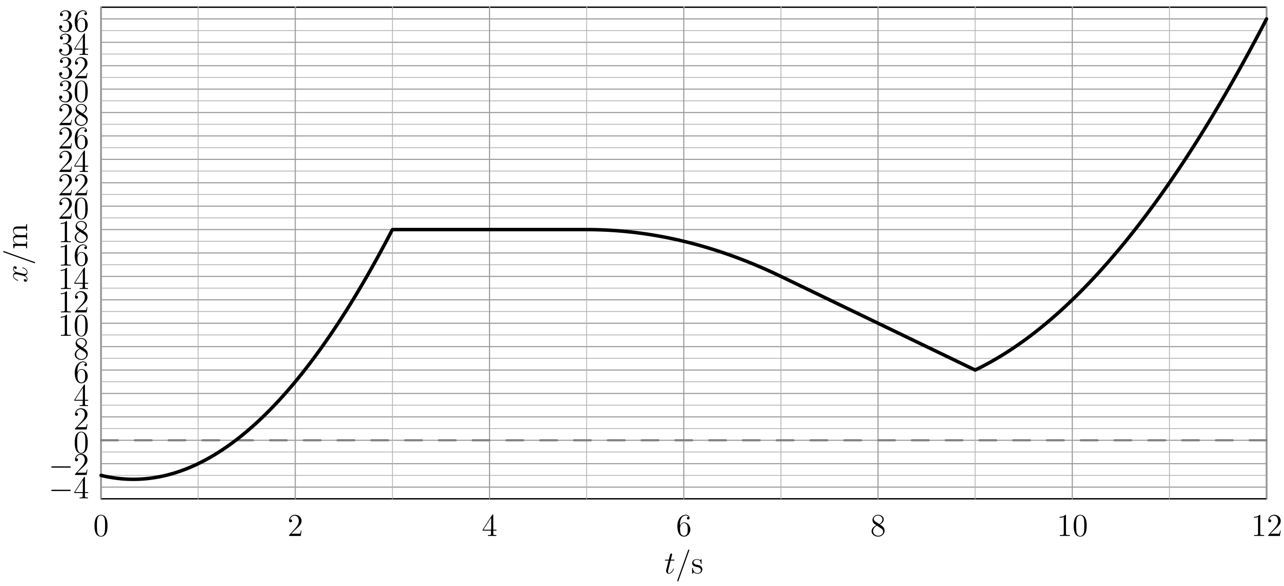
Piesza kolumna wojskowa o długości 7 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 6 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 2 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 33 km/h.
a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?

b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.
Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

**Odpowiedź:**
a) Wykonanie zadania zajmie mu $t = l(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_2 + V_1}) + t_1 \approx 28{,}3$ min, gdzie $l$ to długość kolumny wojskowej, $V_1$ to szybkość kolumny, $t_1$ to czas przekazywania informacji, a $V_2$ to szybkość żołnierza na rowerze.
b) W tym czasie pokona on drogę $s = lV_2(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_1 + V_2}) + t_1 V_1 \approx 14{,}7$ km.

## 85 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

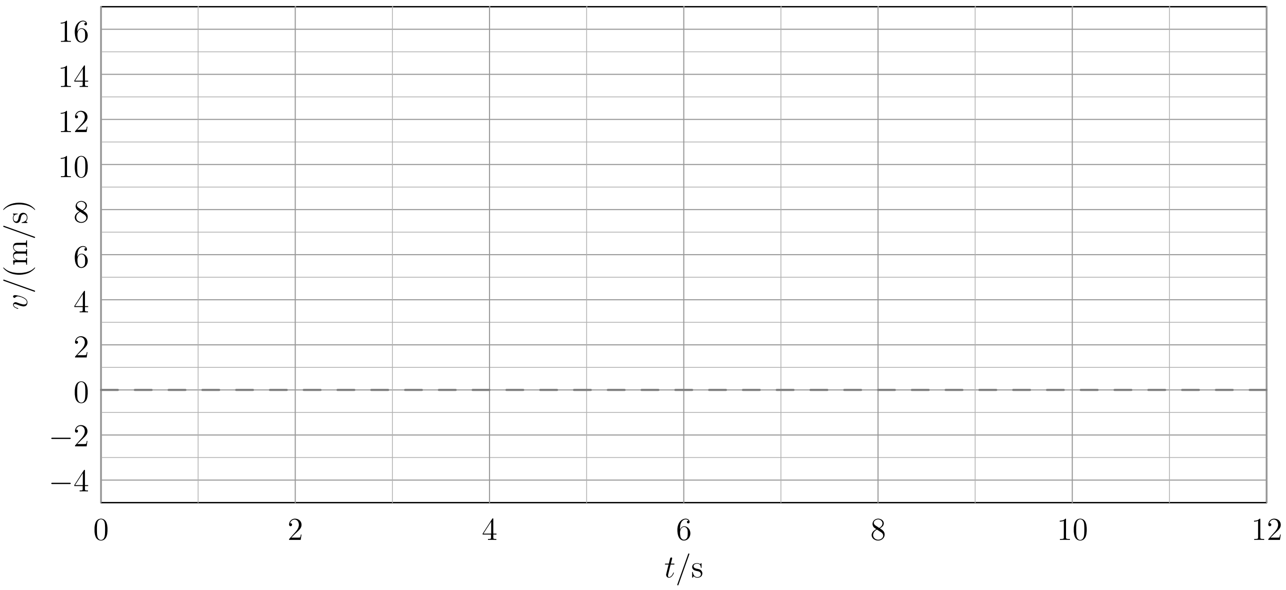
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi $X$. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia $x$ od czasu $t$.



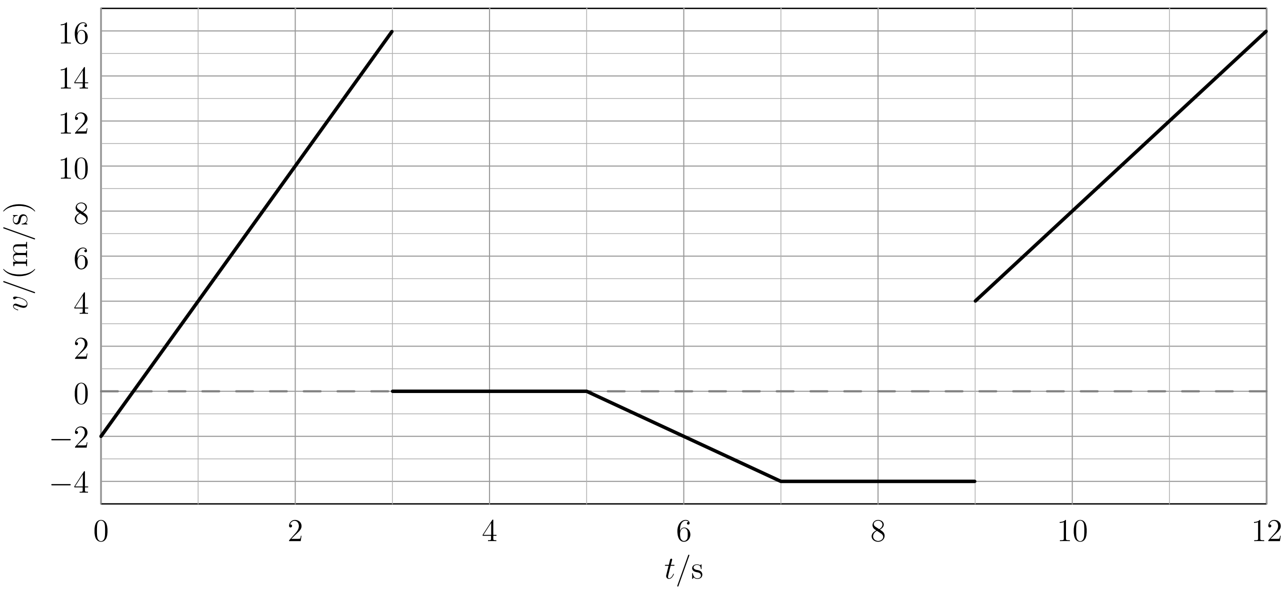

W tabeli podano przyśpieszenie $a$ punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

| $t/\mathrm{s}$ | $[0,3[$ | $]3,5[$ | $]5,7[$ | $]7,9[$ | $]9,12]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a/(\mathrm{m/s^2})$ | 6 | 0 | $-2$ | 0 | 4 |

Wykonaj wykres zależności prędkości $v$ od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0,12]$ s.



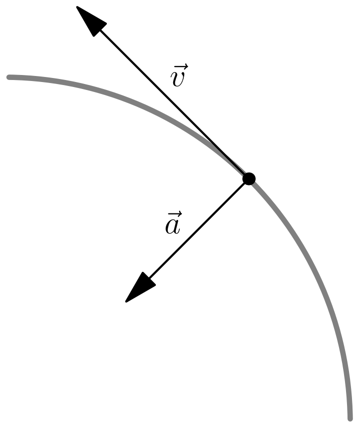

**Odpowiedź:** Poprawny wykres:



## 86 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 65 m ze stałą wartością prędkości 93,6 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s$^2$.

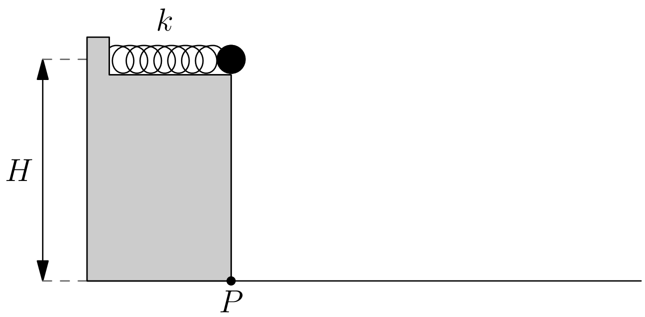
**Odpowiedź:** a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.




b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 10,4 m/s$^2$.

## 87 Zadanie – Rzut poziomy

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 10$ N/m, ściśnięto o 10 cm, naciskając ją kulką o masie równej 100 g. Jaka będzie odległość kulki od punktu $P$ do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości $H = 2{,}7$ m nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominąć. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.




**Odpowiedź:** Zasięg rzutu kulki o masie $m$ wyniesie $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 74{,}2$ cm, gdzie $x$ to ściśnięcie sprężyny.

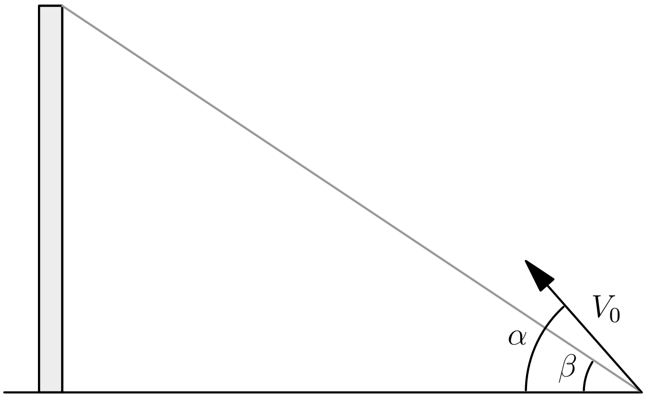
## 88 Zadanie – Strzelec

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 180 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 975 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s$^2$, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

**Odpowiedź:** Pocisk opadł o około 17 cm.

## 89 Zadanie – Rzut ukośny

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 55°$ do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 13 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem $\beta = 35°$ względem powierzchni ziemi. Jaką wartość prędkości $V_0$ powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.




**Odpowiedź:** Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan\alpha - \tan\beta)\cos^2\alpha\tan\beta}} \approx 19{,}5 \text{ m/s},$$

gdzie $y$ to wysokość słupa.

## 90 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

**Odpowiedź:**
**I sposób – graniczna wartość $v$.**
Minimalna wartość prędkości $v_m$ spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l - y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l - y) + y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l - y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości $v_m$, gdyż dla większych wartości prędkości $v$ parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości $v_m$. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.
**II sposób – równanie na $y$.**
Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l - y)$. Z równania okręgu, $A(l - y) + y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l - y)(l + y - A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0, l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A - l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości $y$ dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l, l]$. Stąd $A \in [0, 2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

**III sposób – równanie na $x$.**
Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$, istnieje, jeśli $2lB - 1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

## 91 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 1{,}6$ s, którego położenie na osi $X$ jest opisane równaniem

$$x(t) = A\left(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\right)$$

gdzie $A = 7{,}7$ m, $\lambda = 0{,}6\ \mathrm{s}^{-1}$ oraz $t_0 = 0{,}4$ s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\lambda\,e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$v(t_1) \approx 2{,}25\ \mathrm{m/s}$$

$$a(t) = -A\,\lambda^2 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$a(t_1) \approx -1{,}35\ \mathrm{m/s^2}$$

## 92 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 2D

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} A\cos(\omega t) \\ B\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie $t$ oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

| $A$ | $B$ | $\omega$ |
|---|---|---|
| 3 m | 6 m | 3 $\mathrm{s}^{-1}$ |

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 6$ s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 6{,}76 \\ 11{,}9 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} -17{,}8 \\ 40{,}6 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

## 93 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} g_x t + h_x \\ e_y t^3 + f_y t^2 + g_y t \\ f_z t^2 + g_z t + h_z \end{bmatrix}$$

gdzie $t$ oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

| $g_x$ | $h_x$ | $e_y$ | $f_y$ | $g_y$ | $f_z$ | $g_z$ | $h_z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5$ m/s | 7 m | $-1$ m/s$^3$ | $-2$ m/s$^2$ | $-3$ m/s | $-1$ m/s$^2$ | 5 m/s | $-27$ m |

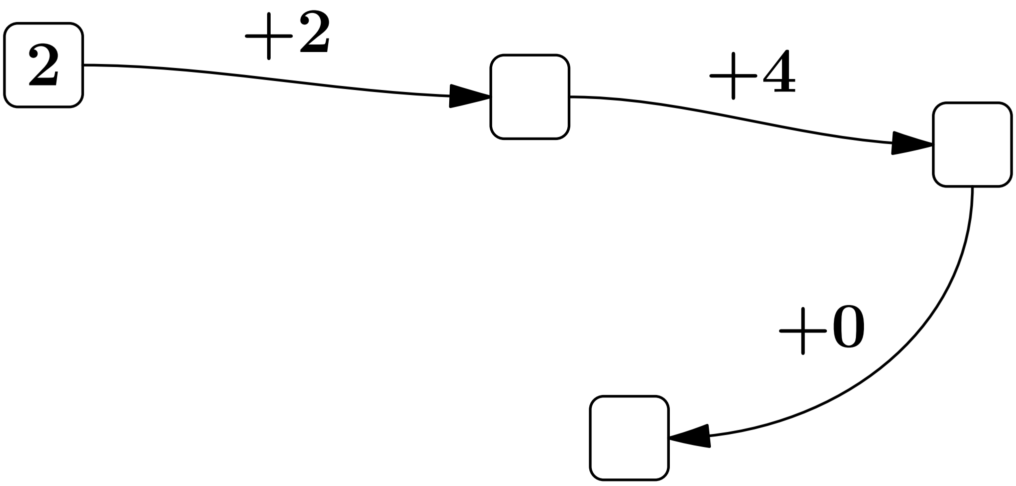
Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 4$ s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} -5 \\ -67 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -28 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

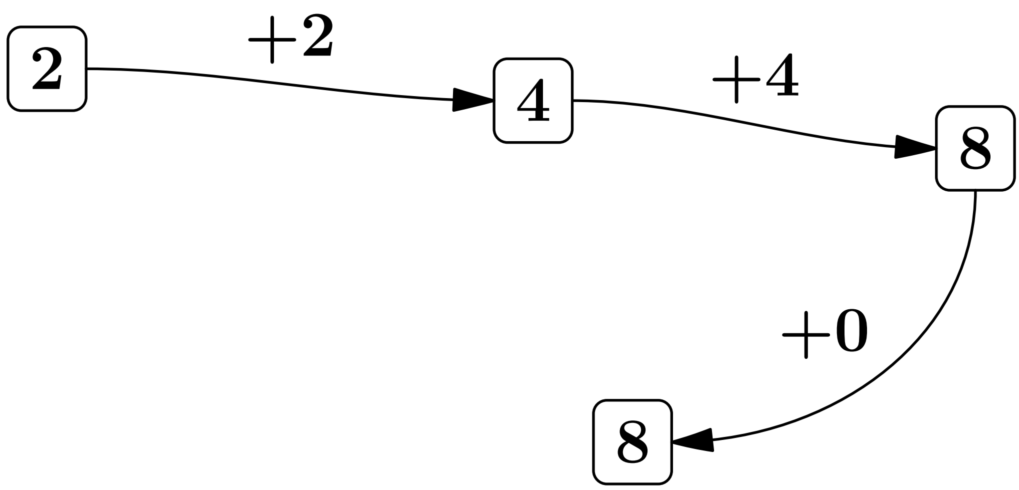
## 94 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie, 0–10

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



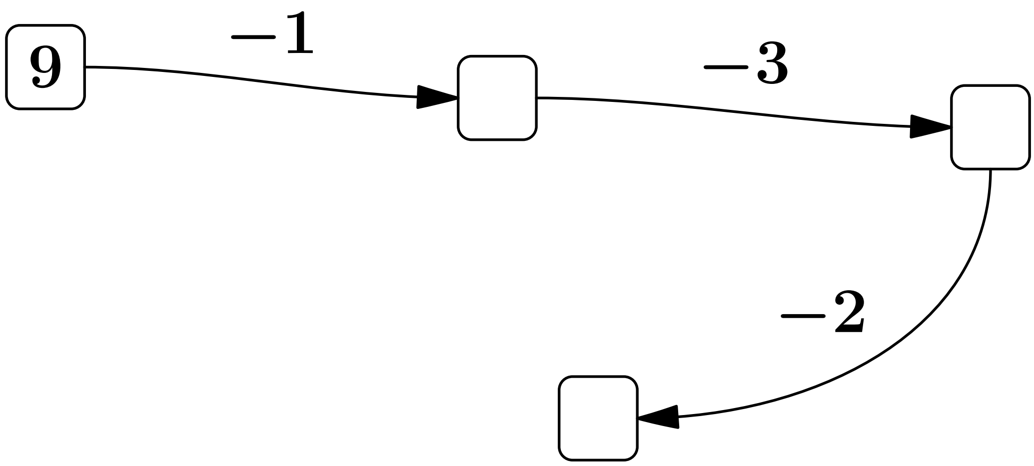

**Odpowiedź:**

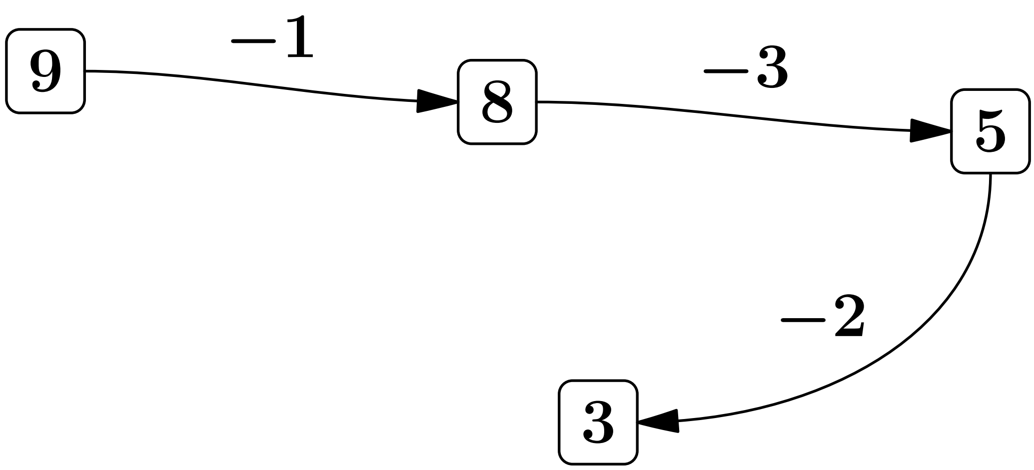



## 95 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie, 0–10

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

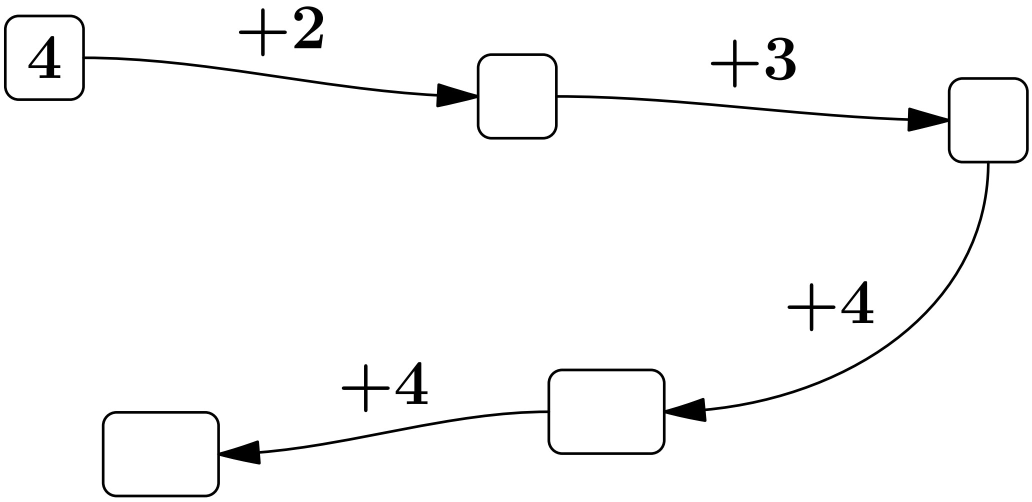



**Odpowiedź:**

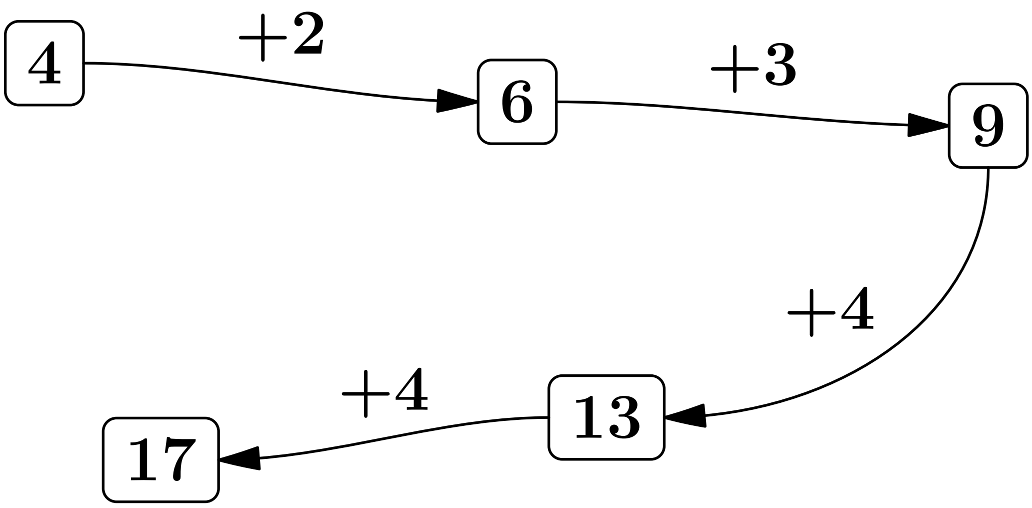


## 96 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 0–4, 0–20

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

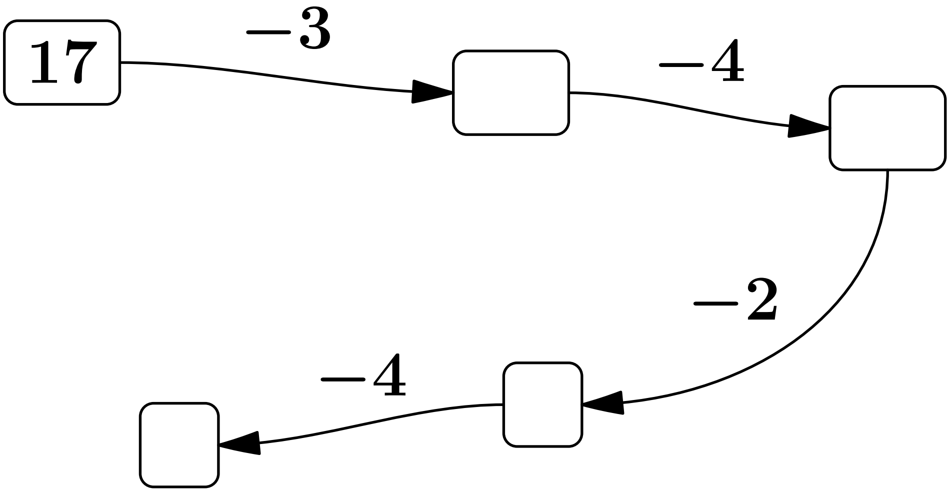



**Odpowiedź:**

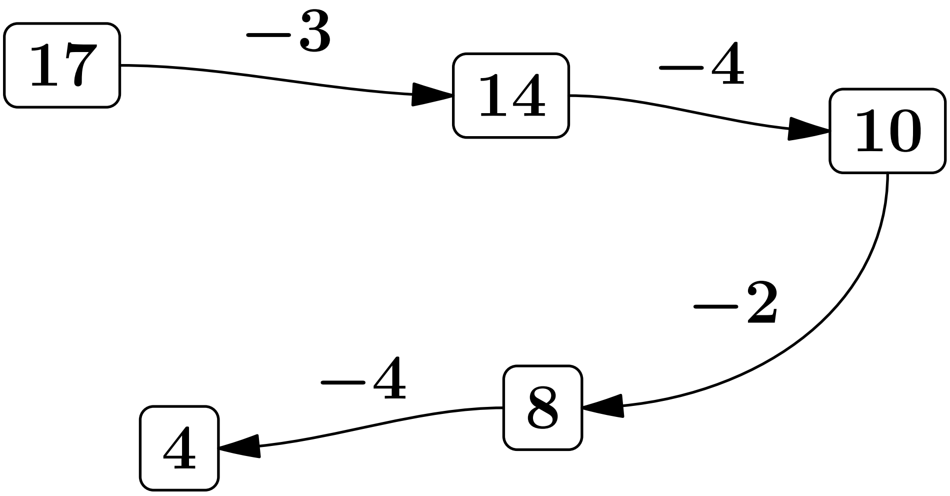


## 97 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 0–4, 0–20

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

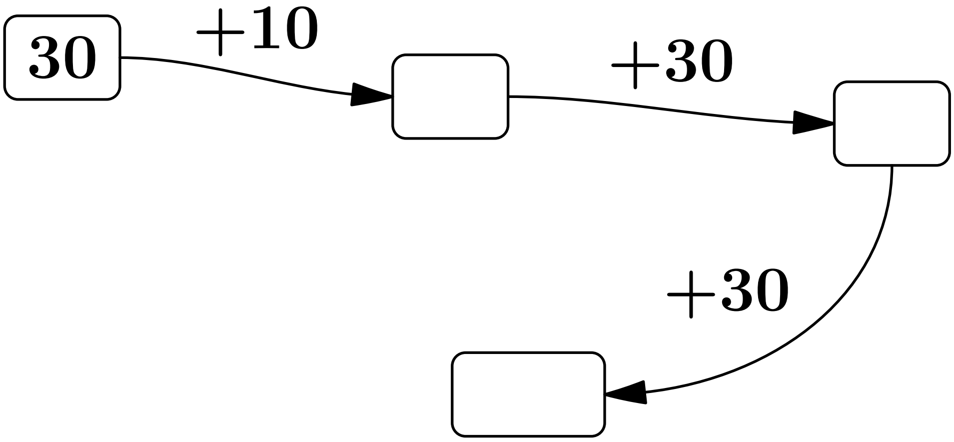



**Odpowiedź:**

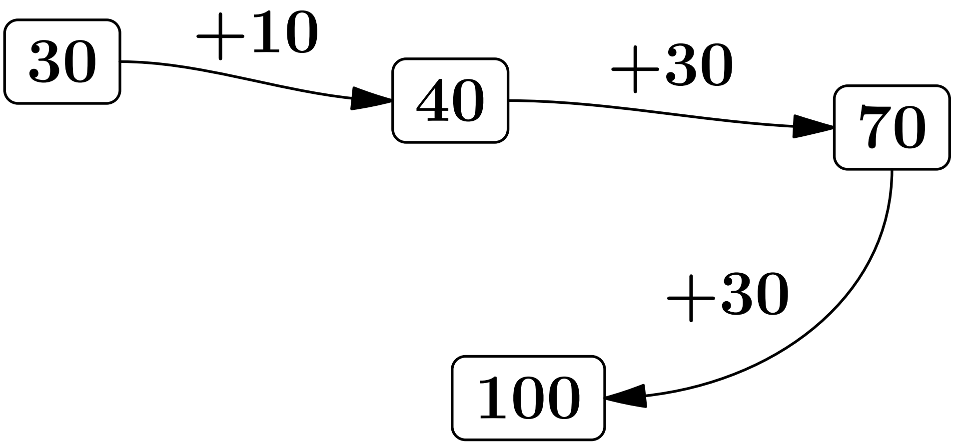


## 98 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie wielokrotności 10, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

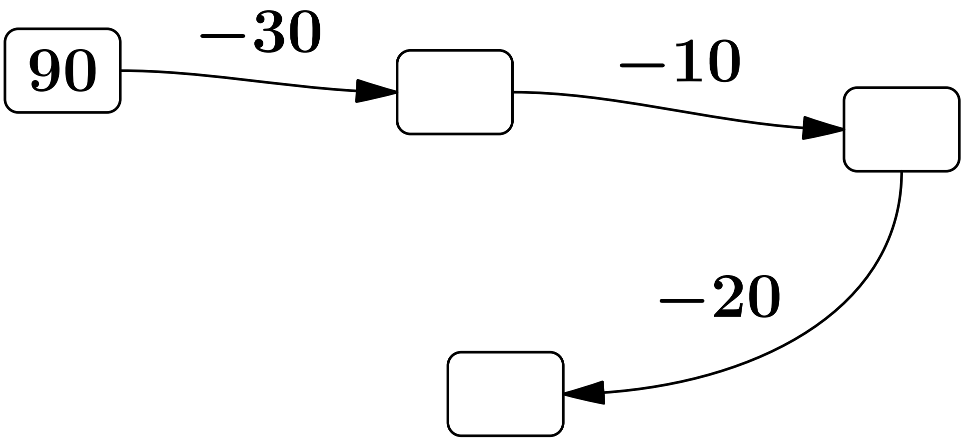



**Odpowiedź:**

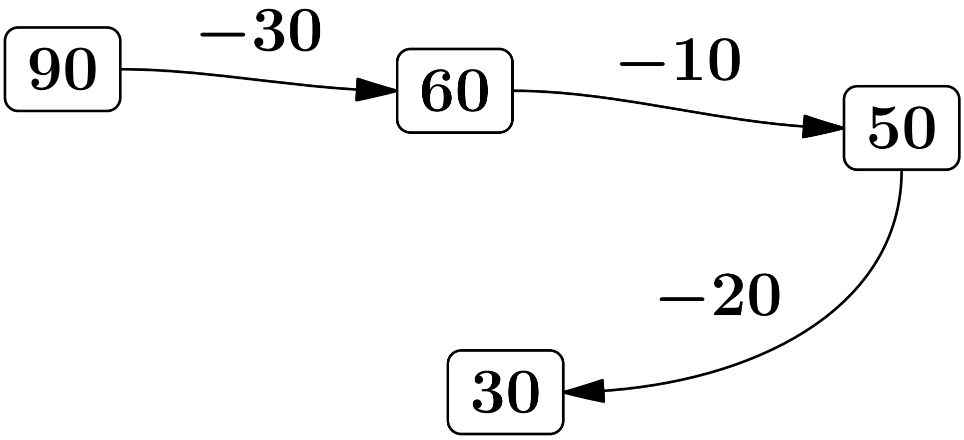



## 99 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie wielokrotności 10, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

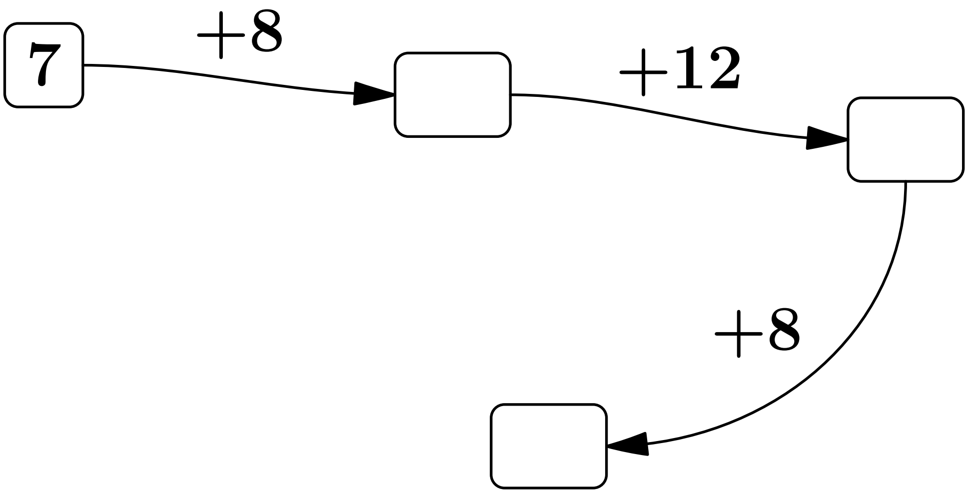



**Odpowiedź:**

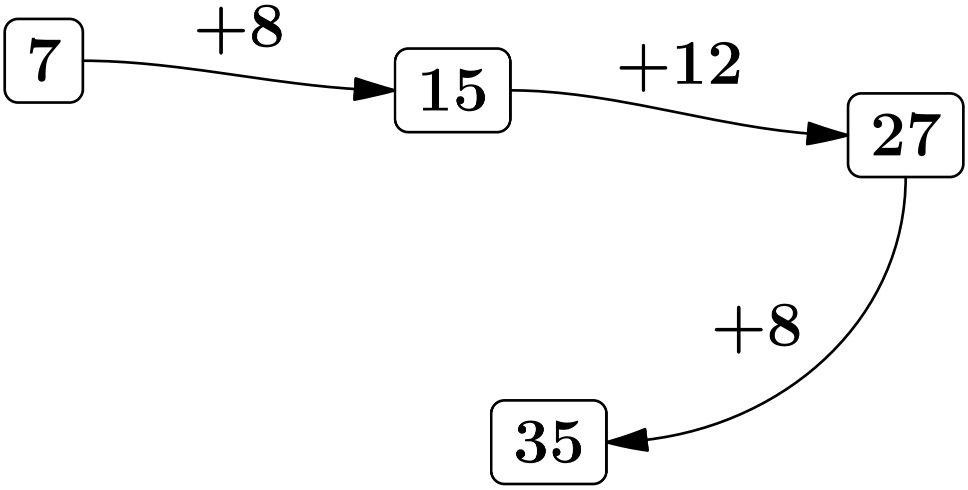



### 100 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–12, 0–45

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

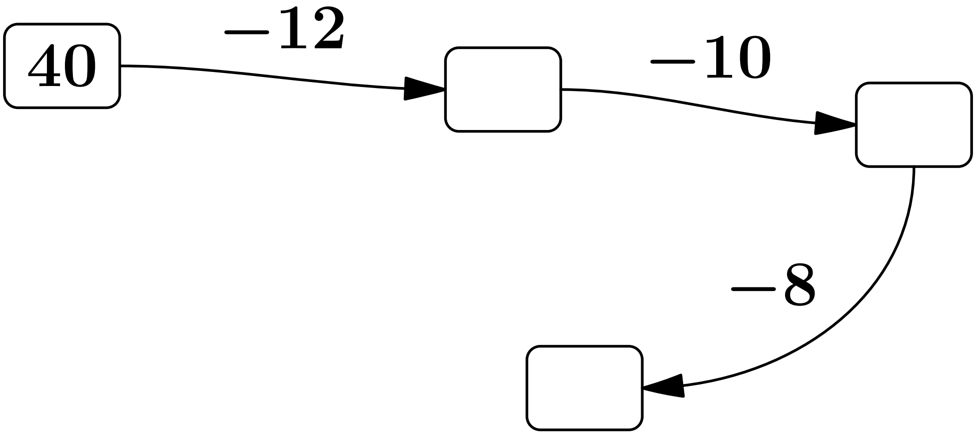



**Odpowiedź:**

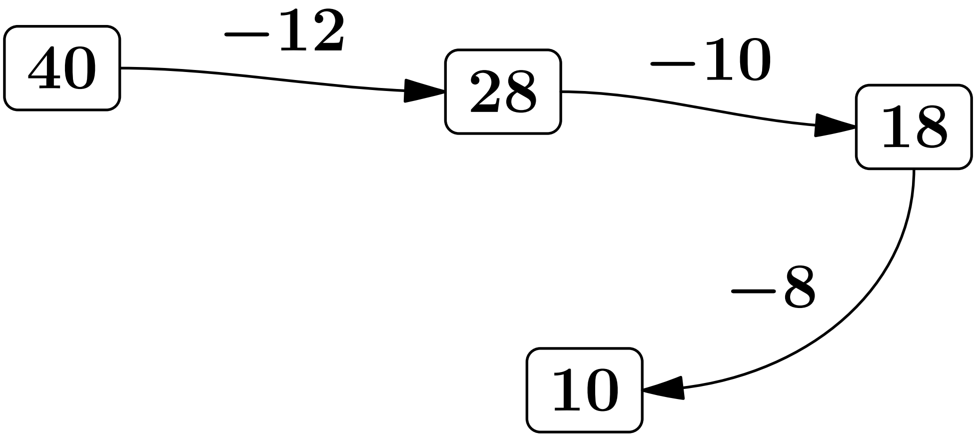


## 101 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–12, 0–45

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

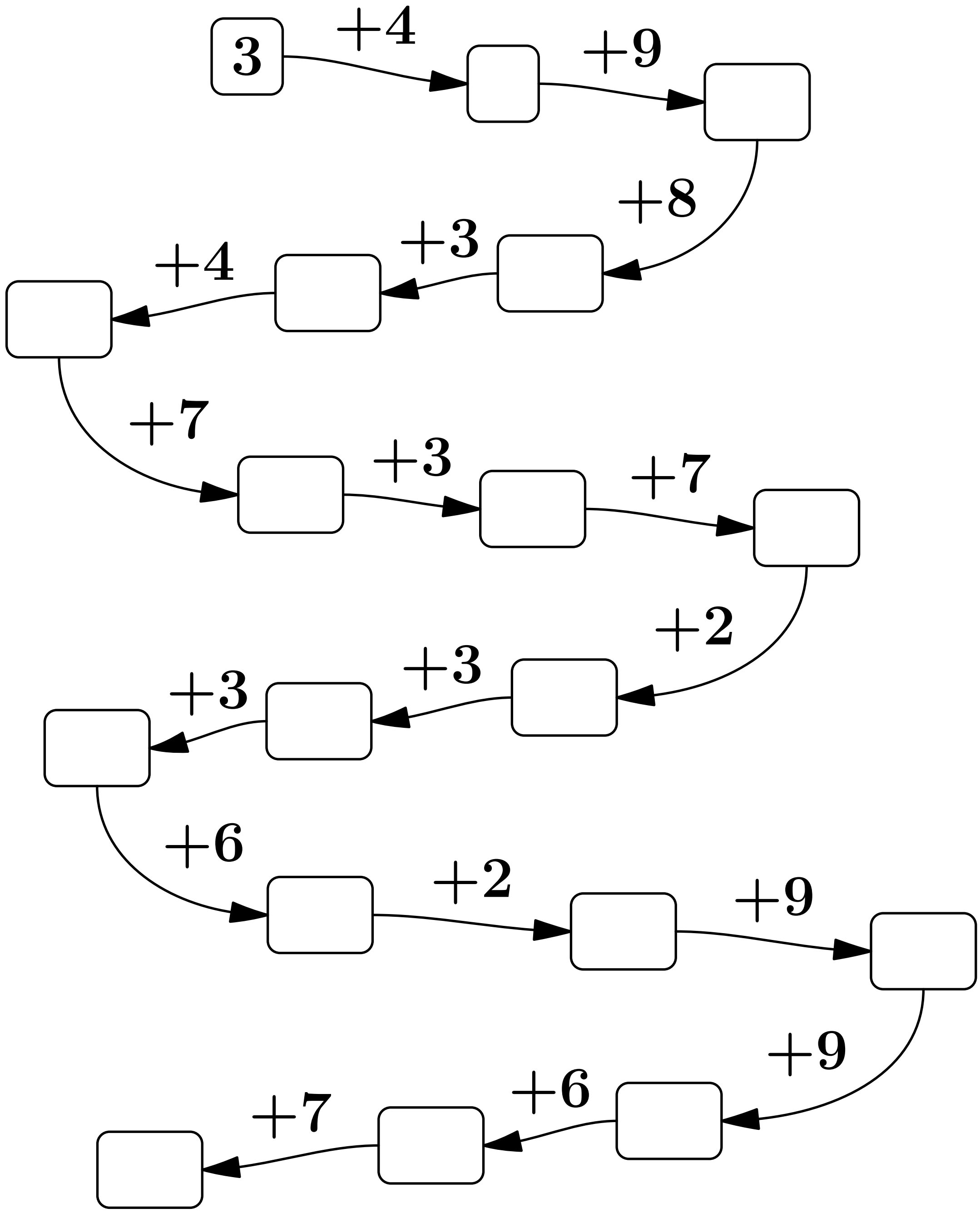



**Odpowiedź:**

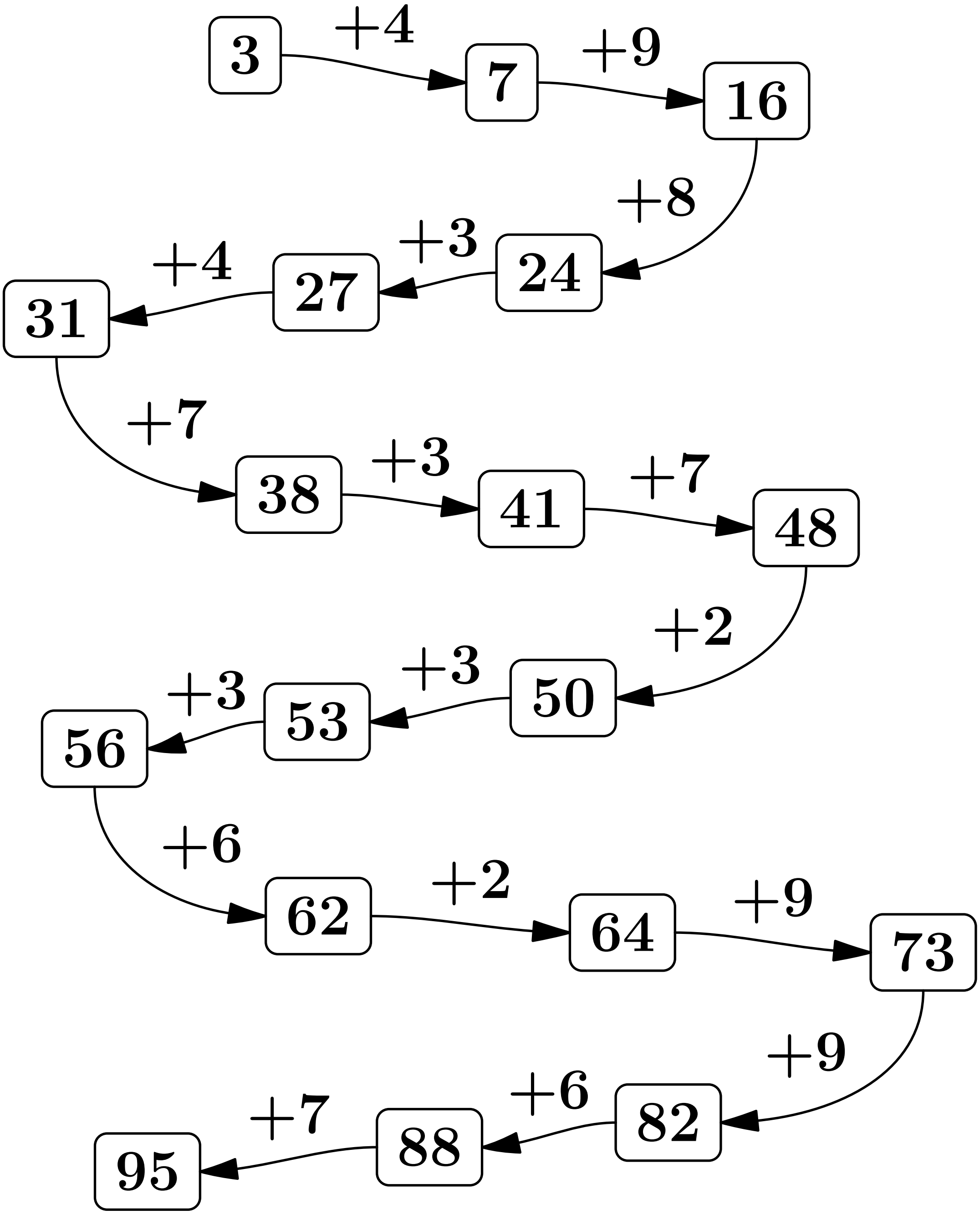


## 102 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 2–9, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

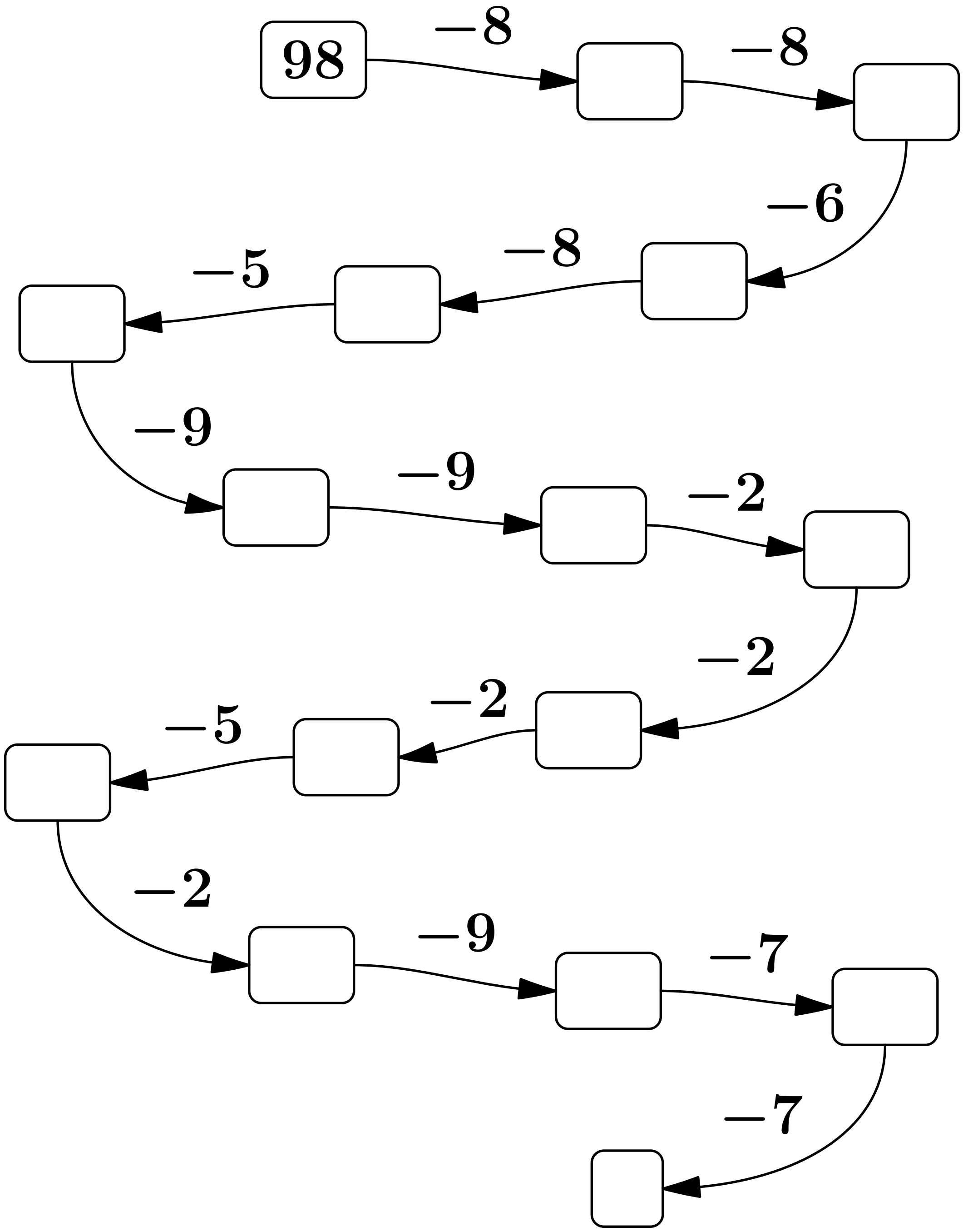



**Odpowiedź:**

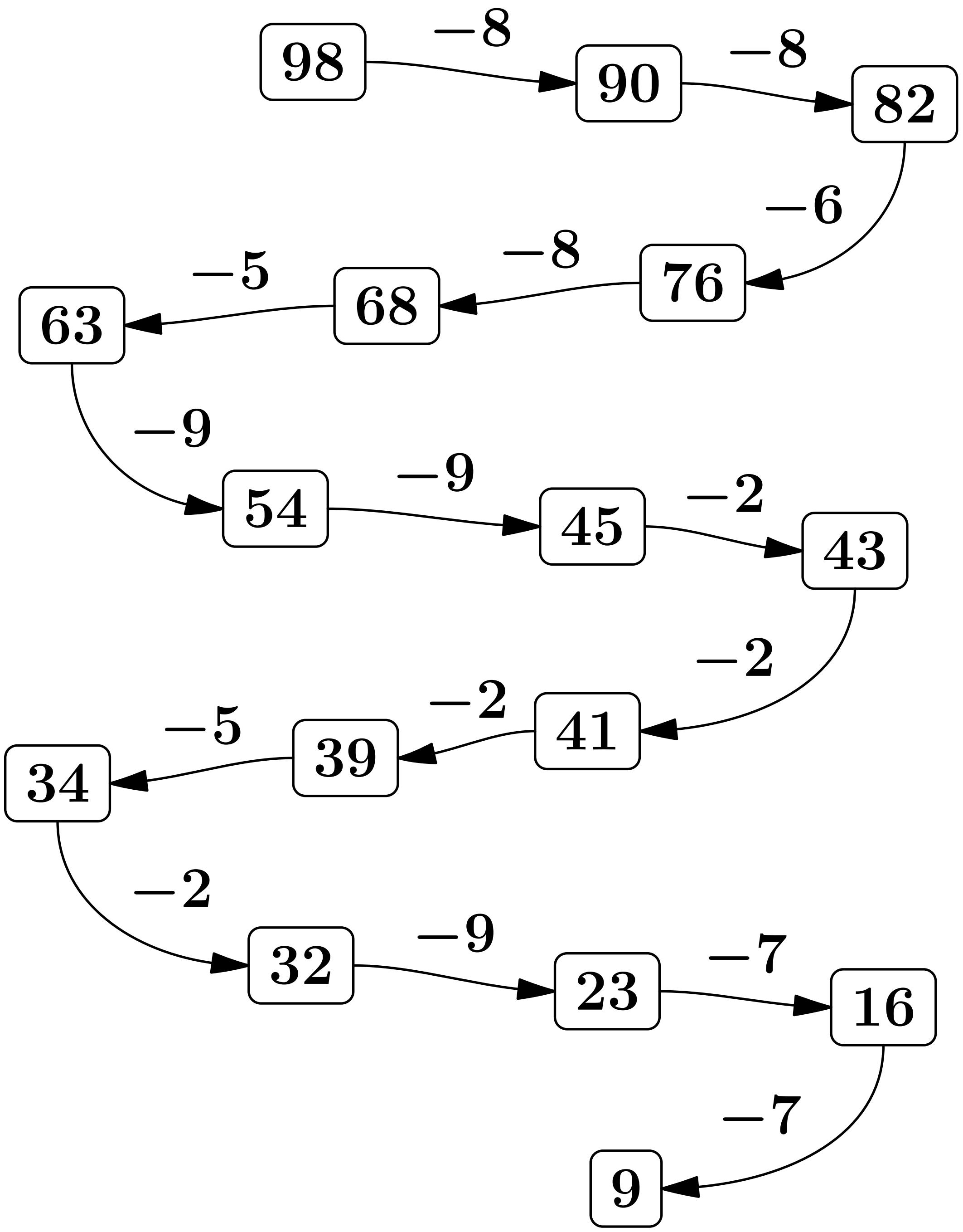

3
+4
7
+9
16
+8
24
+3
27
+4
31
+7
38
+3
41
+7
48
+2
50
+3
53
+3
56
+6
62
+2
64
+9
73
+9
82
+6
88
+7
95

## 103 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 2–9, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

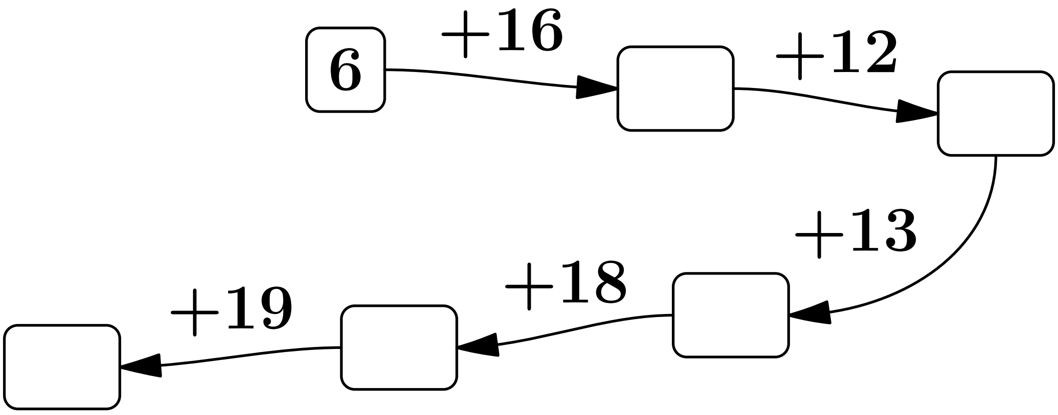



**Odpowiedź:**

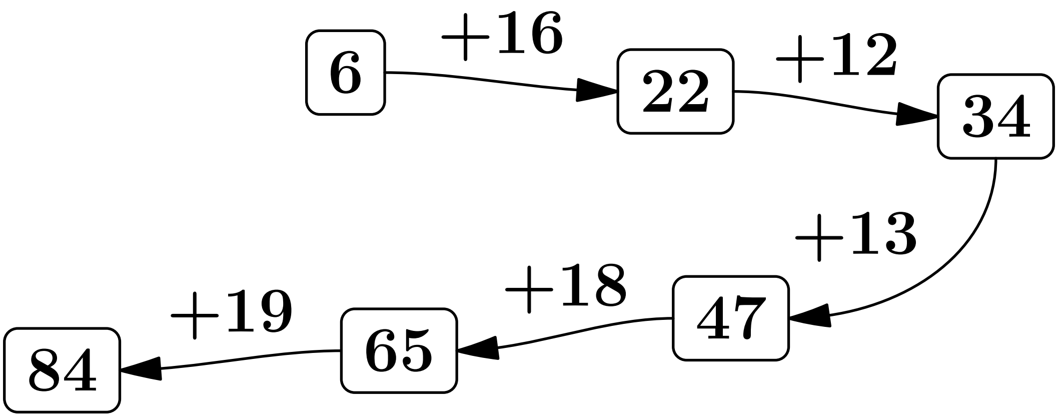

98
−8
90
−8
82
−6
76
−8
68
−5
63
−9
54
−9
45
−2
43
−2
41
−2
39
−5
34
−2
32
−9
23
−7
16
−7
9

## 104 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–20, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

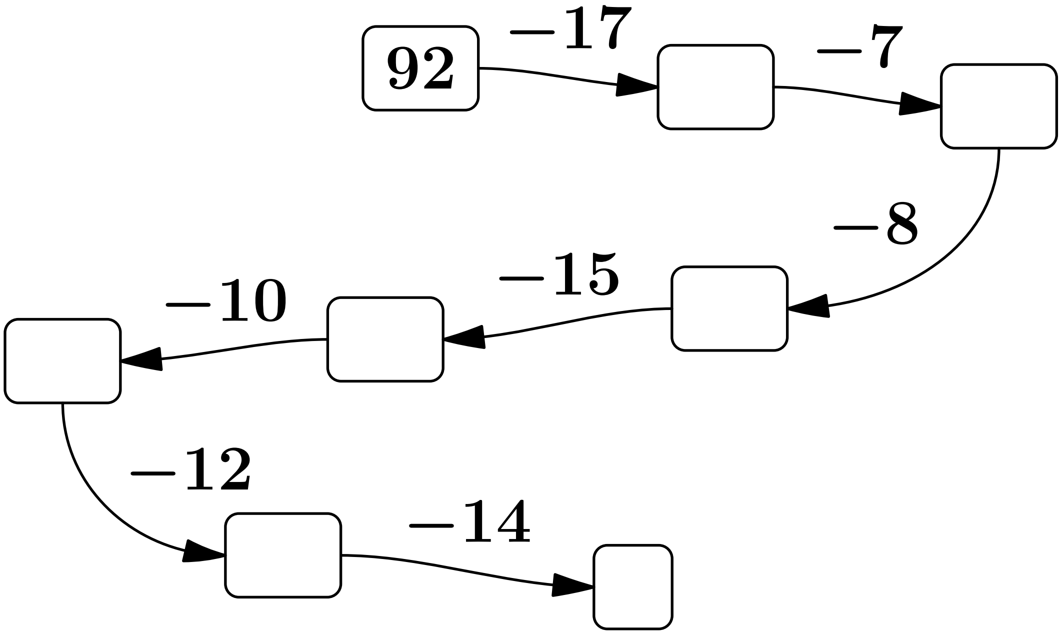



**Odpowiedź:**

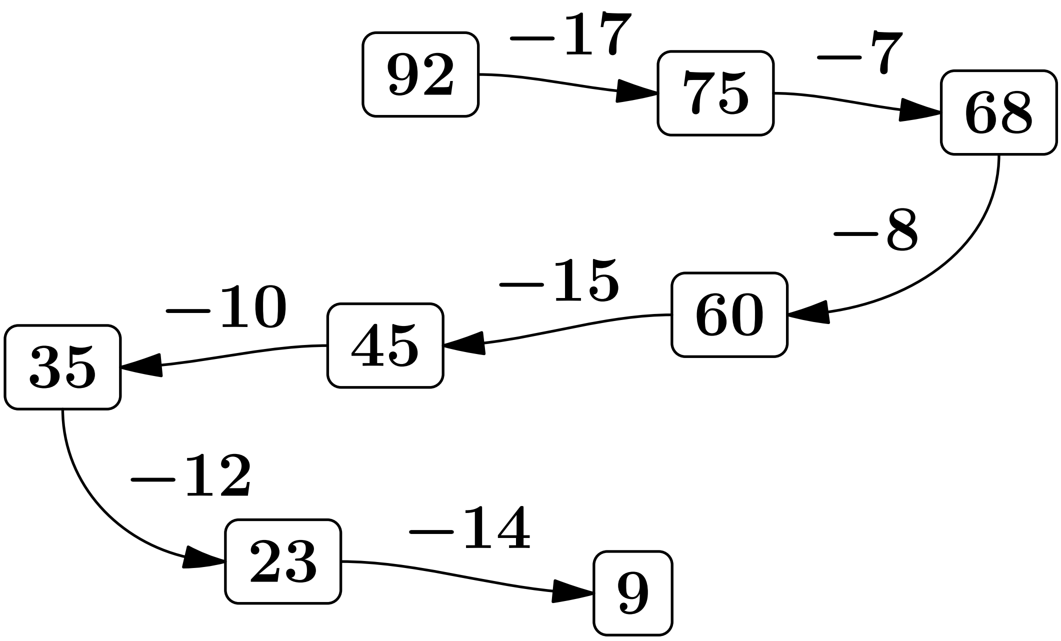


## 105 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–20, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

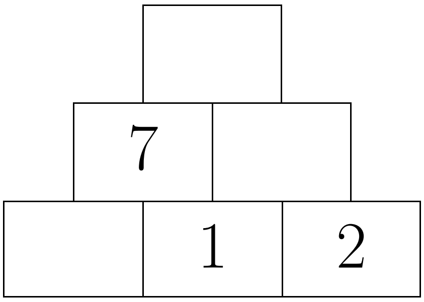



**Odpowiedź:**

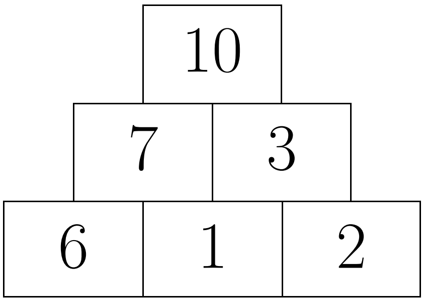


## 106 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 1–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

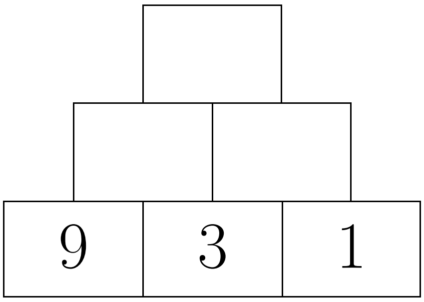



**Odpowiedź:**

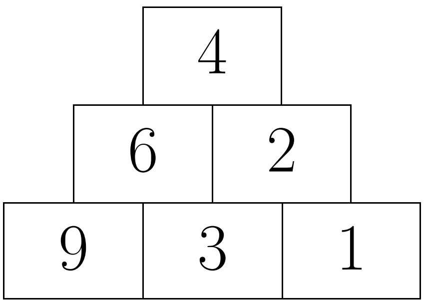



## 107 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 1–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

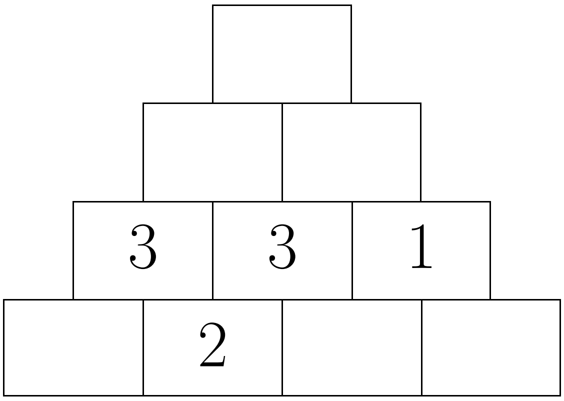



**Odpowiedź:**

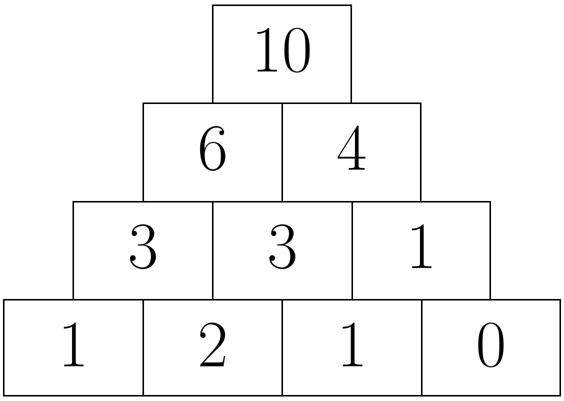


## 108 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

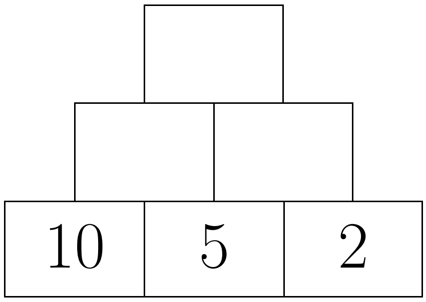



**Odpowiedź:**

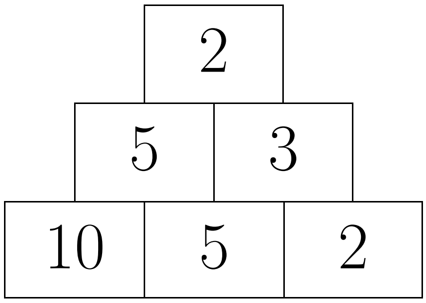


## 109 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.




**Odpowiedź:**



## 110 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | 4 | | |
| 1 | 3 | | 7 |

**Odpowiedź:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | | | |
| 8 | 12 | | |
| 4 | 4 | 8 | |
| 1 | 3 | 1 | 7 |

## 111 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| 9 | 5 | 0 | |
| 18 | | | |

**Odpowiedź:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| −1 | | | |
| 4 | 5 | | |
| 9 | 5 | 0 | |
| 18 | 9 | 4 | 4 |

## 112 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| 16 | 8 | 2 | | 22 | |
| 10 | | | | 4 | |

**Odpowiedź:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 98 | | | | | |
| 50 | 48 | | | | |
| 34 | 16 | 32 | | | |
| 24 | 10 | 6 | 26 | | |
| 16 | 8 | 2 | 4 | 22 | |
| 10 | 6 | 2 | 0 | 4 | 18 |

## 113 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 45 | | 7 | | |
| 97 | | 32 | | 24 |

**Odpowiedź:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | |
| 12 | 7 | | | |
| 25 | 13 | 6 | | |
| 45 | 20 | 7 | 1 | |
| 97 | 52 | 32 | 25 | 24 |

## 114 Zadanie – Dodawanie pisemne, 35

Oblicz poniższe sumy.

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 1 | 8 |
| + | | 6 |
| | | |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 1 | 9 |
| + | 1 | 5 |
| | | |

**Odpowiedź:**

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 1 | 8 |
| + | | 6 |
| | 2 | 4 |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 1 | 9 |
| + | 1 | 5 |
| | 3 | 4 |

## 115 Zadanie – Dodawanie pisemne, 55

Oblicz poniższe sumy.

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 2 | 6 |
| + | 1 | 9 |
| | | |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 3 | 2 |
| + | 2 | 0 |
| | | |

**Odpowiedź:**

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 2 | 6 |
| + | 1 | 9 |
| | 4 | 5 |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 3 | 2 |
| + | 2 | 0 |
| | 5 | 2 |

## 116 Zadanie – Dodawanie pisemne, 100

Oblicz poniższe sumy.

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 4 | 9 |
| + | 3 | 8 |
| | | |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 5 | 7 |
| + | 3 | 9 |
| | | |

**Odpowiedź:**

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 4 | 9 |
| + | 3 | 8 |
| | 8 | 7 |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 5 | 7 |
| + | 3 | 9 |
| | 9 | 6 |

## 117 Zadanie – Dodawanie pisemne, 150

Oblicz poniższe sumy.

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 4 | 2 |
| + | 7 | 6 |
| | | |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 7 | 6 |
| + | 6 | 9 |
| | | |

**Odpowiedź:**

a)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 4 | 2 |
| + | 7 | 6 |
| 1 | 1 | 8 |

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 7 | 6 |
| + | 6 | 9 |
| 1 | 4 | 5 |

## 118 Zadanie – Dodawanie pisemne, 1500

Oblicz poniższe sumy.

a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 6 | 1 | 6 |
| + | 3 | 8 | 0 |
| | | | |

b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 5 | 9 | 7 |
| + | 8 | 7 | 7 |
| | | | |

**Odpowiedź:**

a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 6 | 1 | 6 |
| + | 3 | 8 | 0 |
| | 9 | 9 | 6 |

b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 5 | 9 | 7 |
| + | 8 | 7 | 7 |
| 1 | 4 | 7 | 4 |

## 119 Zadanie – Liczba stron

Wanda rozpoczęła czytanie książki od początku 7 strony, a po dwóch godzinach skończyła czytać na końcu 78 strony.
a) Ile stron przeczytała Wanda?
b) Ile średnio stron czytała Wanda przez jedną godzinę?

**Odpowiedź:** Wanda przeczytała 72 strony, a czytała średnio 36 stron na godzinę.

## 120 Zadanie – Śliwki

Jaś miał 27 śliwek. Następnie zjadł jedną trzecią śliwek. Ile śliwek zostało Jasiowi?

**Odpowiedź:** Jasiowi zostało 18 śliwek.

## 121 Zadanie – Jabłka

Jaś policzył posiadane przez Maćka jabłka – było ich 34 – a następnie wziął połowę posiadanych przez Maćka jabłek i dodał je do swoich zapasów jabłek. Wtedy okazało się, że Jaś posiada 3 razy tyle jabłek, co Maciek. Ile jabłek posiadają razem Jaś i Maciek?

**Odpowiedź:** Jaś i Maciek mają razem 68 jabłek.

## 122 Zadanie – Kamyki

Daria i Nela zebrały na plaży kamyki. Jeśli Daria dałaby Neli 10 kamyków, to miałyby po tyle samo kamyków. A jeśli Nela dałaby Darii 4 kamyki, to Daria miałaby 5 razy tyle kamyków, co Nela. Ile kamyków ma każda z dziewczynek?

**Odpowiedź:** Daria miała 31 kamyków, a Nela 11 kamyków.

## 123 Zadanie – Działania na liczbach ujemnych

Oblicz:
a) $-18 + (-20) =$
b) $-2 - (-178) =$
c) $27 + (-52) =$
d) $-39 - 15 + 27 =$

**Odpowiedź:**
a) $-38$
b) $176$
c) $-25$
d) $-27$

## 124 Zadanie – Winda

W wysokim bloku z wielopoziomowym parkingiem podziemnym jest winda, która porusza się między piętrami. Winda ruszyła z parteru (piętro 0) 12 pięter do góry, a następnie 7 pięter w dół. Po chwili zjechała 7 pięter w dół, a następnie pojechała 21 pięter w górę. Na którym piętrze jest teraz winda, jeśli przed chwilą zjechała 6 pięter w dół?

**Odpowiedź:** Winda znajduje się na 13 piętrze.

## 125 Zadanie – Ślimak

Ślimak, aby wspiąć się na szczyt wieży, musi jeszcze przebyć w pionie odległość 768 cm. Za każdym razem przez 2 godz. ślimak sunie do góry, a następnie odpoczywa przez 1 godz. Wspinając się pokonuje 16 mm na minutę w górę muru, a odpoczywając zsuwa się o 8 mm na minutę w dół. Po ilu godzinach ślimak dotrze na szczyt wieży, jeśli właśnie zaczął się wspinać?

**Odpowiedź:** Ślimak dotrze na szczyt wieży po 14 godz.

## 126 Zadanie – Rodzaje magnetyków

Zaobserwowano, że próbka materiału umieszczona w pobliżu cewki, przez którą płynął prąd elektryczny, była przyciągana do cewki. Po wyłączeniu prądu płynącego przez cewkę magnetyzacja próbki zmniejszyła się do zera. Podkreśl nazwę opisującą rodzaj magnetyka, z którego wykonana jest próbka: diamagnetyk, paramagnetyk.

**Odpowiedź:** Próbkę wykonano z paramagnetyka.

## 127 Zadanie – Jednostki objętości

Przelicz $m^3$ na $km^3$:
20000000 $m^3$ to ......................... $km^3$
1400000 $m^3$ to ......................... $km^3$

Przelicz $m^3$ na $cm^3$:
3 $m^3$ to ......................... $cm^3$
12 $m^3$ to ......................... $cm^3$

Przelicz $mm^3$ na $cm^3$:
35000 $mm^3$ to ......................... $cm^3$
10100 $mm^3$ to ......................... $cm^3$

**Odpowiedź:**
$m^3$ na $km^3$:
0,02 $km^3$
0,0014 $km^3$

$m^3$ na $cm^3$:
3000000 $cm^3$
12000000 $cm^3$

$mm^3$ na $cm^3$:
35 $cm^3$
10,1 $cm^3$

## 128 Zadanie – Rozładowanie akumulatora

Przez 31 godzin rozładowywano akumulator, mierząc płynący prąd amperomierzem. Średnie natężenie prądu podczas rozładowania było równe 59 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez amperomierz. Wynik podaj w kulombach.

**Odpowiedź:** Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 6580$ C.

## 129 Zadanie – Alarm samochodowy

Przez pewien alarm samochodowy w trybie czuwania przepływa prąd o średnim natężeniu 10 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez ten układ w trakcie 13 dób. Wynik podaj w kulombach i amperogodzinach.

**Odpowiedź:** Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 3{,}12$ Ah $\approx 11200$ C.

## 130 Zadanie – Opornik

Gdy przez opornik płynął stały prąd o natężeniu 10 mA, napięcie mierzone między końcówkami opornika było równe 0,7 V.
a) Oblicz opór opornika.
b) Zakładając, że opornik spełnia prawo Ohma, oblicz natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy napięcie mierzone między jego końcówkami jest równe 4,2 V.

**Odpowiedź:**
a) Opór $R = U_1/I_1 = 70\ \Omega$.
b) Natężenie prądu $I_2 = U_2/R = I_1U_2/U_1 = 60$ mA.

## 131 Zadanie – Odległość do diody

Cienka soczewka o ogniskowej 6 cm musi być odsunięta na odległość 7 cm od ekranu, aby uzyskać na nim ostry obraz świecącej diody znajdującej się na osi optycznej soczewki.
a) Oblicz odległość od soczewki do diody.
b) Oblicz stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu.

**Odpowiedź:**
a) Odległość od soczewki do diody to 42 cm.
b) Stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu to 6.

## 132 Zadanie – Polaryzacja odbitego światła

Studenci powinni określić materiał, z którego została wykonana sześcienna bryła. Mają tego dokonać tylko na podstawie badania polaryzacji odbitego od jej ściany światła. Dysponują wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskali, gdy kąt między normalną do ściany a odbitą wiązką był równy 67,6°. Na podstawie odpowiednich obliczeń wskaż, z którego z następujących materiałów najprawdopodobniej wykonano bryłę (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): fluorek litu (1,39), diament (2,42), polistyren (1,6). Bryła znajduje się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

**Odpowiedź:** Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 2{,}43$. A więc materiałem jest najprawdopodobniej diament.

## 133 Zadanie – Polaryzacja i geolog

Młoda geolog podczas wycieczki w Sudetach znalazła fragment kryształu. W celu jego identyfikacji badała polaryzację odbitego od ściany kryształu światła. Dysponowała wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskała, gdy kąt między normalną do ściany kryształu a odbitą wiązką był równy 62,5°. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ najbardziej prawdopodobny minerał, którego fragment był badany. Wybierz spośród (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): diament (2,42), fluoryt (1,43), cyrkon (1,92). Kryształ znajdował się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

**Odpowiedź:** Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 1{,}92$. A więc minerałem jest najprawdopodobniej cyrkon.

## 134 Zadanie – Jednostki powierzchni

Przelicz km$^2$ na m$^2$:
86 km$^2$ to ......................... m$^2$
318 km$^2$ to ......................... m$^2$

Przelicz m$^2$ na cm$^2$:
14 m$^2$ to ......................... cm$^2$
330 m$^2$ to ......................... cm$^2$

Przelicz mm$^2$ na cm$^2$
1500 mm$^2$ to ......................... cm$^2$
30020 mm$^2$ to ......................... cm$^2$

**Odpowiedź:**
km$^2$ na m$^2$:
86000000 m$^2$
318000000 m$^2$

m$^2$ na cm$^2$:
140000 cm$^2$
3300000 cm$^2$

mm$^2$ na cm$^2$:
15 cm$^2$
300,2 cm$^2$

## 135 Zadanie – Prostokąty

O ile zmieni się pole prostokąta o bokach 12 cm i 30 cm, jeśli pierwszy bok zwiększymy 9 razy, a drugi bok zmniejszymy 2 razy?

**Odpowiedź:** Różnica powierzchni tych prostokątów wynosi 1260 cm$^2$

## 136 Zadanie – Boki prostokątów

Oblicz długość:
a) boku kwardatu o polu powierzchni 36 m$^2$.
b) boku prostokąta o polu powierzchni 24 m$^2$, którego drugi z boków jest równy 6 m.
c) boku kwadratu o obwodzie 16 m.
d) boku prostokąta o obwodzie 32 m, którego drugi z boków jest równy 4 m.

**Odpowiedź:**
a) 6 m.
b) 4 m.
c) 4 m.
d) 12 m.

## 137 Zadanie – Jednostki długości

Przelicz kilometry na metry:
204 km to ......................... m
696 km to ......................... m

Przelicz metry na centymetry:
11 m to ......................... cm
1002 m to ......................... cm

Przelicz milimetry na centymetry:
290 mm to ......................... cm
3002 mm to ......................... cm

**Odpowiedź:**
kilometry na metry:
204000 m
696000 m

metry na centymetry:
1100 cm
100200 cm

milimetry na centymetry:
29 cm
300,2 cm

## 138 Zadanie – Jednostki czasu

Przelicz minuty na sekundy:
2 min. to ......................... s
171 min. to ......................... s

Przelicz godziny na minuty:
8 godz. to ......................... min.
13 godz. to ......................... min.

Przelicz sekundy na godziny:
14400 s to ......................... godz.
79200 s to ......................... godz.

**Odpowiedź:**
minuty na sekundy:
120 s
10260 s

godziny na minuty:
480 min.
780 min.

sekundy na godziny:
4 godz.
22 godz.

## 139 Zadanie – Prędkość człowieka

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 24000 metrów w ciągu 75 minut?

**Odpowiedź:** Człowiek porusza się z prędkością 19,2 km/h.

## 140 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 342 m/s.

**Odpowiedź:** Minimalna odległości od ściany to około 13,7 m.

## 141 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 3,8 m/s. Maciek, który wyruszył 13 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 26 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 494 s?

**Odpowiedź:** Maciek jechał z prędkością 4,1 m/s.

## 142 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 190 cm/s przez 13 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 210 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 180 cm/s przez 5,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

**Odpowiedź:** Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 186 cm/s.

## 143 Zadanie – Samochód

Samochód pana Krzysztofa spala 5 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 4 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 2 zł?

**Odpowiedź:** Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 10 pełnych km.

## 144 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 17,4 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 2088 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

**Odpowiedź:** Prędkość prądu rzeki to 3,6 km/h.

## 145 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 11 mm zakończony jest otworem o średnicy 2 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 40 cm/s?

**Odpowiedź:** Szybkość wody w otworze to ok. 1210 cm/s.

## 146 Zadanie – Odcinki

Odcinek w skali 1:12 ma 34 cm długości. Jaką długość ma ten odcinek w skali 20:1?

**Odpowiedź:** Odcinek ma długość 8160 cm.

## 147 Zadanie – Fotografia

Łazik marsjański przesłał zdjęcie znalezionego obiektu do analizy. Na zdjęciu w skali 1:40 obiekt miał 6,5 mm. Aby go dokładniej zbadać, powiększono zdjęcie. Jaką wielkość będzie miał ten obiekt w skali 4:1?

**Odpowiedź:** Na powiększonym zdjęciu obiekt będzie miał długość 1040 mm.

## 148 Zadanie – Sonda

Sonda wykonała zdjęcia powierzchni Marsa. Po analizie obrazów stwierdzono, że na zdjęciach krater wulkanu miał średnicę 33,6 cm, a wysokość wulkanu była równa 1,6 cm. Jakie były rzeczywiste rozmiary tego wulkanu w kilometrach, jeśli zdjęcia zostały wykonane w skali 1:35000?

**Odpowiedź:** Wysokość wulkanu jest równa 0,56 km, a średnica krateru ma 11,76 km.

## 149 Zadanie – Przyssawka

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 17 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1023 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s$^2$.

**Odpowiedź:** Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 237 kg.

## 150 Zadanie – Pod wodą

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 45 m. Przyjmij gęstość wody 1012 kg/m$^3$ oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

**Odpowiedź:** Ciśnienie wody jest równe ok. 446 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

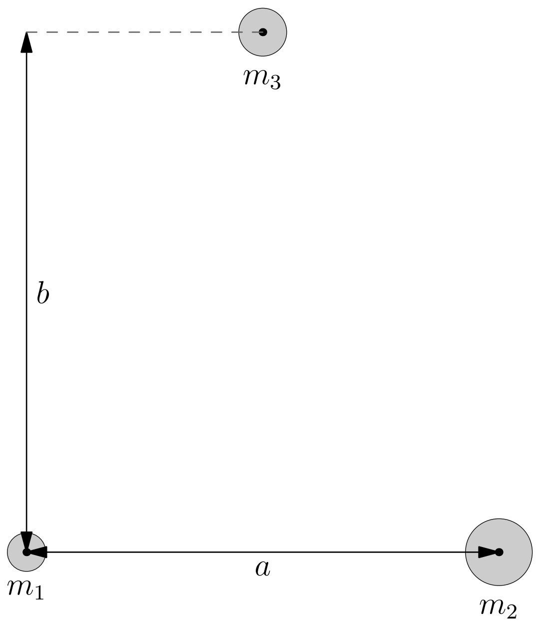
## 151 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 2 cm, a duży średnicę 36 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 800 kg leżącą na dużym tłoku?

**Odpowiedź:** Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 2,47 kg.

## 152 Zadanie – Środek masy

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0{,}3$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg, $m_3 = 0{,}6$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 4$ cm, a wysokość to $b = 6$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy $m_1$.




**Odpowiedź:** Środek masy znajduje się w punkcie $S = (x_c, y_c)$, gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}86 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 1{,}71 \text{ cm}.$$

## 153 Zadanie – Lot mionu

Mion leci ze stałą prędkością $2{,}4 \cdot 10^8$ m/s względem laboratorium. W układzie związanym z mionem rozpadł się on po czasie 1,4 $\mu$s od początku lotu. Ile czasu trwał lot mionu w układzie związanym z laboratorium? Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

**Odpowiedź:** W układzie związanym z laboratorium czas lotu mionu

$$t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t_0 \approx 2{,}33\ \mu\text{s}$$

gdzie $\beta = v/c$, $v$ jest prędkością mionu, a $c$ prędkością światła w próżni.

## 154 Zadanie – Jednostki temperatury

Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Celsjusza na skalę Kelwina:
$-11°$C to ..... K.
$-16°$C to ..... K.
Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Fahrenheita na skalę Kelwina:
41°F to ...... K.
$-4°$F to ...... K.

**Odpowiedź:** Temperatury w Kelwinach:
262,15 K
257,15 K

278,15 K
253,15 K

## 155 Zadanie – Temperatury

W różnych krajach stosuje się inne skale temperatur, np. w Polsce temperaturę podaje się w skali Celsjusza, a w USA w skali Fahrenheita. Naukowcy używają najczęściej skali Kelwina. Aby dowiedzieć się, jak przeliczyć temperatury, zapoznaj się z poniższymi wzorami, w których $T_K$ oznacza temperaturę podaną w skali Kelwina, $T_C$ oznacza temperaturę podaną w stopniach Celsjusza, a $T_F$ oznacza temperaturę podaną w stopniach Fahrenheita.

$$T_K = 273{,}15 + T_C \qquad\qquad T_C = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

Dwaj chłopcy, Adaś z Polski i John z USA, mierzyli codziennie temperaturę przed domem, otrzymując następujące wyniki:
Adaś: -8°C, -15°C, -12°C, -14°C.
John: 5°F, 23°F, 14°F, 41°F.
Obaj chłopcy biorą udział w konkursie badawczym i muszą przesłać wyniki swoich pomiarów w skali Kelwina.
Pytanie 1. Jakie będą wartości uzyskanych przez nich temperatur w skali Kelwina?
Pytanie 2. Ile wynosi średnia temperatura u każdego z chłopców? Odpowiedź podaj w skali Kelwina.

**Odpowiedź:** Temperatury Adasia (w Kelwinach): 265,15 K, 258,15 K, 261,15 K, 259,15 K.
Temperatury Johna: 258,15 K, 268,15 K, 263,15 K, 278,15 K.
Średnia temperatura Adasia (w Kelwinach): 260,9 K.
Średnia temperatura Johna (w Kelwinach): 266,9 K.

## 156 Zadanie – Średnia temperatura

Stacja meteorologiczna prowadziła przez tydzień pomiary średniej dobowej temperatury, uzyskując następujące wyniki: -2°C, 2°C, 3°C, -3°C, 1°C, -1°C, -7°C.
Ile wynosi średnia temperatura w tym tygodniu?

**Odpowiedź:** Średnia temperatura wynosi: -1°C

## 157 Zadanie – Zmiana energii wewnętrznej układu

W pewnym procesie dostarczyliśmy do układu ciepło o wartości 290 J, wykonaliśmy pracę nad tym układem (np. sprężając go) o wartości 100 J oraz odebraliśmy od układu ciepło o wartości 200 J, a układ wykonał pracę o wartości 90 J. Oblicz zmianę energii wewnętrznej tego układu wskutek opisanego procesu.

**Odpowiedź:** Zmiana energii wewnętrznej układu: $\Delta U = Q_1 + W_1 + Q_2 + W_2 = 100$ J. Zauważ, że $Q_2 < 0$ oraz $W_2 < 0$.

## 158 Zadanie – Szybkość średnia atomu

W pewnym ośrodku o temperaturze $-13$°C, poruszają się atomy neonu. Oblicz szybkość średnią kwadratową, z jaką poruszają się cząsteczki tego gazu, wiedząc, że jego masa molowa wynosi 20,2 g/mol.

**Odpowiedź:** Szybkość średnia kwadratowa neonu jest równa w przybliżeniu 17,9 m/s.

## 159 Zadanie – Pęcherzyk powietrza

Z dna jeziora o głębokości 28,4 m odrywa się pęcherzyk powietrza o promieniu 5,4 mm. Temperatura na dnie jeziora wynosi 4°C. Pęcherzyk po dotarciu na powierzchnię jeziora zmienił się w półsferyczną bańkę o promieniu 13 mm. Jaka temperatura panuje na powierzchni jeziora, jeśli ciśnienie atmosferyczne wynosi 100 kPa? Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1000 kg/m$^3$, a gęstość powietrza w warunkach normalnych 1,29 kg/m$^3$. Pomiń wpływ napięcia powierzchniowego na ciśnienie w pęcherzyku. Załóż, że temperatura powietrza w pęcherzyku jest zawsze równa temperaturze otoczenia.

**Odpowiedź:** Temperatura na powierzchni jeziora wynosi około 7,4°C.

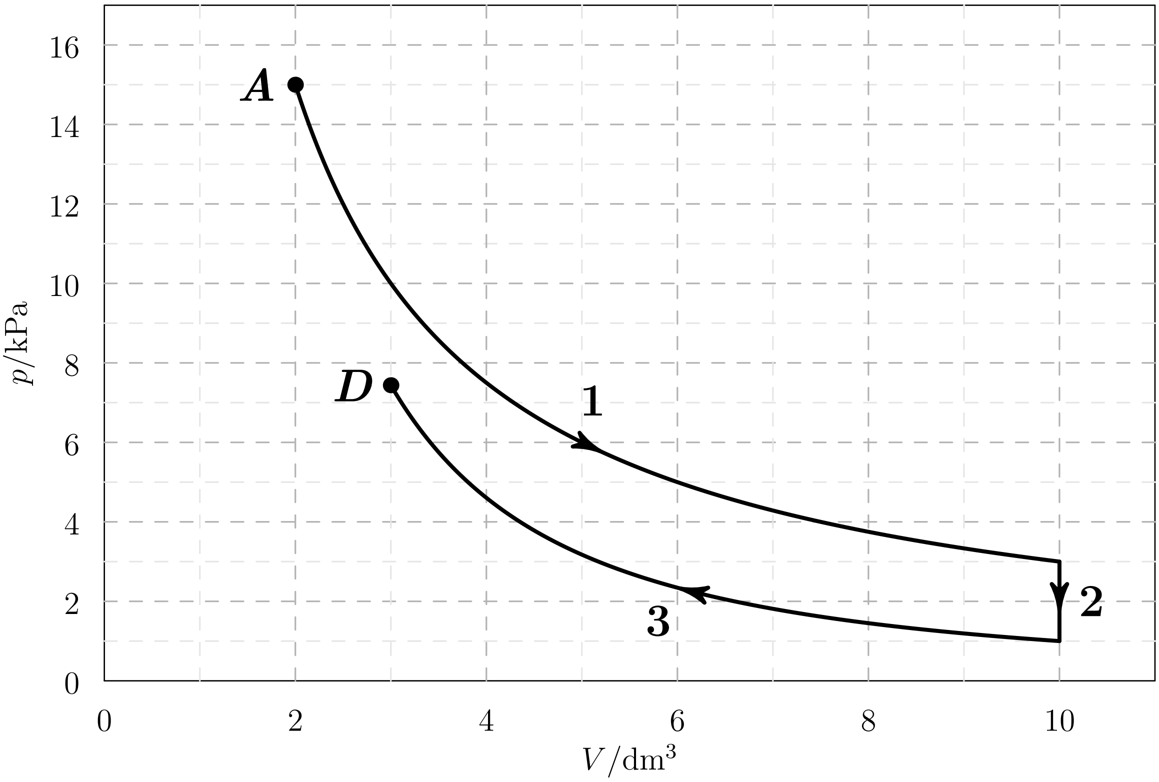
## 160 Zadanie – Entropia i porcja wody

Oblicz zmianę entropii wody o masie 46 g podczas przemiany jej stanu z ciekłego (płyn) w stan gazowy (para) w temperaturze wrzenia pod ciśnieniem 1 atm. Przyjmij ciepło parowania równe 2257 kJ/kg.

**Odpowiedź:** Zmiana entropii: $\Delta S \approx 103822$ J / 373 K $\approx 278$ J/K.

## 161 Zadanie – Przemiany gazowe

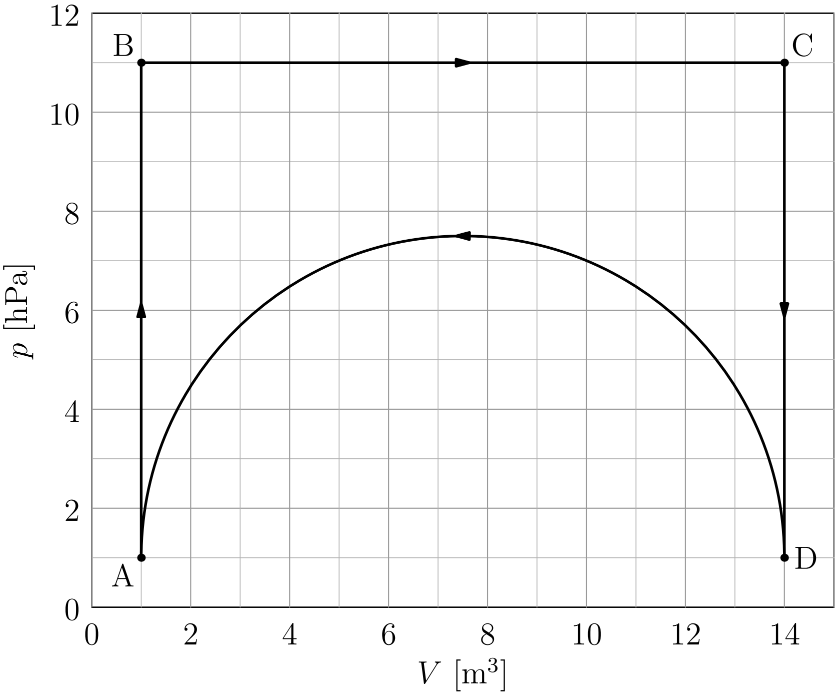
Ustalona porcja gazowego neonu przeszła przemiany 1, 2 i 3 przedstawione na poniższym wykresie, gdzie $p$ oznacza ciśnienie gazu, a $V$ jego objętość. Początkowo parametry gazu opisywał punkt $A$. Wiadomo, że przemiana 3 była adiabatyczna.
a) Podaj nazwy przemian 1 i 2. W przypadku przemiany 1 swoją hipotezę dotyczącą rodzaju przemiany sprawdź w 3 różnych punktach.
b) Dla każdej z przemian wskaż wielkości, które są zawsze równe 0 w trakcie tej przemiany.
c) Czy gaz w punkcie $D$ ma większą temperaturę niż w punkcie $A$?
d) Czy z punktu $D$ może ta porcja gazu dotrzeć do punktu $A$ w przemianie izobarycznej?




**Odpowiedź:**
a) Przemiana 1 to przemiana izotermiczna, gdyż $pV$ ma zawsze tę samą wartość, np. $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ (w jednostkach kPa·dm$^3$). Przemiana 2 jest przemianą izochoryczną.
b) W trakcie przemiany 1 zmiana temperatury oraz zmiana energii wewnętrznej są równe 0, w trakcie przemiany 2 zmiana objętości oraz praca (wykonana nad gazem lub wykonana przez gaz), a w trakcie przemiany 3 wymienione z otoczeniem ciepło.
c) Nie. Iloczyn $pV$ w punkcie $A$ jest równy $2 \cdot 15 = 30$, a w punkcie $D$ jest mniejszy niż $8 \cdot 3 = 24$ (w jednostkach kPa·dm$^3$).
d) Nie, gdyż ciśnienia w tych punktach są różne.

## 162 Zadanie – Praca wykonana przez gaz

Oblicz pracę wykonaną przez gaz podczas jednego cyklu przedstawionego na wykresie poniżej. Fragment DA ma kształt półokręgu.




**Odpowiedź:** Praca wykonana przez gaz wynosi około 6370 J.

## 163 Zadanie – Przemiany gazu doskonałego

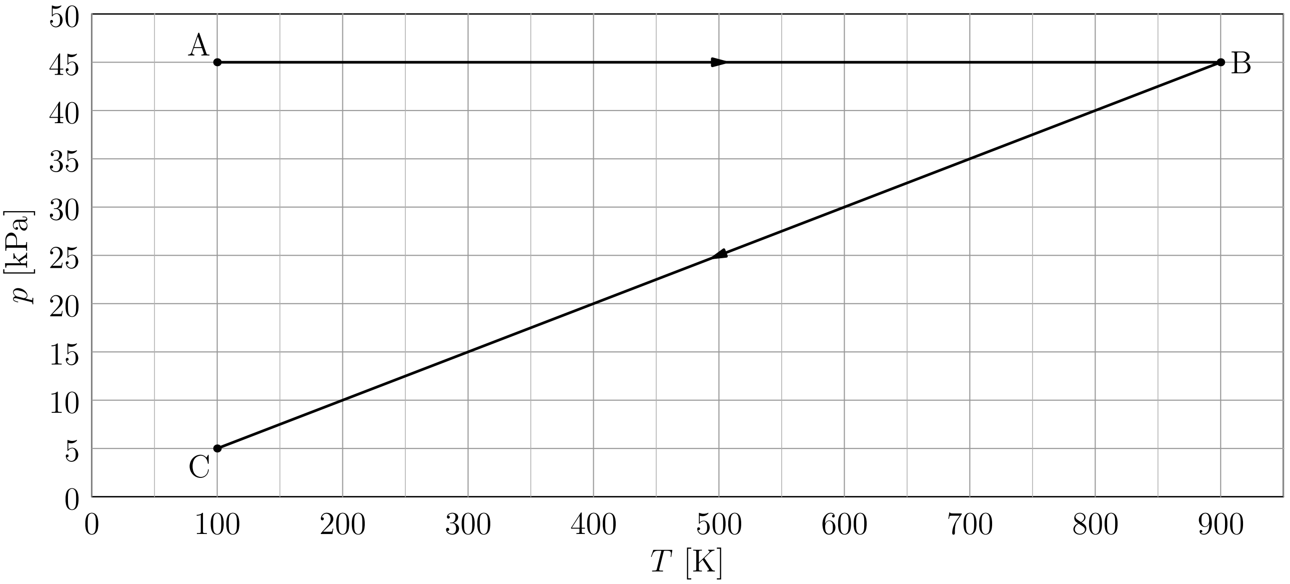
W szczelnym naczyniu, zamkniętym tłokiem, znajduje się hel. Masa gazu jest równa 2 kg, a początkowa temperatura 18°C. Gaz poddano przemianie izobarycznej, dostarczając mu 800 J ciepła. Jaką pracę wykonał hel podczas rozprężania? Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 4 g/mol.

**Odpowiedź:** Gaz wykonał pracę około 320 J.

## 164 Zadanie – Ciepło, energia wewnętrzna i praca w przemianach gazowych

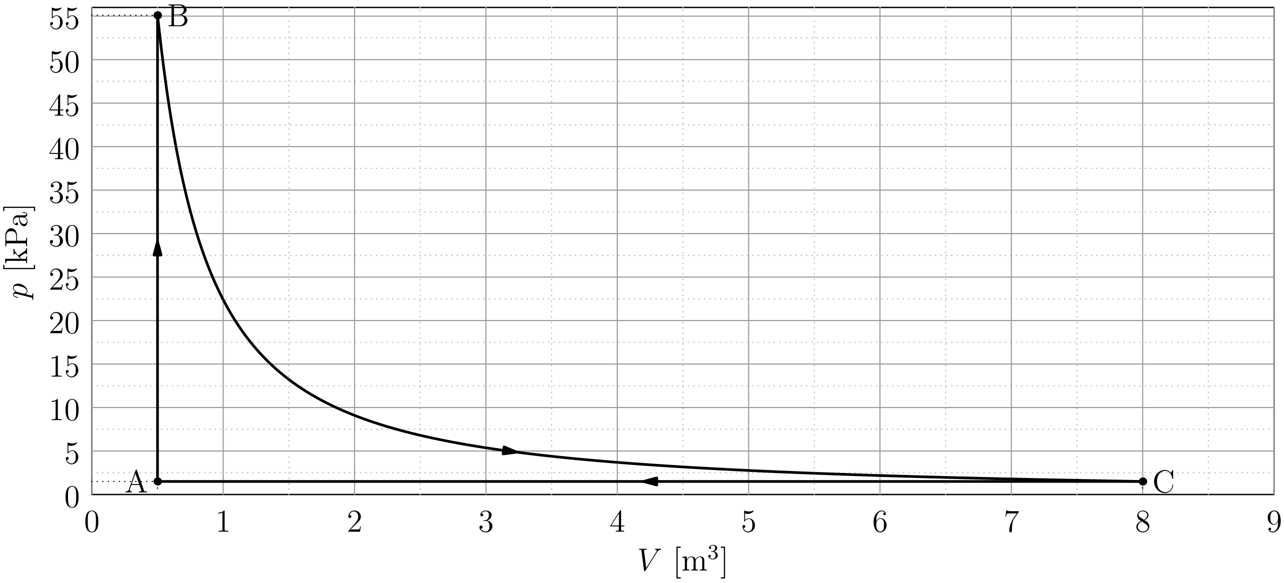
Oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu doskonałego, pracę wykonaną przez gaz oraz ciepło wymienione z otoczeniem podczas przemiany przedstawionej na wykresie poniżej. Przyjmij, że zmiana objętości wyniosła 0,25 $m^3$.




**Odpowiedź:** Podczas przemiany energia wewnętrzna gazu nie zmieniła się. Praca jaką wykonał gaz wynosi 11250 J, z otoczenia pobrał 11250 J ciepła.

## 165 Zadanie – Ciepło oddane i pobrane

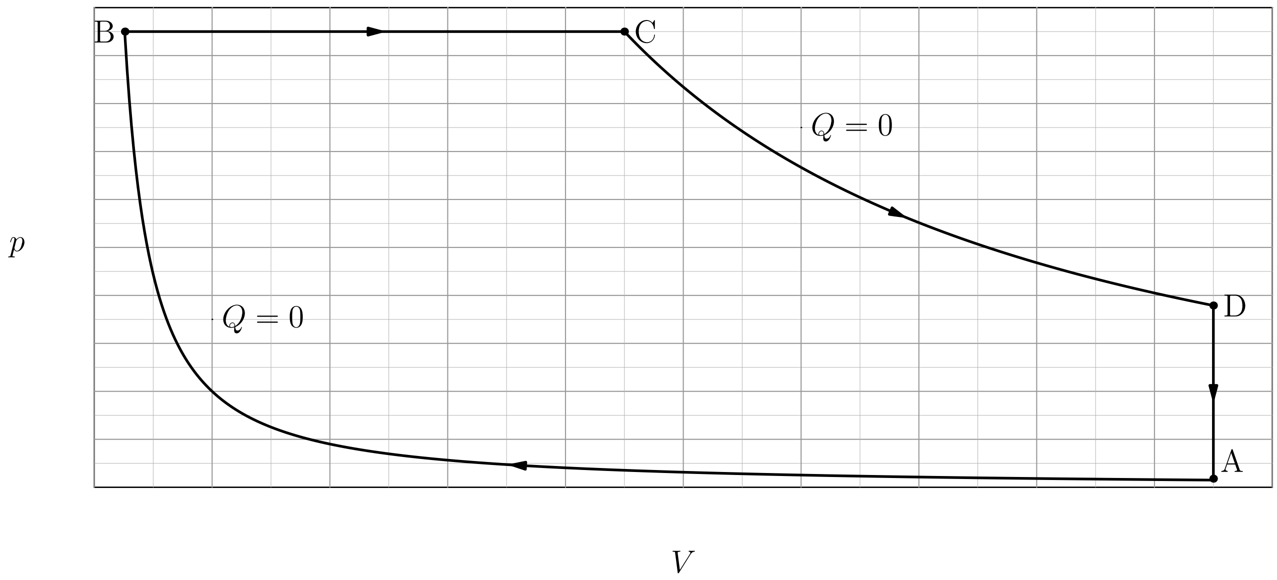
Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest poddawany przemianom przedstawionym na wykresie poniżej. Wiedząc, że przemiana B-C jest przemianą adiabatyczną oraz że ciśnienie w punkcie A jest równe 1,5 kPa, a w punkcie B ciśnienie wynosi 55,1 kPa, oblicz:
a) energię pobraną przez gaz z grzejnika;
b) energię oddaną chłodnicy;
c) wypadkową pracę w jednym cyklu silnika cieplnego, w którym gaz poddawany jest opisanym przemianom;
d) sprawność tego silnika.




**Odpowiedź:** Gaz pobrał z grzejnicy 40,2 kJ ciepła, a do chłodnicy oddał 28,1 kJ ciepła. Praca wykonana przez gaz wynosi 12,1 kJ, sprawność silnika jest równa 30%.

## 166 Zadanie – Cykl przemian gazu

Wyznacz sprawność cyklu dla ustalonej porcji gazu doskonałego przedstawionego na rysunku poniżej. Wynik przedstaw tylko w zależności od temperatur oraz stosunku ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej. Przemiany A-B oraz C-D są adiabatyczne. Dane są temperatury w punktach A, B, C, D.




**Odpowiedź:** Sprawność przedstawionego cyklu w zależności od temperatur:

$$\eta = 1 + \frac{1}{\kappa}\frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

$\kappa$ - stosunek ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej, wykładnik adiabaty.

## 167 Zadanie – Przemiana adiabatyczna i izotermiczna

Porcję 2,1 kg argonu o temperaturze 375,9 K i ciśnieniu $2 \cdot 10^5$ Pa sprężono adiabatycznie, a następnie rozprężono izotermicznie. Ilość ciepła pobrana w procesie izotermicznym jest równa przyrostowi energii wewnętrznej gazu w procesie adiabatycznym i wynosi 240 kJ. Oblicz objętość i ciśnienie gazu po przemianie
a) adiabatycznej
b) izotermicznej.
Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 40 g/mol, a wykładnik adiabaty 1,66.

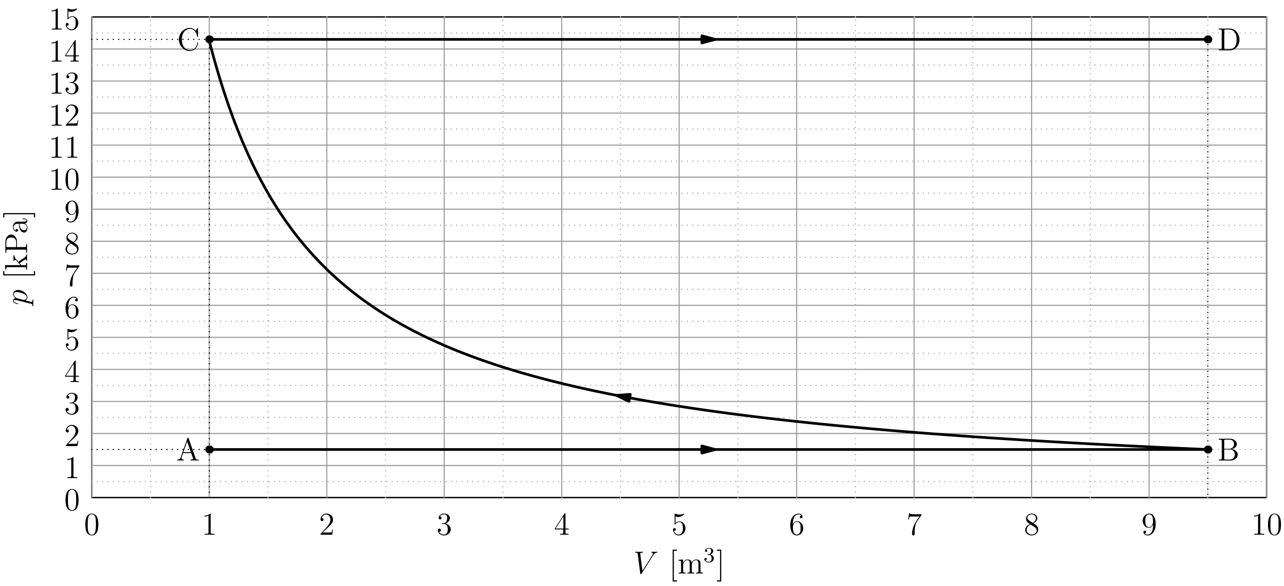
**Odpowiedź:** Po przemianie adiabatycznej parametry gazu wynoszą 0,42 $m^3$, $6{,}14 \cdot 10^5$ Pa. Po przemianie izotermicznej parametry gazu wynoszą 1,06 $m^3$, $2{,}41 \cdot 10^5$ Pa.

# 168 Zadanie – Entropia gazu

Zmianę entropii gazu doskonałego wyraża uniwersalny dla każdej przemiany wzór.

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_p} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{T_k}{T_p}$$

$n$ - liczba moli, $R$ - uniwersalna stała gazowa, $V_k$ - objętość końcowa, $V_p$ - objętość początkowa, $C_v$ - ciepło molowe przy stałej objętości, $T_k$ - temperatura końcowa, $T_p$ - temperatura początkowa.
Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego został poddany przemianie izotermicznej i dwóm przemianom izobarycznym. Końcowe ciśnienie gazu jest równe 14,3 kPa. Korzystając z przedstawionego wzoru oraz wykresu poniżej, oblicz zmianę entropii dla każdego z trzech procesów. Zinterpretuj otrzymane wyniki.




**Odpowiedź:** Zmiana entropii w procesie A-B jest równa 46,8 J/K, o tyle samo entropia zmienia się w procesie C-D. Można zauważyć, że zmiana entropii w procesie izobarycznym zależy tylko od zmiany objętości gazu i ciepła molowego przy stałym ciśnieniu. W procesie B-C zmiana entropii wynosi $-18{,}7$ J/K. Przemiany przedstawione na wykresie odpowiadają sytuacji, w której gaz jest zamknięty w pojemniku z ruchomym tłokiem. Przemiany A-B i C-D przedstawiają izobaryczne rozprężanie gazu, przemiana B-C izotermiczne sprężanie gazu. Czasami entropia jest określana jako miara nieuporządkowania gazu. W stanie A cząsteczki mogą zajmować mniejszą objętość pojemnika niż w stanie B. Są bardziej ściśnięte i „uporządkowane” niż w stanie B. Także temperatura w stanie A jest niższa - można powiedzieć, że ruch cząsteczek jest bardziej „uporządkowany”. Gaz, rozprężając się, zwiększa zajmowaną objętość pojemnika, cząsteczki są bardziej „nieuporządkowane”. Również temperatura rośnie. W przemianie A-B entropia wzrasta. W przemianie izotermicznej B-C ściskając gaz, zmniejszamy zajmowaną przez niego objętość. Cząsteczki w stanie C są bardziej „uporządkowane” przestrzennie niż w stanie B. W przemianie B-C entropia gazu maleje. W przemianie C-D gaz zachowuje się tak samo, jak w przemianie A-B, rozpręża się. Entropia gazu rośnie.

## 169 Zadanie – Równanie van der Waalsa

Porcję 1,6 kg tlenu ogrzano od temperatury 170 K do temperatury 240 K. Podczas przemiany objętość gazu wzrosła od 3 $m^3$ do 6 $m^3$. Zakładając, że gaz spełnia równanie van der Waalsa, oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu. Załóż, że masa molowa użytego gazu to 32 g/mol, ciepło molowe przy stałej objętości 10,7 J/(K·mol), a stałe występujące w równaniu van der Waalsa $a = 0{,}136$ J·$m^3$/(mol)$^2$, $b = 0{,}032 \cdot 10^{-3}$ $m^3$/mol.

**Odpowiedź:** Zmiana energii wewnętrznej gazu wynosi 37,5 kJ.

## 170 Zadanie – Wzory redukcyjne 1

Oblicz:
a) $(-6\sin 225^\circ + 6\,\mathrm{tg}\, 225^\circ) \cdot 3\cos 210^\circ =$
b) $-6\sin 225^\circ + 5\cos 225^\circ =$
c) $(5\sin 90^\circ - \cos 225^\circ)\cdot( 5\sin 90^\circ + \cos 225^\circ) =$

**Odpowiedź:** a) $-26{,}6$
b) 0,707
c) 24,5

## 171 Zadanie – Wzory redukcyjne 2

Oblicz:
a) $(-3\sin(-45^\circ) + 4\,\mathrm{tg}\, 420^\circ) \cdot 2\cos 840^\circ =$
b) $4\sin 840^\circ + 4\cos(-180^\circ) =$
c) $(4\sin 420^\circ - \cos(-45^\circ))\cdot( 4\sin(-180^\circ) + \cos(-180^\circ)) =$
d) $\mathrm{tg}\, 840^\circ \cdot \sin 420^\circ + \sin 840^\circ \cdot \cos(-45^\circ) - \sin(-180^\circ) =$
e) $(\mathrm{tg}\, 780^\circ)^2 - 3(\mathrm{ctg}\, 420^\circ)^2 =$
f) $\sin^2(-45^\circ) + \cos^2(-45^\circ) =$

**Odpowiedź:** a) $-9{,}05$
b) $-0{,}536$
c) $-2{,}76$
d) $-0{,}888$
e) 2
f) 1

## 172 Zadanie – Wzory redukcyjne 3

Oblicz:
a) $(\sin(-162^\circ) + 5\cos(-162^\circ))^2 - 2 \cdot 5\cos(-162^\circ)\sin(-162^\circ) =$
b) $5\sin 413^\circ + 3\cos(-457^\circ) =$
c) $(3\sin 179^\circ - \cos(-162^\circ))\cdot( 3\sin(-457^\circ) + \cos(-457^\circ)) =$
d) $\mathrm{tg}\, 413^\circ \cdot \sin 179^\circ + \sin 413^\circ \cdot \cos(-162^\circ) - \sin(-457^\circ) =$
e) $(\mathrm{tg}\, 780^\circ)^2 - 3(\mathrm{ctg} 420^\circ)^2 =$
f) $\sin^2(-162^\circ) - \cos^2(-162^\circ) =$

**Odpowiedź:** a) 22,71
b) 3,63
c) $-3{,}11$

d) 0,256
e) 2
f) $-0{,}809$

## 173 Zadanie – Zbiory liczb naturalnych

Zbiory $A$, $B$ i $C$ składają się z następujących elementów:

$A = \{3, 7, 9, 15, 21, 22, 23, 24\}$

$B = \{7, 8, 12, 24\}$

$C = \{2, 15, 17, 20, 22\}$

Określ:
a) sumę $A \cup B$,
b) sumę $B \cup C$,
c) sumę $A \cup B \cup C$,
d) różnicę $A \setminus B$,
e) różnicę $B \setminus C$,
f) różnicę $A \setminus C$,
g) iloczyn (część wspólną) $A \cap B$,
h) iloczyn $B \cap C$,
i) iloczyn $A \cap C$,
j) iloczyn $A \cap B \cap C$.

**Odpowiedź:**
a) $A \cup B = \{3, 7, 8, 9, 12, 15, 21, 22, 23, 24\}$
b) $B \cup C = \{2, 7, 8, 12, 15, 17, 20, 22, 24\}$
c) $A \cup B \cup C = \{2, 3, 7, 8, 9, 12, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24\}$
d) $A \setminus B = \{3, 9, 15, 21, 22, 23\}$
e) $B \setminus C = \{7, 8, 12, 24\}$
f) $A \setminus C = \{3, 7, 9, 21, 23, 24\}$
g) $A \cap B = \{7, 24\}$
h) $B \cap C = \{\}$
i) $A \cap C = \{15, 22\}$
j) $A \cap B \cap C = \{\}$

## 174 Zadanie – Działania na zbiorach

Uprość poniższe wyrażenia, w których występują zbiory $A$ i $B$:
a) $A \cap (B \cap A)$
b) $(A \cap B) \setminus B$
c) $(A \cup B) \setminus B$
d) $A \cap (B \cup A)$

**Odpowiedź:**
a) $B \cap A$
b) $\{\}$
c) $A \setminus B$
d) $A$