Warszawa, 2017-09-23

Spis wszystkich zadań napisanych po polsku w Gezmat

Adresy autorów znajdziesz na stronie projektu (linki - nagłówek, stopka) oraz w pliku gezmat.cxx

Instrukcję, jak używać GEZMAT, by tworzyć własne zestawy zadań i dodawać własne zadania, znajdziesz na stronie projektu. Ten plik został wygenerowany po wywołaniu w konsoli systemu Linux polecenia: `./gezmat.bash def/all_problems_pl.gzm`
Ważne! Plik `def/all_problems_pl.gzm` jest tworzony po wywołaniu

```
./gezmat.bash def/pl-prepare-all-problems-config.gzm
```

Nie edytuj tych plików! Możesz zmienić nazwę pliku `def/all_problems_pl.gzm` i wtedy go edytować jako swój własny plik konfiguracyjny.

1 Zadanie – Ogrzewanie wody

Ile ciepła należy dostarczyć 300 g wody, aby ogrzać ją o 25 K? Wynik wyraź w kJ. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K).

Wskazówka:

$$c_w = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

c_w - ciepło właściwe, Q - przekazane ciepło, ΔT - zmiana temperatury.

2 Zadanie – Ochładzanie sali

W pomieszczeniu są klimatyzatory o maksymalnej mocy chłodniczej 3 kW. W sali znajduje się 47 studentów. Można przyjąć, że każdy z nich wydziela ciepło z szybkością około 320 kJ/godz. W pomieszczeniu znajduje się także 20 żarówek, każda o mocy 80 W. Ponieważ na zewnątrz panuje wysoka temperatura, przez ścianę przenika ciepło z szybkością 7 MJ/godz. Ile klimatyzatorów powinno być włączonych, jeśli powietrze w pomieszczeniu ma być utrzymywane w stałej temperaturze 19°C?

Wskazówka: Oblicz ilość wytwarzanego ciepła w ciągu sekundy przez studentów, żarówki oraz ciepło przepływające przez ściany.

Wskazówka: Moc działających klimatyzatorów musi być równa ilości wytwarzanego ciepła w ciągu sekundy.

3 Zadanie – Kolektor słoneczny

Na dachu zamontowany jest kolektor słoneczny o sprawności $n = 22\%$. Energia słoneczna docierająca do kolektora przekazywana jest do wody krążącej w rurach kolektora. Jaka jest powierzchnia kolektora, jeśli w ciągu godziny ogrzewa 213 litry wody, zwiększając jej temperaturę o 20°C? Przyjmij, że w danej godzinie natężenie promieniowania słonecznego wynosi 690 W/m^2. Ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K), a jej gęstość 1000 kg/m^3.

Wskazówka: Natężenie promieniowania jest równe

$$I = \frac{P}{S}$$

P - moc docierająca do kolektora, S - powierzchnia.

Wskazówka: Moc z jaką ogrzewana jest woda

$$P' = \frac{Q}{t} = \frac{c_w \cdot m \cdot \Delta T}{t}$$

Q - ciepło, t - czas, c_w - ciepło właściwe wody, m - masa wody, ΔT - zmiana temperatury.

Wskazówka:

$$P' = n \cdot P$$

Wskazówka: Powierzchnia kolektora jest równa

$$S = \frac{P}{I} = \frac{c_w \cdot m \cdot \Delta T}{t \cdot I \cdot n}$$

4 Zadanie – Ciepło właściwe ciała

Do aluminiowego kalorymetru o masie 200 g włożono kulę o masie 383 g. Następnie do naczynia wlano 22 g wrzącej wody i zamknięto kalorymetr, aby zminimalizować wymianę ciepła z otoczeniem. Po ustaleniu się równowagi termicznej układu zmierzono temperaturę wody, wyniosła ona 45°C. Temperatura początkowa kalorymetru i kuli jest równa temperaturze otoczenia i wynosi 27°C. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K), a ciepło właściwe aluminium 900 J/(kg·K). Oblicz ciepło właściwe kuli, a następnie sprawdź w tablicy, z jakiego materiału jest najprawdopodobniej zbudowana. Zastanów się, dlaczego otrzymana wartość różni się od wartości podanej w tablicy.

substancja	ciepło właściwe J/(kg·K)
cyna	220
miedź	380
nikiel	460
glin	900

Wskazówka: Wykonaj bilans energetyczny.

Wskazówka:

$$c_{ww} \cdot m_w \cdot (100°\text{C} - t_k) = c_{wk} \cdot m_k \cdot (t_k - t_p) + c_{wc} \cdot m_c \cdot (t_k - t_p)$$

c_{ww} - ciepło właściwe wody, m_w - masa wody, t_k temperatura końcowa układu, t_p - temperatura początkowa układu, m_k - masa kalorymetru, c_{wc} - ciepło właściwe kuli, m_c - masa kuli.

5 Zadanie – Topienie złota

Jubiler na stopienie złota zużył 2240 J energii. Oblicz, ile złota stopił jubiler, wiedząc, że złoto było już podgrzane do temperatury topnienia oraz że ciepło topnienia złota wynosi 64 kJ/kg.

Wskazówka:

$$c_t = \frac{Q}{m}$$

c_t - ciepło topnienia, Q - przekazane ciepło, m - masa ciała.

6 Zadanie – Parowanie wody

Do naczynia zawierającego 0,5 kg wody włożono grzałkę o mocy 700 W, a następnie doprowadzono wodę do wrzenia. Ile wody wyparowało w ciągu 5 minut wrzenia? Przyjmij, że ciepło parowania wody wynosi 2270 kJ/kg.

Wskazówka:

$$Q = P \cdot t$$

Q - przekazane ciepło, P - moc grzałki, t - czas.

Wskazówka: Wykonaj bilans energetyczny.

7 Zadanie – Silnik spalinowy

Samochód jedzie po autostradzie ze stałą prędkością. By utrzymać prędkość, silnik pracuje z mocą 26 kW. Sprawność silnika wynosi 29%. Ile zapłacimy za benzynę zużytą przez samochód jadący przez 2 godziny? Cena benzyny na stacji paliw wynosi 4,74 zł/l, ciepło spalania wynosi 42 MJ/kg, a jej gęstość 0,7 g/cm^3.

Wskazówka:

$$\eta = \frac{W}{Q}$$

η - sprawność cieplna silnika, W - praca wykonana przez silnik, Q - dostarczone ciepło.

Wskazówka:

$$m = \frac{P \cdot t}{\eta \cdot c_s}$$

m - masa benzyny, P - moc silnika, c_s - ciepło spalania.

Wskazówka: Aby obliczyć koszt przejazdu, trzeba znać objętość zużytego paliwa.

8 Zadanie – Lód w ciepłej wodzie

Blok lodu o temperaturze $-10°$C i masie 290 g włożono do 900 g wody o temperaturze 65°C. Oblicz końcową temperaturę układu, zakładając, że nie następuje wymiana cieplna z otoczeniem. Przyjmij wartości: ciepła właściwego lodu 2050 J/(kg K), ciepła topnienia lodu 334 kJ/kg, ciepła właściwego wody (cieczy) 4200 J/(kg K).

Wskazówka: Układ jest izolowany, całkowita energia nie zmieniła się.

Wskazówka: Wykonaj bilans energetyczny.

Wskazówka: $(0°\mathrm{C} - T_i)c_i m_i + m_i l_i + (T_f - 0°\mathrm{C})m_i c_w + (T_f - T_w)m_w c_w = 0$

9 Zadanie – Podgrzewanie lodu

W naczyniu znajdował się lód o masie 1 kg w temperaturze $-12°$C. Naczynie to postawiono na kuchence gazowej i ogrzewano przez 0,6 min. Moc kuchenki wynosiła 9 kW. Sprawność procesu ogrzewania zawartości naczynia była równa 41%.

a) Czy lód się stopił?

b) Oblicz temperaturę końcową zawartości naczynia. Wynik podaj z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

W obliczeniach pomiń ciepło oddane do otoczenia i naczynia. Przyjmij, że ciepło topnienia lodu wynosi $L = 330$ kJ/kg, ciepło właściwe lodu $c_l = 2100$ J/(kg $\cdot$ K), a ciepło właściwe wody $c_w = 4200$ J/(kg $\cdot$ K).

Wskazówka: Należy skorzystać z zależności wynikających z bilansu cieplnego. Zwróć uwagę na to, które wielkości w obliczeniach będą dodatnie, a które ujemne.

Wskazówka: To, czy lód się roztopi, zależy przede wszystkim od ilości ciepła, które dostarczymy do układu

$$Q_0 = Pt\eta,$$

gdzie P jest mocą kuchenki, t czasem ogrzewania, a η sprawnością procesu ogrzewania.
Jeżeli ciepło to jest mniejsze od ciepła potrzebnego do ogrzania lodu do temperatury topnienia (0°C), to w naczyniu nadal znajduje się lód, tylko w wyższej temperaturze. Ciepło potrzebne do ogrzania lodu do temperatury topnienia Q_1 można obliczyć za pomocą zależności

$$Q_1 = mc_l(0°\mathrm{C} - T_p),$$

gdzie m jest masą lodu, a T_p to temperatura początkowa lodu w stopniach Celsjusza.
Jeżeli $Q_0 < Q_1$, to temperaturę końcową T_k można obliczyć w następujący sposób

$$Q_0 = mc_l(T_k - T_p)$$

$$T_k = \frac{Q_0}{mc_l} + T_p$$

Jeżeli nie, to należy sprawdzić, czy ciepło Q_0 jest większe od sumy ciepła potrzebnego do ogrzania lodu do temperatury topnienia Q_1 oraz ciepła potrzebnego do roztopienia lodu Q_2.

$$Q_2 = mL.$$

Jeżeli $Q_1 < Q_0 < Q_1 + Q_2$, to otrzymano mieszaninę lodu i wody o temperaturze końcowej $T_k = 0°$C.
Jeżeli jednak $Q_1 + Q_2 < Q_0$, to lód roztopił się, a temperaturę końcową można obliczyć w następujący sposób:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 + mc_w(T_k - 0°\mathrm{C})$$

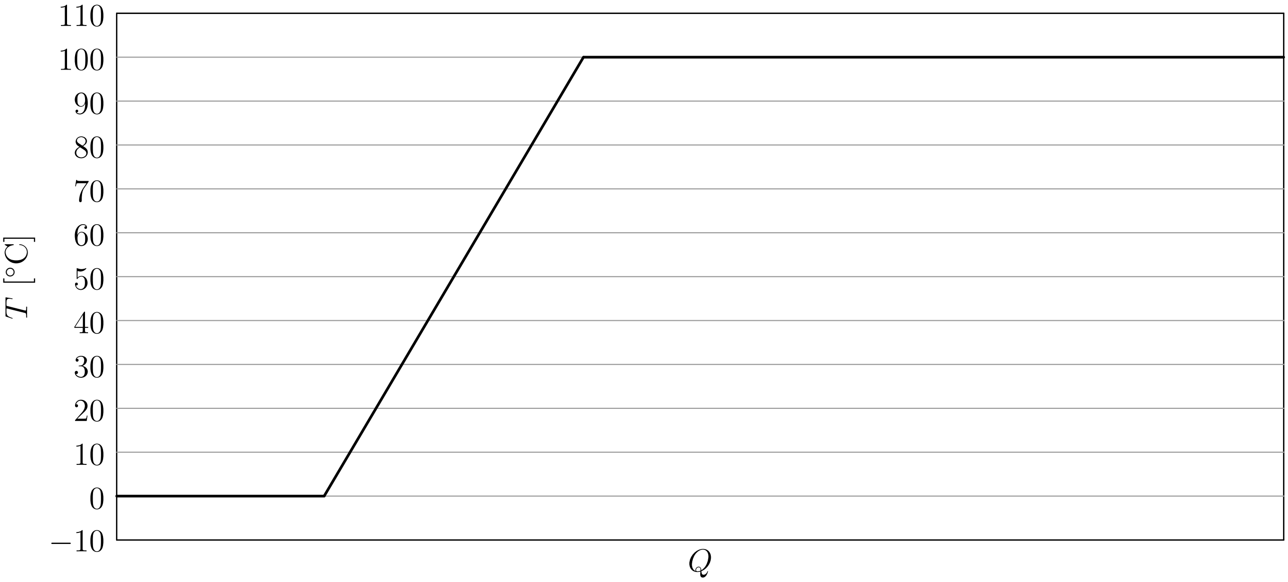
$$Q_0 = mc_l(0°\mathrm{C} - T_p) + mL + mc_w(T_k - 0°\mathrm{C})$$

$$T_k = \frac{Q_0 + mc_lT_p - mL}{mc_w}$$

10 Zadanie – Zjawiska cieplne

Na rysunku poniżej przedstawiono zależność temperatury próbki 4 g H_2O od wymienionego z otoczeniem ciepła. Rozpoznaj i podpisz przedstawione zjawiska cieplne. Oblicz, ile kalorii próbka wymieniła z otoczeniem podczas całego procesu przedstawionego na rysunku. Potrzebne dane znajdują się w tabeli. Przyjmij, że na diagramie został przedstawiony cały proces przemiany fazowej. Uwaga, rysunek nie zachowuje skali.

ciepło topnienia/zamarzania	336000 J/kg
ciepło parowania/skraplania	2270000 J/kg
ciepło właściwe (woda)	4200 J/(kg·K)
ciepło właściwe (lód)	2100 J/(kg·K)
ciepło właściwe (para wodna)	2000 J/(kg·K)



Wskazówka: Ciepło wymienione z układem zostało wykorzystane na stopienie lodu, ogrzanie wody od 0°C do 100°C i zamianę całej wody w parę.

Wskazówka:

$$Q = c_t \cdot m + c_{ww} \cdot m \cdot (T_2 - T_1) + c_p \cdot m$$

Q - przekazane ciepło, c_t - ciepło topnienia, m - masa ciała, c_{ww} - ciepło właściwe wody, T_2 - temperatura parowania, T_1 - temperatura topnienia, c_p - ciepło parowania.

Wskazówka: Zamień ciepło wyrażone w dżulach na kalorie.

$$4{,}2\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{cal}$$

11 Zadanie – Granitowa płyta

Powierzchnia płyty granitowej to $147 \cdot 10^3$ m^2, a jej grubość 5 m. Pod płytą panuje temperatura 30°C, a nad płytą −5°C. Oblicz ciepło przepływające przez płytę w trakcie jednej minuty, jeśli współczynnik przewodnictwa cieplnego granitu jest równy 2,19 W/(K · m).

Wskazówka: Strumień ciepła jest wprost proporcjonalny do różnicy temperatur, ΔT, i powierzchni, A, a odwrotnie proporcjonalny do grubości, h.

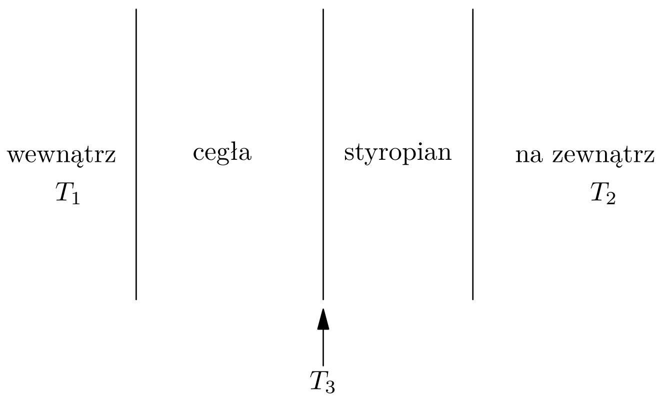
Wskazówka: Strumień ciepła: $H = k\,A\,\Delta T/h$

Wskazówka: Ciepło: $Q = Ht$, gdzie t to czas.

12 Zadanie – Ceglany dom

Ceglany dom ma ściany o grubości 25 cm. Wewnątrz domu utrzymywana jest stała temperatura 21°C. Temperatura powietrza na zewnątrz wynosi 13°C.
a) Oblicz, ile ciepła stracimy w ciągu sekundy przez jedną ze ścian o powierzchni 19 m^2. Przyjmij, że przewodnictwo cieplne cegły wynosi 0,6 W/(K·m).
b) Aby zapobiec utracie ciepła, ocieplono budynek z zewnątrz warstwą styropianu o grubości 30 cm. Ile teraz tracimy ciepła przez tę samą ścianę? Przyjmij, że przewodnictwo cieplne styropianu wynosi 0,04 W/(K·m).
c) Jaka temperatura panuje na złączu matariałów?

Wskazówka:



Wskazówka:

$$H = \frac{Q}{t} = k \cdot \frac{S}{L} \cdot (T_1 - T_2)$$

H - strumień ciepła, Q - przekazane ciepło, k - współczynnik przewodnictwa cieplnego, S - powierzchnia ciała, L - grubość ciała, T_1 - temperatura powietrza wewnątrz domu, T_2 - temperatura powietrza na zewnątrz.

Wskazówka:

$$H_1 \cdot \frac{L_1}{k_1} = S \cdot (T_1 - T_3)$$

$$H_2 \cdot \frac{L_2}{k_2} = S \cdot (T_3 - T_2)$$

W warunkach stacjonarnych strumienie ciepła przepływające przez obie warstwy muszą być równe, stąd:

$$H_1 = H_2 = H$$

Dodając dwa pierwsze równania stronami i porządkujac je, uzyskujemy:

$$H = S \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

H_1 - strumień ciepła płynący przez cegłę, H_2 - strumień ciepła płynący przez styropian, k_1 - współczynnik przewodnictwa cieplnego cegły, k_2 - współczynnik przewodnictwa cieplnego styropianu, L_1 - grubość cegły, L_2 - grubość styropianu, T_3 - temperatura panująca między cegłą a styropianem.

13 Zadanie – Wydłużenie szyny

Oblicz, o ile zmieni się długość stalowej szyny po ogrzaniu jej do temperatury 15°C, jeśli jej długość przy temperaturze 3°C jest równa 8 m. Współczynnik rozszerzalności cieplnej użytej stali jest równy $0{,}99 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

Wskazówka: Wydłużenie jest wprost proporcjonalne do różnicy temperatur i początkowej długości.

14 Zadanie – Zegar

Pewien zegar, posiadający wahadło z niklu, odmierza dokładnie czas w temperaturze 21°C. Temperatura spadła do -1°C. O ile więcej wahnięć w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej niklu wynosi $13 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Jeden koniec pręta z niklu zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt z niklu jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

Wskazówka: Okres wahadła w temperaturze początkowej wynosi 1 s.

Wskazówka:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

P - okres drgań, l - długość wahadła, g - przyspieszenie ziemskie.

Wskazówka: Zmiana długości pręta:

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta T \cdot l$$

ΔT - zmiana temeperatury, α - współczynnik rozszerzalności liniowej.

Wskazówka:

$$\Delta n = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha \Delta T)}} - 1$$

Δn - zmiana liczby wahnięć w trakcie 1 s.

15 Zadanie – Spadająca kulka

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z cyny, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 35\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 296 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232
ind	233	28	156
ołów	128	25	328

Wskazówka: Część energii kinetycznej kulki zostanie jej przekazana w postaci ciepła.

Wskazówka: Aby ciało uległo stopieniu, najpierw musi zostać podgrzane do temperatury topnienia

$$Q_1 = c_w \cdot m \cdot \Delta T$$

A następnie otrzymać tyle ciepła, aby się stopić

$$Q_2 = c_t \cdot m$$

Q_1 - ciepło przekazane na ogrzanie ciała, c_w - ciepło właściwe ciała, m - masa ciała, ΔT - zmiana temperatury, Q_2 - ciepło przekazane na stopienie ciała, c_t - ciepło topnienia ciała.

Wskazówka:

$$v = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot (c_w \cdot \Delta T + c_t)}$$

v - prędkość kulki.

16 Zadanie – Spadająca kulka (1 wiersz tabeli)

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z cyny, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 38\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 295 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232

Wskazówka: Część energii kinetycznej kulki zostanie jej przekazana w postaci ciepła.

Wskazówka: Aby ciało uległo stopieniu, najpierw musi zostać podgrzane do temperatury topnienia

$$Q_1 = c_w \cdot m \cdot \Delta T$$

A następnie otrzymać tyle ciepła, aby się stopić

$$Q_2 = c_t \cdot m$$

Q_1 - ciepło przekazane na ogrzanie ciała, c_w - ciepło właściwe ciała, m - masa ciała, ΔT - zmiana temperatury, Q_2 - ciepło przekazane na stopienie ciała, c_t - ciepło topnienia ciała.

Wskazówka:

$$v = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot (c_w \cdot \Delta T + c_t)}$$

v - prędkość kulki.

17 Zadanie – Lodowiec

Oszacuj masę stopionego lodu z lodowca, który zsunął się i zatrzymał w dolinie. Początkowo lodowiec spoczywał na wysokości 256 m nad doliną i miał masę $7 \cdot 10^9$ kg. Załóż, że energia tracona przez zsuwający się lodowiec i spływającą wodę powstałą podczas topnienia lodowca powoduje dalsze topnienie lodu. Przyjmij ciepło topnienia lodu 334 kJ/kg. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Zmiana energii potencjalnej jest równa energii, która została zużyta na stopienie lodu.

18 Zadanie – Promieniowanie kuli

Gorąca kula o promieniu 5 cm, temperaturze powierzchni 700 K i względnej zdolności emisyjnej 0,66 wysyła energię w postaci promieniowania. Ile energii zaabsorbuje w ciągu 5 minut ciało doskonale czarne, które odbiera $4 \cdot 10^{-3}$ energii promieniowania wyemitowanego przez kulę? Stała Stefana-Boltzmanna wynosi $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2·K^4).

Wskazówka: Moc absorbowana przez ciało z otoczenia:

$$P = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot T^4$$

σ - stała Stefana-Boltzmana, ε - względna zdolność emisyjna, S - powierzchnia ciała, T - temperatura ciała.

19 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $15{,}7 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 1,9 m/s. Druga część o masie $22{,}5 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 7,9 m/s.

Wskazówka: Jakie wielkości są zachowane?

Wskazówka: Którą z zachowanych wielkości można obliczyć na podstawie danych?

20 Zadanie – Spadochroniarz

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 99 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 8,4 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Wskazówka: Jakim ruchem względem Ziemi porusza się spadochroniarz? Jakie siły na niego działają i jaki związek zachodzi między nimi?

21 Zadanie – Zderzenie wagonów

Wagon kolejowy o masie 49 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 1,5 m/s, uderzył w stojący skład 4 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:
a) wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
b) o ile zmniejszyła się na skutek sczepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Zasada zachowania pędu (składowa pozioma) prowadzi do równania $mv_0 = (n+1)mv$, a więc po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}3$ m/s.

22 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Kula o masie 8 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 94 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 8 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Wskazówka: Pod jakim względnym kątem skierowane są dwie siły? Z jakiego twierdzenia dotyczącego trójkąta prostokątnego można skorzystać?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły to ok. 122 N. Z której zasady dynamiki należy skorzystać, by obliczyć przyśpieszenie kuli?

Wskazówka: Wartość przyśpieszenia to ok. 15,3 m/s^2. Przyśpieszenie to jest stałe. Jaką prędkość po czasie t osiągnie ciało poruszające się ze stałym przyśpieszeniem a?

23 Zadanie – Kula w cieczy

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 940 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 1200 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Wskazówka: Jakie siły działają na kulę?

Wskazówka: Jaka jest wartość wypadkowej siły?

Wskazówka: $V_2\, d_l\, g = V d_b\, g$

Wskazówka: $V_1 + V_2 = V$

Wskazówka: $V_1/V = 1 - V_2/V$

24 Zadanie – Ołów, lód i woda

Kulę o masie 9,3 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,41 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10200 kg/m^3, a gęstość wody 1000 kg/m^3. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Wskazówka: Jak związana jest wysokość lustra wody w pojemniku z objętością wody i ciał w niej zanurzonych?

Wskazówka: Jaką objętość wody wypiera kula lodowa zawierająca kulę ołowianą?

Wskazówka: Jaką objętość wody wyprze ołowiana kula po stopieniu lodu?

Wskazówka: Ile wody powstanie ze stopionego lodu?

Wskazówka: Kula lodowa zawierająca kulę ołowianą wypiera objętość wody równą $(m_p + m_i)/\rho_w$, gdzie m_p jest masą ołowianej kuli, m_i masą lodu, a ρ_w gęstością wody.

Wskazówka: Po stopieniu lodu ołowiana kula opadnie na dno i będzie wypierać objętość wody równą własnej objętości, a więc m_p/ρ_p, gdzie ρ_p to gęstość użytego stopu ołowiu.

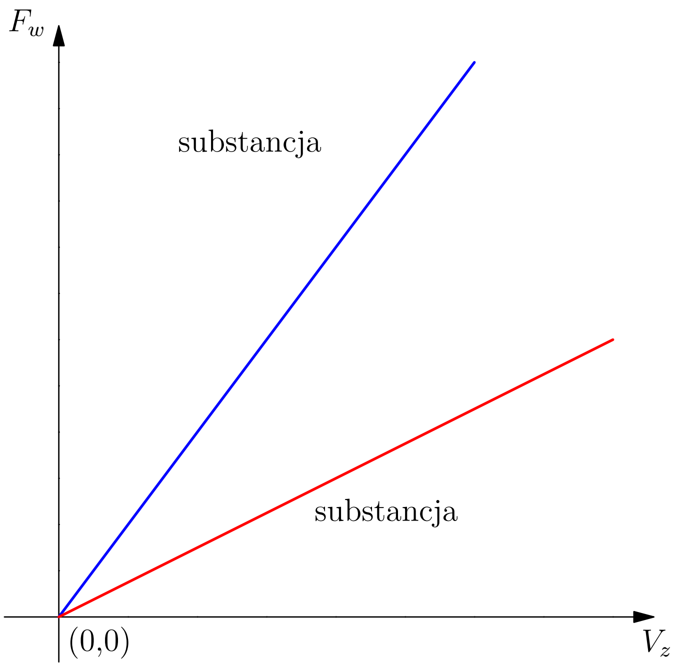
Wskazówka: Lód stopi się, a powstała woda będzie mieć objętość m_i/ρ_w, czyli taką samą, jaką wypierał lód.

25 Zadanie – Która to ciecz?

Prostopadłościan wykonany z porcelany zawieszono na siłomierzu i zmierzono jego ciężar Q. Następnie zanurzano prostopadłościan w cieczy A, a później w cieczy B. Notowano przy tym wartości wskazywane przez siłomierz oraz objętość zanurzonej części prostopadłościanu. Poniższa tabela przedstawia wyniki pomiarów.

siła ciężkości Q [N]	odczyt z siłomierza [N]	siła wyporu F_w [N]	objętość zanurzonej części V_z [cm^3]
substancja A			
0,100	0,084	0,016	2
0,100	0,076	0,024	3
0,100	0,067	0,033	4
substancja B			
0,100	0,080	0,020	2
0,100	0,069	0,031	3
0,100	0,061	0,039	4

a) Poniżej przedstawiono wykresy zależności siły wyporu F_w od objętości zanurzonej części prostopadłościanu V_z dla dwóch cieczy. Podpisz odpowiednio: „substancja A", „substancja B".



b) Która z wymienionych niżej cieczy mogłaby być substancją A, a która substancją B? Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

ciecz	gęstość $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}]$
gliceryna	1260
woda	1000
etanol	785

c) Jakie prawo opisuje badane tutaj zjawisko? Opisz je.

Wskazówka:

a) Która substancja działa większą siłą wyporu dla takiej samej objętości zanurzonej części ciała? Jaki ma to związek z gęstością cieczy?

Wskazówka:

b) Siła wyporu zależy w następujący sposób od gęstości:

$$F_w = \rho_c g V_z,$$

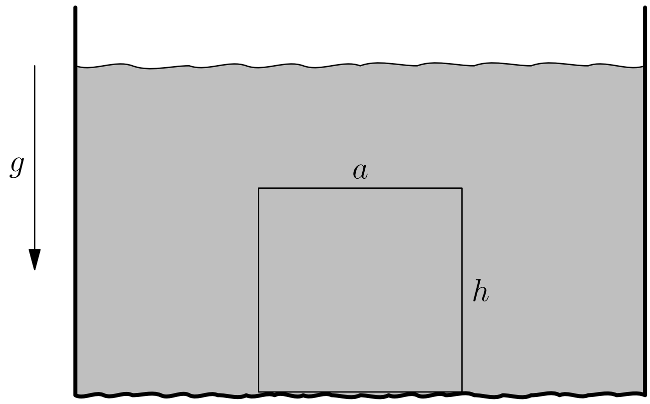
gdzie ρ_c oznacza gęstość cieczy, a g przyspieszenie ziemskie. Zatem gęstość obliczymy z zależności:

$$\rho_c = \frac{F_w}{gV_z}.$$

Pamiętaj że obliczona gęstość może nie być dokładnie taka, jak w tabelce, ze względu na niepewności pomiarowe. Obliczenia najlepiej jest wykonać dla największego podanego V_z, wtedy względna niepewność jest najmniejsza.

26 Zadanie – Wyciąganie bloku z morza

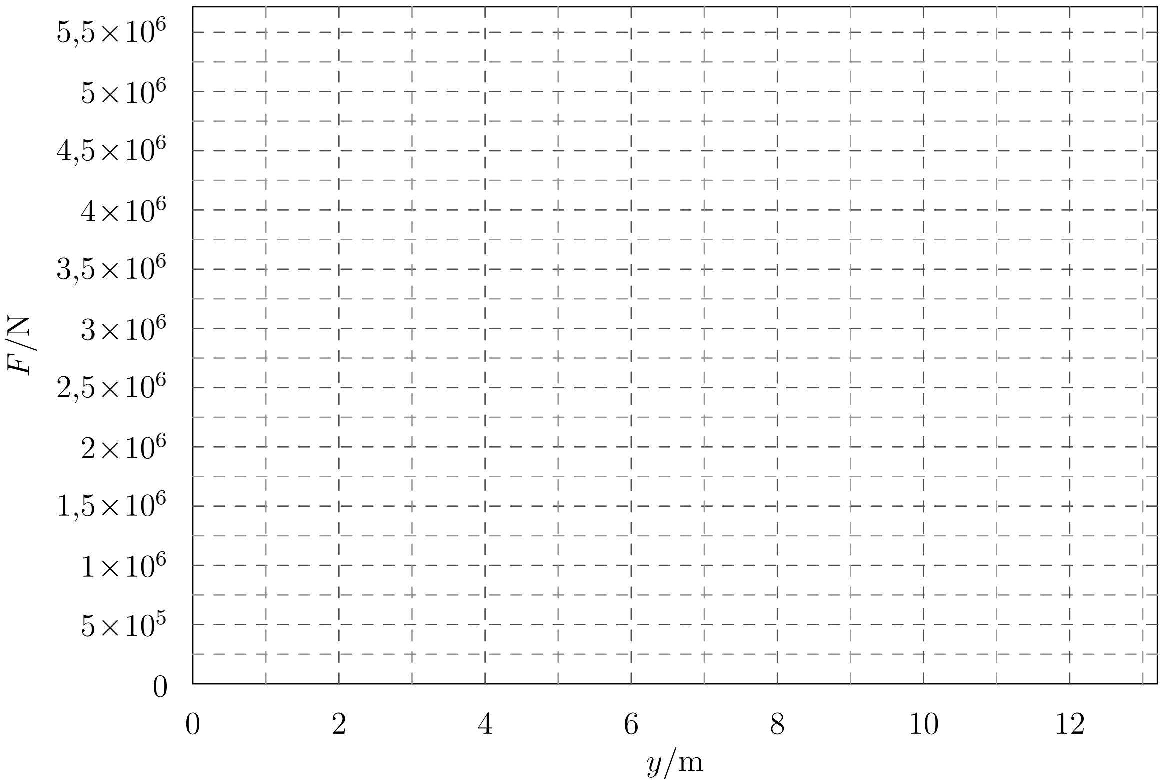
Na poziomym, kamienistym dnie morza spoczywa prostopadłościenny betonowy blok o wymiarach podstawy $a = 6$ m, $b = 4$ m oraz wysokości $h = 10$ m. Głębokość wody w tym miejscu wynosi $H = 12$ m. Postanowiono wyciągnąć blok z wody.



a) Przedstaw na wykresie zależność minimalnej siły F potrzebnej do wyciągnięcia bloku od położenia dolnej podstawy bryły y.

b) Oblicz minimalną pracę, jaką należy wykonać w celu wyciągnięcia bloku z wody. Wynik podaj w kJ z dokładnością do 3 cyfr znaczących.

Przyjmij, że gęstość wody morskiej wynosi $\rho_w = 1030\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, przyspieszenie ziemskie $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ oraz gęstość betonu $\rho_b = 2165\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Wyciąganie było bardzo powolne oraz odbywało się ruchem jednostajnym, pomiń opory ruchu oraz wpływ powietrza. Przyjmij, że woda znajdowała się pod całą powierzchnią dolnej podstawy spoczywającego na kamienistym dnie bloku.



Wskazówka: a) Należy zastanowić się, jak siła wyciągająca zmieniała się podczas wyciągania. W dół cały czas działa siła ciężkości $Q = mg$. Do góry działa siła wyporu. Jej wartość nie jest stała, zależy od objętości zanurzonej części ciała V_z, która się zmienia.

Wskazówka: Wyciąganie bloku można podzielić na 3 etapy:

1) gdy blok jest cały zanurzony (dolna podstawa znajduje się na wysokości od 0 do $H - h$)

2) gdy blok jest częściowo zanurzony w wodzie (dolna podstawa znajduje się na wysokości od $H - h$ do H)

3) gdy blok jest ponad taflą wody (dolna podstawa znajduje się powyżej H)

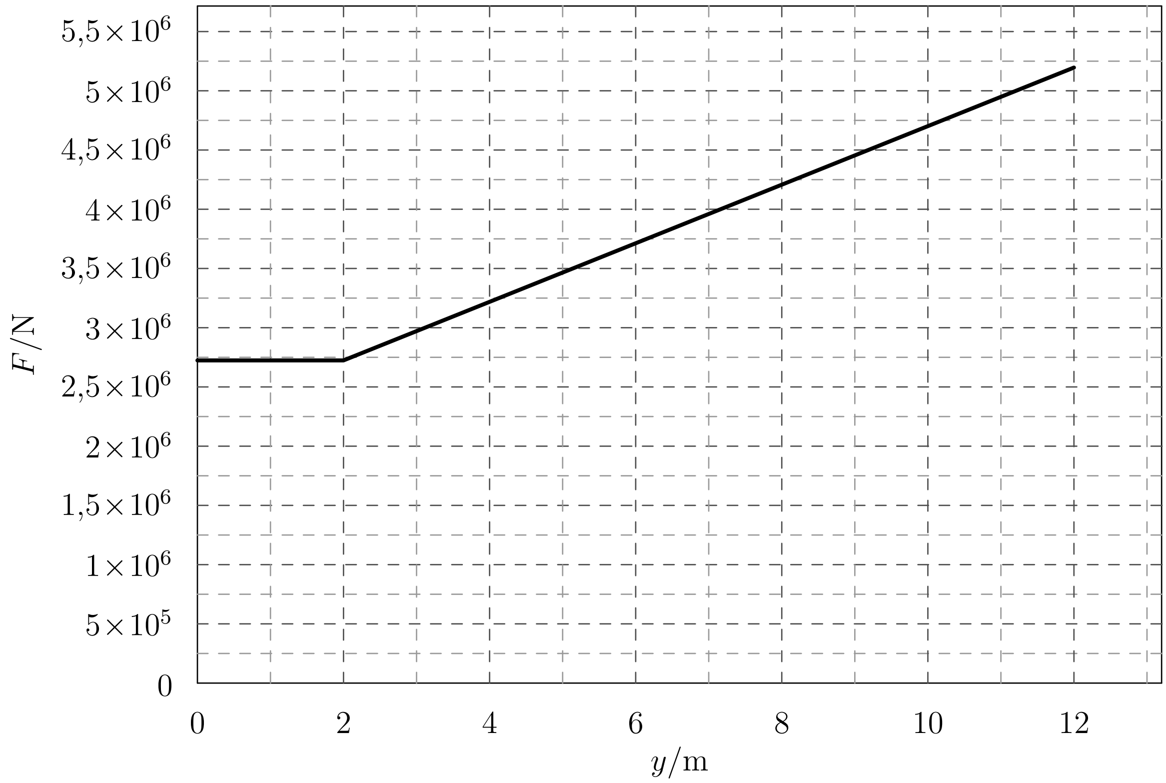
Wskazówka: Wartość siły wyporu w kolejnych etapach wyraża się wzorami:

1) $F_w = \rho_w \cdot g \cdot V_z = \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot h$ i jest stała,

2) $F_w = \rho_w \cdot g \cdot V_z$, w tym przypadku jednak objętość zanurzonej części ciała V_z nie jest stała, lecz zależy od wysokości y, na której znajduje się w danej chwili dolna podstawa prostopadłościanu, więc $F_w = \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot (H - y)$,

3) $F_w = 0$.

Na podstawie powyższych wyrażeń oraz zależności $F = Q - F_w$, gdzie F jest siłą wyciągającą, należy narysować wykres zgodnie z poleceniem w podpunkcie a).



Wskazówka: b) Pracę W można wyznaczyć jako pole powierzchni pod wykresem $F(y)$ dla $y \in [0; H]$. Można również obliczyć ją, uwzględniając wartość siły w kolejnych etapach:

1) Na blok działa stała siła wyciągająca i działa na odcinku o długości $H - h$

$$W = (mg - \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot h) \cdot (H - h).$$

2) siła wyciągająca nie jest stała, ale wzrasta jednostajnie (zobacz, jak to wygląda na wykresie), dlatego możemy użyć jej wartości średniej.

$$W = \frac{(mg - \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot h) + (mg - 0)}{2} h$$

W celu obliczenia całej pracy należy zsumować wartości otrzymane w 1) i 2). Zauważ, że w 1) obliczyliśmy pole prostokąta, a w 2) pole trapezu.

27 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 2300 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 5 kg, a każdy student może wykonać pracę 41000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 14 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Wskazówka: O ile zmieni się energia potencjalna cegieł?

Wskazówka: Ilu studentów potrzeba, by zmienić energię potencjalną cegieł o 1577800 J? Zwróć uwagę na fakt, że część studenta nie może wnosić cegieł :-)

28 Zadanie – Wahadło

Kulkę o masie 70 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 3 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania możesz skorzystać?

Wskazówka: Korzystając z równania opisującego zasadę zachowania energii mechanicznej, oblicz wartość prędkości kulki w najniższym punkcie jej toru.

29 Zadanie – Wyrzutnia piłek do tenisa

Wyrzutnia w postaci prostej lufy, w której porusza się tłok o kształcie walca prostego, wyrzuca piłki o masie 57 g z szybkością 61 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Mechanizm wyrzucający działa tak, że przez cały czas, gdy piłka jest w kontakcie z wyrzutnią, poruszający się tłok działa na piłkę stałą siłą i trwa to 0,4 s. Wiadomo, że przed uruchomieniem wyrzutni spoczywająca piłka działa na tłok siłą $R = 0{,}4$ N.

a) Jaką siłą działa poruszający się tłok na piłkę?

b) Oblicz średnią moc, z jaką wyrzutnia wyrzuca piłki.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Pomiń opory ruchu piłki.

Wskazówka: a) Siła F, z jaką tłok dział na piłkę, przeciwdziała sile R oraz powoduje przyrost pędu Δp w czasie Δt. Z czego wynikają poniższe zależności:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} + R = \frac{\Delta v \cdot m}{\Delta t} + R,$$

gdzie Δv jest przyrostem prędkości, a m masą piłki. Piłki początkowo spoczywają, więc przyrost prędkości jest równy prędkości, jaką piłka osiąga po rozpędzeniu przez tłok.

Wskazówka: b) Korzystamy z tego, że wartość siły była stała. Średnią moc P możemy obliczyć z zależności:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Fs}{\Delta t},$$

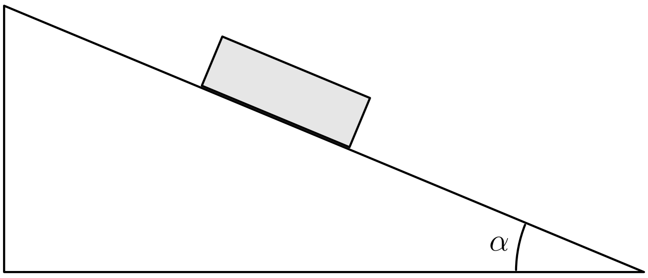
$$s = \frac{a(\Delta t)^2}{2}.$$

gdzie W oznacza pracę, a a to przyspieszenie równe $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. A więc:

$$P = \frac{F\Delta v}{2}.$$

30 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 16°$ zsuwa się cegła o masie 5,2 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

Wskazówka: Ile wynosi składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do równi?

31 Zadanie – Równia pochyła

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 24° zsuwa się cegła o masie 5,4 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

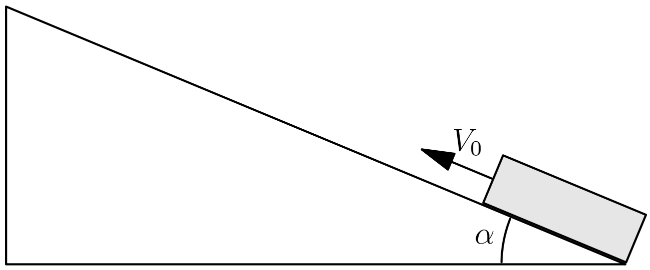
Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

Wskazówka: Ile wynosi składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do równi?

32 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 543 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 8$ m/s wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 30°$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 0,9.
a) Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
b) Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
c) Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



Wskazówka: Jakie siły działają na klocek podczas jego ruchu?

Wskazówka: Wartość opóźnienia klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F_T + F_s}{m},$$

gdzie F_T to siła tarcia, a F_s to siła zsuwająca, czyli

$$a = \frac{mgf\cos\alpha + mg\sin\alpha}{m}.$$

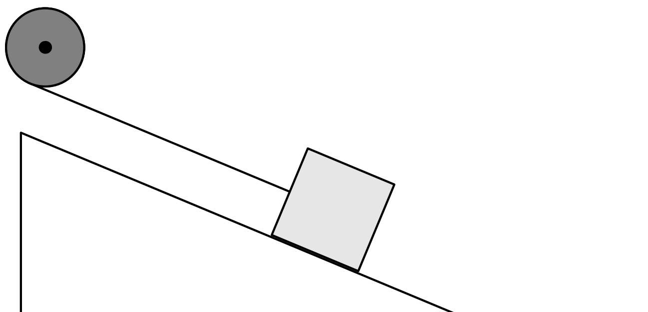
Wskazówka: Zależność czasu od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym to

$$t = \frac{|\Delta V|}{a}.$$

Wskazówka: Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym? **Albo:** Jak zmienia się energia całkowita klocka na skutek pracy siły tarcia?

33 Zadanie – Sześcian na równi

Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 40°$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 22 dag i o długości krawędzi 8 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 87 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześcianu znajduje się 70 cm nad stołem.
a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?
Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,5.



Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $\epsilon = \frac{M}{I}$, gdzie M to moment siły, a ϵ to przyśpieszenie kątowe. Moment bezwładności walca o promieniu R wynosi $I = \frac{1}{2}m_w R^2$.

Wskazówka: Przyśpieszenie kątowe walcowego bloku

$$\epsilon = \frac{a}{R},$$

gdzie a to przyśpieszenie liniowe sześcianu.

Wskazówka: Moment siły działający na walcowy blok

$$M = F_L R,$$

gdzie F_L to siła naciągu linki.

Wskazówka: Uwzględniając wszystkie siły działające na sześcian, otrzymujemy

$$a = \frac{m_s g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - F_L}{m_s}.$$

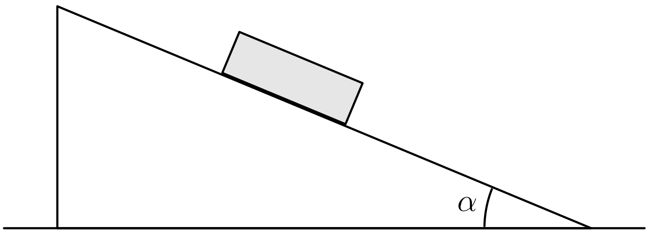
Wskazówka: Droga, jaką pokona sześcian, wynosi

$$s = \frac{h}{\sin\alpha},$$

gdzie h to wysokość względem stołu, na jakiej początkowo znajduje się najniżej położona krawędź sześcianu.

34 Zadanie – Jeżdżąca równia

Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie nachylenia $\alpha = 25°$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,2.



Wskazówka: Należy znaleźć minimalne przyśpieszenie równi (a_{min}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zsunie, oraz maksymalne przyśpieszenie równi (a_{max}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zacznie wsuwać.

Wskazówka: Jakie siły działają na klocek w nieinercjalnym układzie związanym z równią?

Wskazówka: Żądamy, by wypadkowa sił działających na klocek w układzie związanym z równią była równa zero, wówczas składowe sił wzdłuż równi muszą spełniać równanie

$$F_s - F_T - F_b\cos\alpha = mg\sin\alpha - f(mg\cos\alpha + F_b\sin\alpha) - F_b\cos\alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{min},$$

gdzie F_s to siła zsuwająca, F_T to siła tarcia, F_b to siła bezwładności, a m to masa klocka.

Wskazówka: Gdy szukamy a_{max} w układzie związanym z równią, siła tarcia jest skierowana w dół równi

$$F_s + F_T - F_b \cos\alpha = mg\sin\alpha + f(mg\cos\alpha + F_b \sin\alpha) - F_b \cos\alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{max}.$$

35 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 57 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 48 N na drodze 2,8 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 11 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Wskazówka: Jak praca wypadkowej siły związana jest ze zmianą szybkości ciała?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły działającej na łyżwiarza to $F - T$, gdzie F to wartość siły rozpędzającej, a T to wartość siły oporu.

Wskazówka: Praca wypadkowej siły na drodze S, czyli $W = (F - T)S$, jest równa zmianie energii kinetycznej łyżwiarza.

36 Zadanie – Pocisk

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 42 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 47 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 559 m/s, a po przejściu przez drzewo zmiejszyła się do 439 m/s.
a) Ile wynosi praca sił oporu?
b) Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
c) Ile wynosi czas przebijania drzewa?
Załóż, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

Wskazówka: Zmiana enegii kinetycznej pocisku jest równa pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W.$$

Wskazówka: Praca siły tarcia

$$W = -F_o d,$$

gdzie F_o to wartość siły oporu drzewa.

Wskazówka: Wartość opóźnienia kuli

$$a = \frac{F_o}{m}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z zależności czasu od przyśpieszenia dla ruchu jednostajnie opóźnionego

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t.

37 Zadanie – Krążek hokejowy

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 6 m, a po zderzeniu przebył drogę 4 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,09. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

Wskazówka: Skorzystaj z zależności drogi od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2,$$

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t.
Albo: Skorzystaj z tego, że zmiana energii kinetycznej krążka o masie m to skutek pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W,$$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mas,$$

gdzie s to całkowita droga przebyta przez krążek, do momentu zatrzymania, a a to wartość opóźnienia krążka, równa wartości bezwzględnej przyśpieszenia.

Wskazówka: Wartość opóźnienia krążka

$$a = gf.$$

38 Zadanie – Droga hamowania

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 30 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszał się samochód?

Wskazówka: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnym

$$s_1 = V_0 t_1.$$

Wskazówka: Jak zmienia się energia kinetyczna na skutek pracy siły tarcia? **Albo:** Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym i jak powiązane są prędkość początkowa z czasem tego ruchu?

Wskazówka: Zmiana energii kinetycznej na skutek pracy siły tarcia

$$E_2 - E_1 = W,$$

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -mgfs_2,$$

$$s_2 = \frac{V_0^2}{2gf},$$

Albo: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$s_2 = V_0 t_2 - \frac{a t_2^2}{2},$$

$$a = gf,$$

$$t_2 = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie a to wartość opóźnienia samochodu, ΔV to zmiana prędkości w czasie t_2, gdzie t_2 to czas od momentu zadziałania hamulców do momentu zatrzymania samochodu.

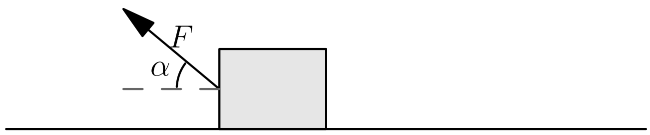
39 Zadanie – Spacer z sankami

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 40 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 67 N i tworzy on kąt 35° z poziomem.

Wskazówka: Jak obliczyć składową poziomą siły?

40 Zadanie – Ukośna siła

Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,9 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 7$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,07.
a) Oblicz przyśpieszenie klocka.
b) Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
c) Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



Wskazówka: Przyśpieszenie klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F\cos\alpha - f(mg - F\sin\alpha)}{m},$$

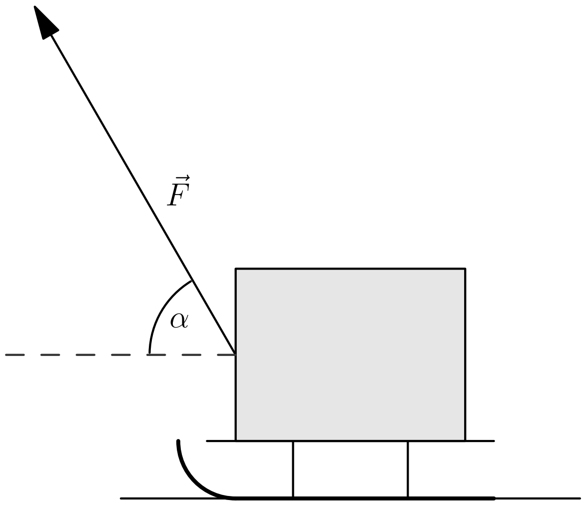
gdzie f to współczynnik tarcia klocka o podłogę.

Wskazówka: Związek między przyśpieszeniem a drogą w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

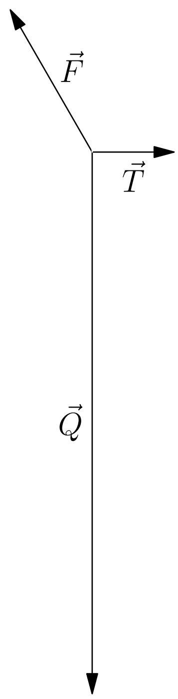
41 Zadanie – Sanki

Mama ciągnęła sanki z dzieckiem po śniegu, działając siłą o wartości $F = 72$ N. Sznurek podczas ruchu był cały czas napięty i nachylony do poziomu pod kątem $\alpha = 60^\circ$. Masa sanek i dziecka wynosiła $m = 40$ kg. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ oraz że ruch był jednostajny prostoliniowy i odbywał się w poziomie.



a) Oblicz pracę, jaką wykonała mama, ciągnąc sanki z dzieckiem na drodze $s = 134$ m.

b) Na poniższym rysunku przedstawiono następujące siły działające na sanki z dzieckiem: $\vec{F}$ - siła ciągnąca, $\vec{T}$ - siła tarcia, $\vec{Q}$ - siła ciężkości. Brakuje na nim pionowej składowej siły reakcji podłoża $\vec{R}$. Zaznacz ją na tym rysunku, zachowaj odpowiednie proporcje.



c) Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego μ sanek o śnieg.

Wskazówka: a) Pamiętaj, że aby obliczyć pracę siły ciągnącej, należy uwzględnić jej składową poziomą (wzdłuż przemieszczenia).

Wskazówka: Długość składowej poziomej siły ciągnącej wynosi $F_x = \frac{1}{2}F$. Wiemy to na podstawie znajomości stosunków boków w trójkącie o kątach 30°, 60°, 90°. Pracę można obliczyć za pomocą zależności:

$$W = \frac{1}{2}Fs.$$

Wskazówka: b) Skoro sanki poruszają się ruchem jednostajnym, to siła wypadkowa musi być równa 0.

Wskazówka: Składowa pozioma siły ciągnącej $\vec{F_x}$ jest równa co do wartości sile tarcia $\vec{T}$. W pionie wartości sił zależą od siebie w następujący sposób:

$$R + F_y = Q,$$

gdzie F_y jest wartością pionowej składowej siły ciągnącej. Zauważ, że siła nacisku, równa co do wartości sile R, nie jest równa sile ciężkości sanek z dzieckiem Q.
Aby skonstruować $\vec{R}$ należy:

- rozłożyć $\vec{F}$ na składowe (pionową $\vec{F_y}$ i poziomą $\vec{F_x}$),
- odmierzyć cyrklem F_y oraz odłożyć tę długość na $\vec{Q}$ tak, aby móc odmierzyć długość $Q - F_y$, taką właśnie długość ma wektor $\vec{R}$,
- narysować pionowo do góry wektor o otrzymanej poprzednio długości.

Wskazówka: c) Wartość siły tarcia wynosi $T = \mu R$. Siła wypadkowa jest równa 0, więc otrzymujemy układ równań z dwoma niewiadomymi (μ oraz R):

$$\begin{cases} F_x = T \\ R + F_y = Q \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2}F = \mu R \\ R + \frac{\sqrt{3}}{2}F = Q \end{cases}$$

gdzie μ oznacza współczynnik tarcia. Rozwiązując układ równań, otrzymamy zależność na współczynnik tarcia:

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}F}{Q - \frac{\sqrt{3}}{2}F}.$$

42 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $2{,}54 \cdot 10^{24}$ kg i $4{,}47 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $115 \cdot 10^6$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Wskazówka: Jaka siła działa na planetę?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie i siła?

43 Zadanie – Samochód na moście

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 74 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 10% ciężaru samochodu?

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym związanym z samochodem następujące siły muszą się równoważyć: siła grawitacji, siła odśrodkowa bezwładności i siła reakcji mostu na samochód.

Wskazówka: Siła reakcji mostu na auto F_r jest to wypadkowa dwóch sił: siły grawitacji F_g i siły odśrodkowej bezwładności F_o

$$F_r = F_g - F_o,$$

$$F_r = mg - \frac{mV^2}{R},$$

gdzie V to prędkość samochodu o masie m.

44 Zadanie – Obrót Ziemi

Oblicz:
a) z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 78% siły grawitacji działającej na niego.
b) ile wynosi ciężar człowieka o masie 65 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym związanym z Ziemią na człowieka, stojącego na równiku, działa siła grawitacji, z którą jest on przyciągany i siła odśrodkowa bezwładności. Ciężar człowieka Q jest to wypadkowa tych dwóch sił

$$Q = G\frac{Mm}{R^2} - \frac{mV^2}{R},$$

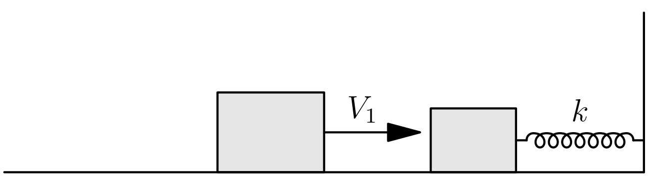
$$Q = kmg,$$

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masa Ziemi i człowieka, a g to przyśpieszenie ziemskie wynikające tylko z oddziaływania grawitacyjnego.

45 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,5 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 164$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześcian o masie 1,1 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 2$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu

$$p_1 = p_2,$$

$$m_1 V_1 = V_2(m_1 + m_2),$$

gdzie V_2 to prędkość zlepionych klocków po zderzeniu.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej - energia kinetyczna E_k zmienia się w energię potencjalną sprężystości E_{ps}

$$E_k = E_{ps},$$

$$\frac{(m_1 + m_2)V_2^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}.$$

46 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,3 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 1,5 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 0,9 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 1,35 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Wskazówka: Jakie siły działają na zawieszony odważnik na sprężynie?

Wskazówka: Ciężarek zawieszony na sprężynie jest w równowadze, więc siła grawitacji F_g równoważy siłę sprężystości sprężyny F_s

$$F_g = F_s$$

$$m_1 g = k_1 x.$$

Wskazówka: Okres drgań wahadła sprężynowego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_1}}.$$

Wskazówka: W momencie, gdy łączymy szeregowo dwie takie same sprężyny, to współczynnik sprężystości nowej sprężyny można obliczyć z

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_2},$$

czyli $k_2 = 2k_1$.

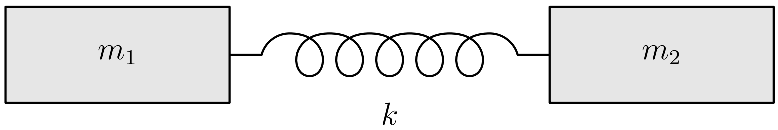
47 Zadanie – Drążek pogo

Janek uwielbia skakać na drążku pogo, którego wysokość bez obciążenia wynosi 105 cm. Gdy Janek stoi na drążku, wysokość drążka zmniejsza się o 10 cm i o tyle samo ściskana jest sprężyna. Na jaką wysokość ponad ziemię jest się w stanie wzbić Janek, wykorzystując jedynie energię zgromadzoną w ściśniętej sprężynie, gdy minimalna wysokość drążka podczas odbicia będzie wynosić 74 cm? Janek waży 58 kg, a masę drążka pogo można pominąć.

Wskazówka:
a) Jakie siły działają na Janka w momencie stanięcia na drążku?
b) Jak zmienia się energia w tym układzie?

48 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 54$ N/m, $m_1 = 2$ kg oraz $m_2 = 3$ kg.



Wskazówka: Opiszmy położenie ciężarków za pomocą współrzędnych x_1 oraz x_2, przyjmijmy zwrot osi X w prawo. Odstęp między nimi to $u \equiv x_2 - x_1$.

Wskazówka: Niech l będzie długością swobodną sprężyny. Siła sprężystości działająca na drugi ciężarek będzie równa: $-k(u - l)$.

Wskazówka: Równiania ruchu dla obu ciężarków:

$$m_1\ddot{x}_1 = +k(u - l)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(u - l)$$

Wskazówka: Po wyznaczeniu przyśpieszeń i odjęciu równań stronami otrzymujemy:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Ale

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{u}$$

Prowadzi to do równania oscylatora

$$\ddot{u} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

49 Zadanie – Ciężarek na lince

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,97 s zakreśla okrąg o promieniu 109 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 54 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Wskazówka: Jaka siła działa na ciężarek?

Wskazówka: Jaka wielkość jest zachowana w tym przypadku?

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu.

Wskazówka: Jak powiązana jest wartość prędkości z okresem w ruchu jednostajnym po okręgu?

50 Zadanie – Tarcza

Na środku tarczy o średnicy 2 m i masie 112 kg, znajduje się człowiek o masie 61 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,4 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu

$$L_2 = L_1,$$

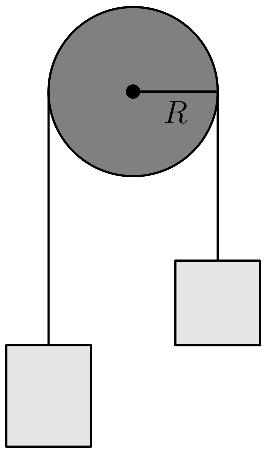
$$2\pi f_2 I_1 + 2\pi f_2 I_2 = 2\pi f_1 I_2,$$

gdzie I_1 to moment bezwładności punktu materialnego, a I_2 to moment bezwładności walca, względem osi obrotu tarczy.

Wskazówka: Moment bezwładności punktu materialnego o masie m w odległości r od osi obrotu to mr^2, a walca o masie M i promieniu R to $\frac{1}{2}MR^2$.

51 Zadanie – Maszyna Atwooda

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0{,}5$ m i masie 3 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszone są dwa obciążniki o masach 2,32 kg i 1,52 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomiń. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:
a) załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
b) załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



Wskazówka: Jakie siły działają na obciążniki?

Wskazówka: Gdy nić ślizga się po nieruchomym bloczku, przyśpieszenie dwóch obciążników połączonych nicią wynosi

$$a_1 = \frac{F_w}{m_c},$$

gdzie $m_c = m_1 + m_2$ to masa całkowita układu, a F_w to siła wypadkowa działająca na układ wzdłuż nici, przy czym $a_1 > 0$, gdy obciążnik m_1 przyśpiesza w dół

$$a_1 = \frac{F_{g1} - F_{g2} - F_L + F_L}{m_1 + m_2},$$

gdzie F_{g1} i F_{g2} to odpowiednio wartości siły grawitacji cięższego i lżejszego obciążnika, a F_L to siły naciągu linki, wynikające z trzeciej zasady dynamiki Netwona.

Wskazówka: Gdy uwzględniamy bezwładność bloczka układamy cztery równania

$$m_1 a_2 = m_1 g - F_{L1},$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + F_{L2},$$

$$\epsilon = \frac{M}{I} = \frac{(F_{L1} - F_{L2})R}{\frac{1}{2} m_3 R^2},$$

$$\epsilon = \frac{a_2}{R},$$

gdzie M to moment siły, I to moment bezwładności walca, a F_{L1} i F_{L2} to wartości siły naciągu nici.

Albo: Można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Przy założeniu, że w chwili początkowej środki mas nieruchomych obciążników były na tej samej wysokości, zmiana wysokości obciążnika o masie m_1 to $-h$, a obciążnika m_2 to $+h$

$$E_1 = E_2,$$

$$E_1 = 0,$$

$$E_2 = \frac{m_1 V^2}{2} - m_1 g h + \frac{m_2 V^2}{2} + m_2 g h + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

otrzymujemy wartość kwadratu prędkości obciążnika

$$V^2 = 2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3},$$

należy skorzystać z tego, że droga w ruchu jednostajnie przyśpieszonym, bez prędkości początkowej jest równa

$$h = \frac{V^2}{2a_2}.$$

52 Zadanie – Naturalny satelita

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $76 \cdot 10^3$ kg okrążającego w czasie 15,8 h jednorodną planetę o masie $424 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Z jakim przyśpieszeniem porusza się satelita?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość satelity, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na satelitę?

53 Zadanie – Zmiana orbity

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 500 kg znajduje się w odległości 4700 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8200 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi 3,69 m/s^2, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

Wskazówka: Praca, jaką trzeba wykonać, jest równa przyrostowi energii mechanicznej satelity

$$E_2 - E_1 = W.$$

Wskazówka: Całkowita energia satelity to suma energii kinetycznej E_k i potencjalnej grawitacji E_p

$$E = E_k + E_p = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{h+R},$$

gdzie h to odległość sztucznego satelity od powierzchni Marsa

$$M = 0{,}1 M_z,$$

gdzie M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym satelity siła odśrodkowa bezwładności F_{ob} równoważy siłę grawitacji F_g

$$F_{ob} = F_g,$$

$$\frac{mV^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2},$$

więc prędkość satelity na orbicie to

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}.$$

Wskazówka: Przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie jest równe

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

więc promień planety Mars to

$$R = \sqrt{\frac{GM}{g}}.$$

54 Zadanie – Prędkość ucieczki

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety $Z90$, stanowi 36% masy Ziemi, a jej promień wynosi 13200 km. Oblicz:
a) prędkość ucieczki ciała z planety $Z90$.
b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie $Z90$ do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 15 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

Wskazówka: Prędkość ucieczki można obliczyć z zasady zachowania energii mechanicznej. Ciało o masie m oddali się dowolnie daleko od planety, gdy ma odpowiednio dużą prędkość, tak by jego prędkość w nieskończoności była równa zero

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mV_\infty^2}{2} - \frac{GMm}{R_\infty},$$

ale

$$\frac{GMm}{R_\infty} \to 0 \text{ dla } R_\infty \to \infty,$$

$$\frac{mV_\infty^2}{2} \to 0 \text{ dla } V_\infty \to 0,$$

gdzie $M = 0{,}36M_z$, a M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: Aby znaleźć wysokość w rzucie pionowym w górę, można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Dla $h \ll R$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh,$$

gdzie

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Albo: Skorzystaj z zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$h = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$t = \frac{|\Delta V|}{g} = \frac{V_0}{g},$$

gdzie h to wysokość na jaką wzniesie się cało, V_0 to prędkość początkowa wyrzuconego pionowo ciała, ΔV to zmiana prędkości w czasie t, podczas wznoszenia się ciała.

55 Zadanie – Tunel średnicowy

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 7200 km od środka planety RbrtHk w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RbrtHk jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $8{,}33 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 8400 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Wskazówka: Jak powiązane są praca siły działającej na ciało i zmiana energii kinetycznej tego ciała?

Wskazówka: Siła grawitacji wewnątrz tej planety, w odległości r od jej środka jest równa sile grawitacji pochodzącej tylko od masy wewnątrz kuli o promieniu r i środku w środku planety.

56 Zadanie – Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 30 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 72 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 640$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszają się te obiekty?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość obiektu, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na obiekty?

57 Zadanie – Dwie gwiazdy

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 8 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 58$ km/s, $v_{B1} = 24$ km/s, $d_1 = 4 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 18$ km/s, $d_2 = 12 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Układ jest izolowany, więc zachowana jest całkowita energia.

Wskazówka: Zasadę zachowania energii dla dwóch ciał można zapisać następująco

$$E_{k\,A1} + E_{k\,B1} + E_{p\,A1-B1} = E_{k\,A2} + E_{k\,B2} + E_{p\,A2-B2}$$

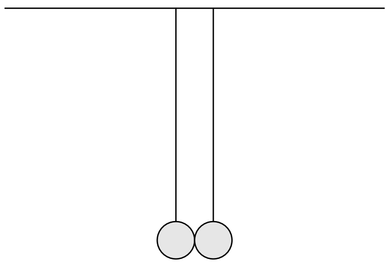
Oznaczenia energii kinetycznych: $E_{k\,A1}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili początkowej; $E_{k\,A2}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili końcowej; analogicznie dla gwiazdy B. Oznaczenia energii potencjalnych: $E_{p\,A1-B1}$ energia potencjalna układu obu gwiazd w chwili początkowej; analogicznie dla chwili końcowej.

Wskazówka: Zasada zachowania energii z użyciem wielkości wymienionych w treści zadania oraz z poszukiwaną szybkością v_{A2}:

$$\frac{1}{2}M_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B1}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_1} = \frac{1}{2}M_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B2}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_2}$$

58 Zadanie – Dwie kulki na linkach

Dwie stykające się małe kulki o masach 0,9 kg i 0,5 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 0,9 m. Lżejsza kulka zostaje odchylona w płaszczyźnie linek o kąt 75° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



Wskazówka: Wysokość h, na jaką lżejsza kulka będzie uniesiona, zależy od kąta odchylenia α i od długości linki l

$$h = l(1 - \cos\alpha).$$

Wskazówka: Jeżeli przyjmiemy, że początkowe położenie kulek odpowiada energii potencjalnej równej zero, to zasada zachowania energii mechanicznej dla lżejszej kulki wygląda następująco

$$E_2 = E_1,$$

$$\frac{mV^2}{2} = mgh,$$

gdzie V to prędkość lżejszej kulki tuż przed zderzeniem.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu, aby obliczyć prędkość zlepionych kulek po zderzeniu V_x

$$p_2 = p_1,$$

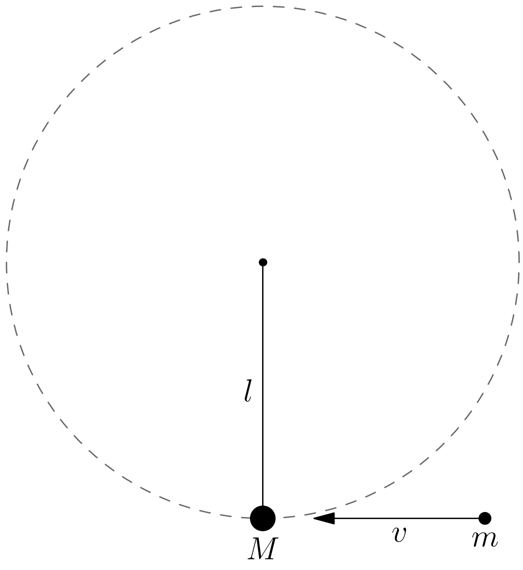
$$(m + M)V_x = mV.$$

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej dla zlepionych kulek

$$(m + M)gH = \frac{(m + M)V_x^2}{2}.$$

59 Zadanie – Postrzelone wahadło

Metalowy ciężarek o masie $M = 242$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 44$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 33$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Pomiń opory ruchu bryły.



Wskazówka: Jaka będzie prędkość powstałej bryły tuż po zderzeniu i zlepienu się ciężarka i pocisku?

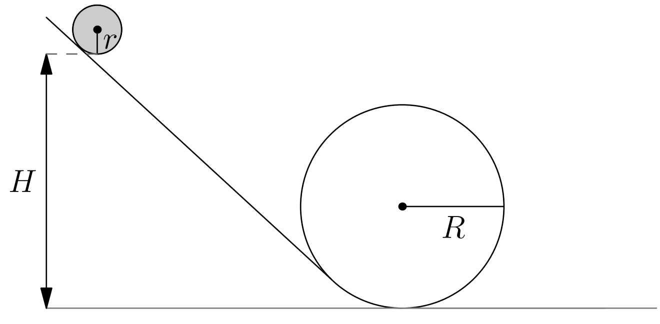
Wskazówka: Jaka będzie prędkość bryły w najwyższym punkcie okręgu?

Wskazówka: Jaki warunek musi być spełniony w najwyższym punkcie okręgu, by torem bryły był właśnie okrąg?

Wskazówka: Ile jest równa minimalna wartość prędkości spełniająca ten warunek?

60 Zadanie – Pętla śmierci

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0{,}05$ m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu $R = 1{,}2$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej.

Wskazówka: Uwzględnij energię kinetyczną ruchu obrotowego kuli o masie m i promieniu r. Moment bezwładności jednorodnej kuli $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej w układzie związanym z pętlą

$$mg(H + r) = mg(2R - r) + \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

$$\omega = \frac{V}{r},$$

gdzie V i ω to odpowiednio prędkość liniowa kuli i prędkość kątowa kuli w najwyższym punkcie pętli.

Wskazówka: Rozpatrując problem w układzie inercjalnym, w najwyższym punkcie pętli przyśpieszenie ziemskie pełni rolę przyśpieszenia dośrodkowego

$$\frac{mV^2}{R-r} = mg.$$

61 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Proton porusza się z prędkością o wartości 4000 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 0,9 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg.

Wskazówka: Ile wynosi wartość działającej na proton siły?

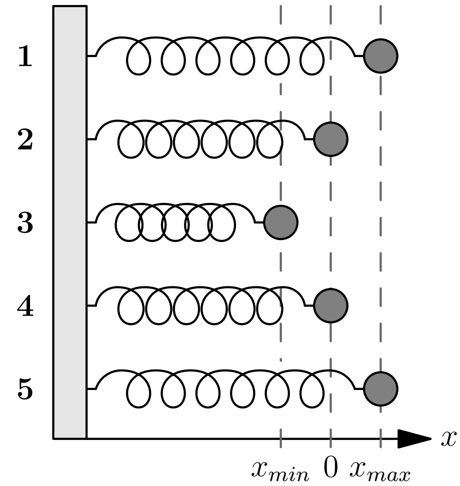
Wskazówka: Na proton działa siła Lorentza o wartości $F = qvB \approx 57{,}7 \cdot 10^{-17}$ N.

62 Zadanie – Oscylator harmoniczny

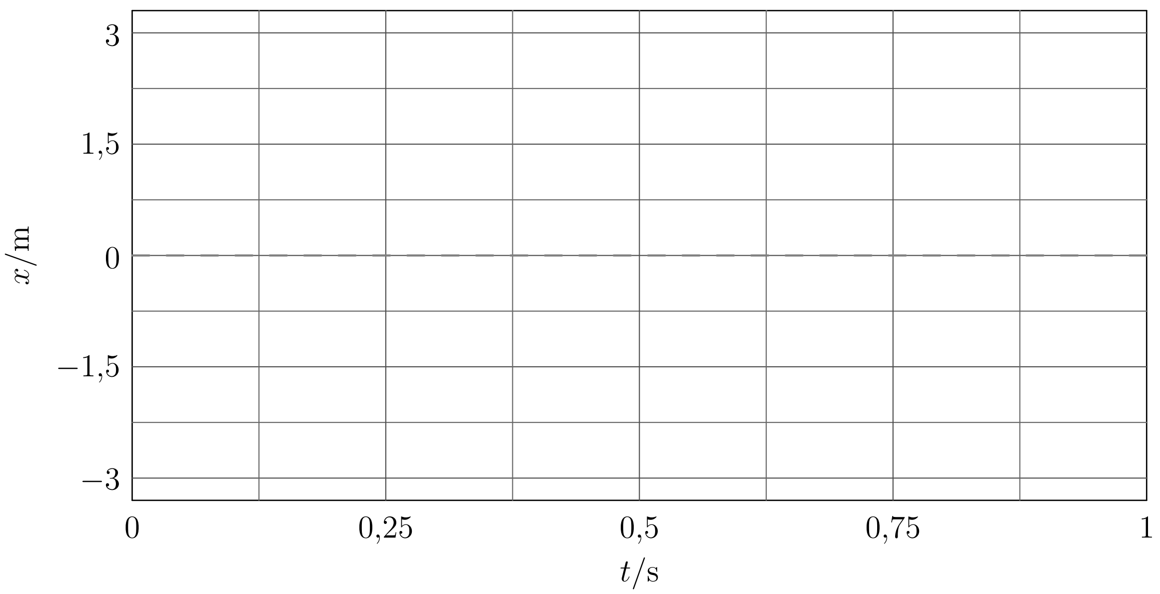
Przyjrzyjmy się prostemu układowi drgającemu, którego równanie ruchu ma postać:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

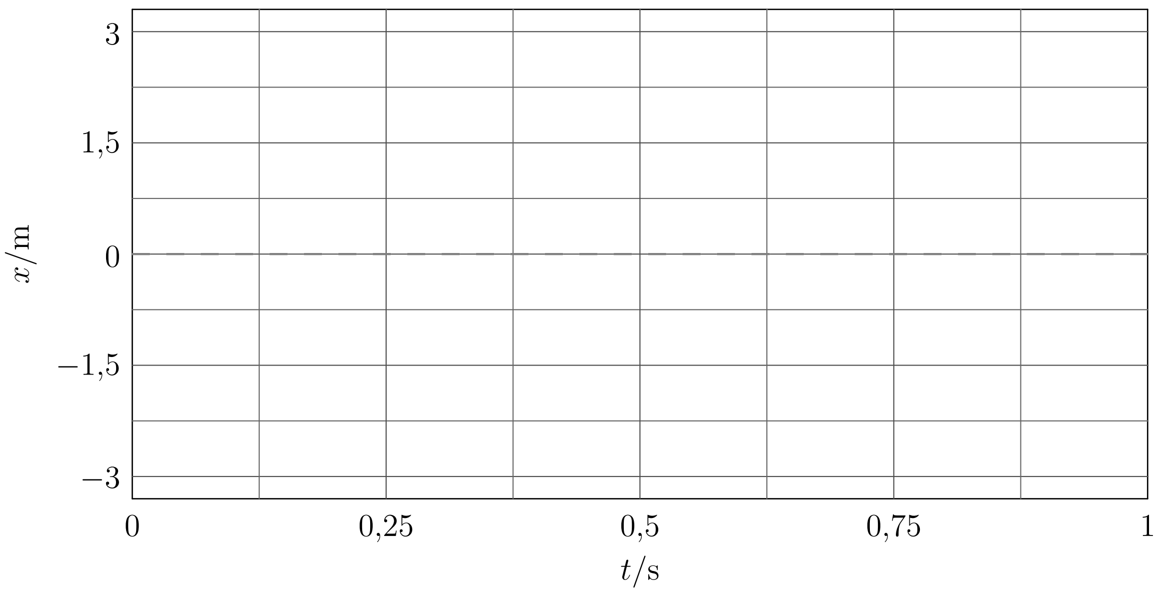
gdzie x_m, ω i ϕ są stałymi. Na rysunku można dostrzec ekstremalne momenty ruchu kulki: 1 i 5 odpowiadają maksymalnemu wychyleniu kulki, 3 minimalnemu. W momentach 2 i 4 kulka przechodzi przez położenie równowagi.



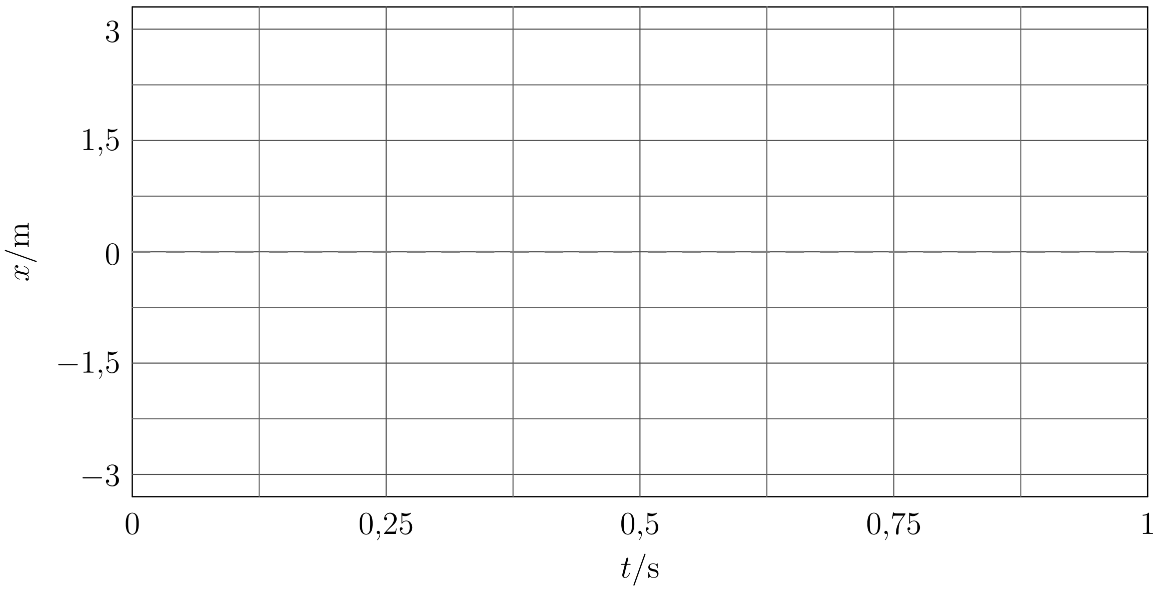
a) Narysuj wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu od momentu 1 do 5.



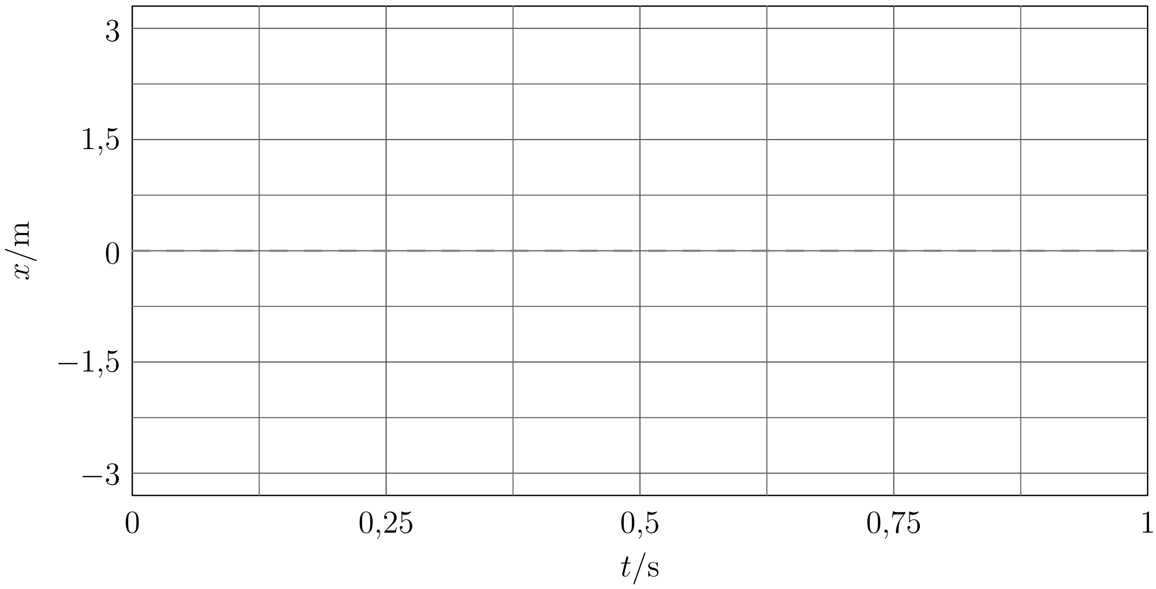
b) Narysuj wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Narysuj wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

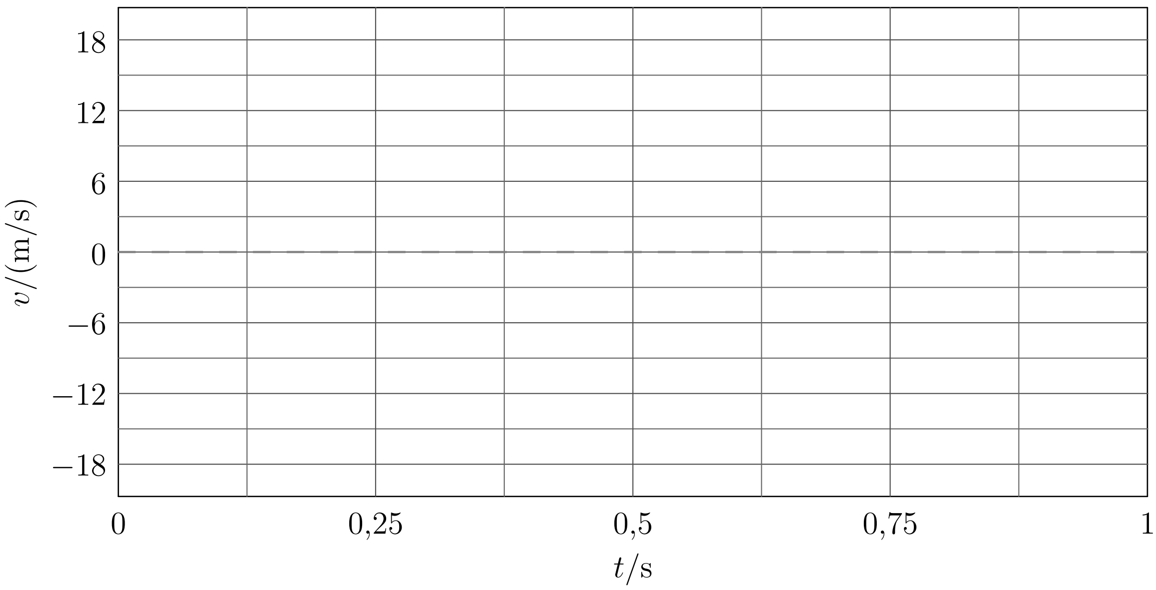


d) Narysuj wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



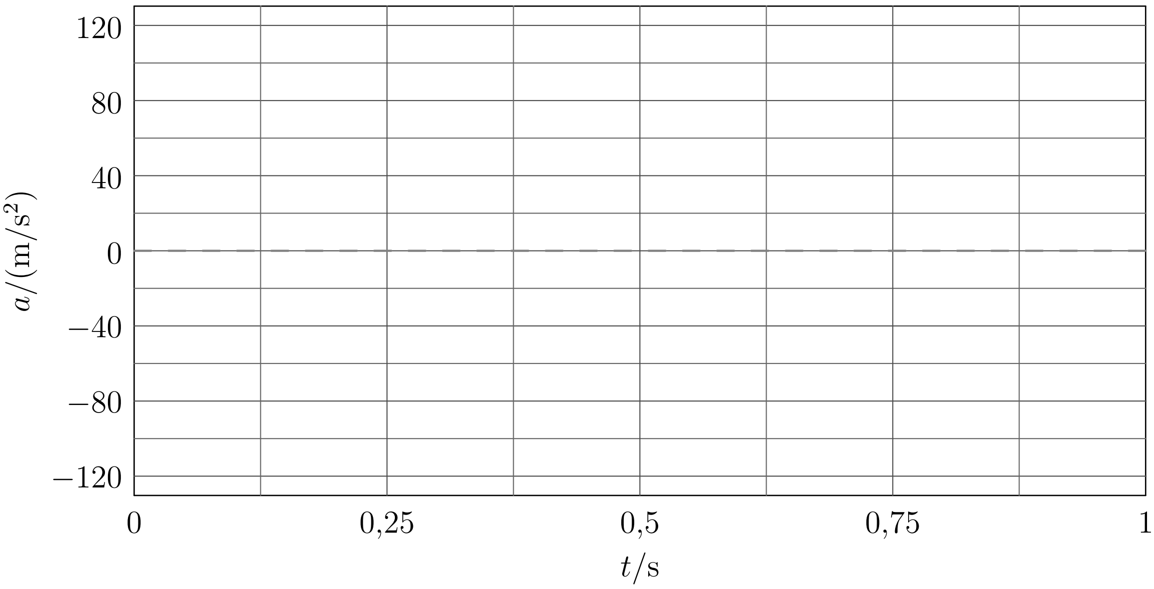
e) Jaką postać ma równanie opisujące prędkość kulki?

Narysuj wykres zależności prędkości kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



f) Jaką postać ma równanie opisujące przyspieszenie kulki?

Narysuj wykres zależności przyspieszenia kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



63 Zadanie – Kulka na sprężynie

Po idealnie gładkim stole porusza się kulka o masie 670 g, która umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości 63 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Kulkę odciągnięto na odległość 12 cm od położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie. Pomiń opory ruchu.
a) Wyznacz amplitudę.
b) Wyznacz okres drgań.
c) Wyznacz częstotliwość
d) Wyznacz częstość kołową.
e) Wyznacz maksymalną prędkość kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
f) Wyznacz maksymalne przyspieszenie kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięte.
g) Wyznacz maksymalną energię potencjalną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
h) Wyznacz maksymalną energię kinetyczną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

64 Zadanie – Drgająca ciecz

Jaś nalał pewną ciecz o objętości 11 cm^3 do pionowo ustawionej U-rurki, której przekrój poprzeczny wynosił 0,4 cm^2. Następnie dmuchnął do jednego z ramion tak mocno, że poziom wody podniósł się w drugim ramieniu. Zmiany poziomu cieczy zachodzą jedynie w prostych fragmentach ramion rurki. Pomiń opory ruchu cieczy.
a) Wykaż, że siła, która dąży do przywrócenia stanu równowagi, to siła harmoniczna.
b) Oblicz częstotliwość, z jaką będzie drgała ciecz.

Wskazówka:
a) Jaka siła powoduje ruch? Jak zmieni się poziom cieczy w pierwszym ramieniu, jeżeli w drugim ciecz podniesie się o x?
b) Zauważ podobieństwo do ruchu ciężarka na sprężynie.

65 Zadanie – Wahadło na planecie

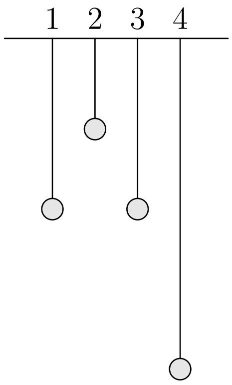
Na pewnej planecie mała kulka o masie 45 g została zawieszona na nitce o długości 18 cm. Kulka waha się z okresem wynoszącym 0,5 s oraz amplitudą znacznie mniejszą od długości nici. Opory ruchu można pominąć.
a) Czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne tej planety? Jeśli tak, to ile ono wynosi?
b) Jak zmieni się okres wahań kulki, jeżeli zwiększymy jej masę trzykrotnie?
c) Jaka musi być długość nici, aby ta sama kulka wahała się z okresem równym 1 s?

Wskazówka:
a) Jak zależy okres wahań od przyspieszenia grawitacyjnego planety?
b) Od czego zależy okres wahań?
c) Jak zależy okres wahań od długości wahadła?

66 Zadanie – Rezonans mechaniczny

Na rozciągniętej poziomo lince zawieszamy cztery wahadła. W poniższej tabeli zestawiono wartości ich długości oraz mas zawieszonych ciężarków, gdzie l i m są jednostkami odpowiednio długości i masy.

numer wahadła	1	2	3	4
długość	l	$0{,}5l$	l	$2l$
masa	m	$2m$	$3m$	m



Pierwsze wahadło wprawiono w ruch. Po pewnym czasie zaobserwowano ruch pozostałych wahadeł. Które z nich miało największe wychylenie? Drugie, ponieważ znajduje się najbliżej? Trzecie, ponieważ ma taką samą długość nici? Czy może czwarte, ponieważ ma taką samą masę?

Wskazówka: Od czego zależy okres drgań wahadła matematycznego?

67 Zadanie – Łamigłówka z elektrostatyki

Do dyspozycji masz uziemienie oraz trzy jednakowe metalowe kule, dwie z nich naładowane są ładunkiem Q, a trzecia ładunkiem $-Q$. Otrzymaj na jednej z nich ładunek $\frac{3}{8}Q$. Możesz łączyć kule ze sobą oraz z uziemieniem.

68 Zadanie – Naładowane kule

Powierzchnie dwóch jednakowych plastikowych kul naładowano jednorodnie: pierwszej kuli ładunkiem $-q$, a drugiej ładunkiem $-2q$. Środki kul na początku były w odległości d od siebie, następnie przemieszczono jedną z kul i ta odległość wynosiła $0{,}3d$.
a) Uzupełnij luki i skreśl wyrazy tak, aby tabela zawierała prawdziwe informacje o siłach działajacych na kule przedstawione na rysunku.

kula 1		kula 2	
przed zsunięciem			
zwrot siły działającej na kulę 1:	w prawo/w lewo	zwrot siły działającej na kulę 2:	w prawo/w lewo
wyrażenie opisujące wartość tej siły:		wyrażenie opisujące wartość tej siły:	
po zsunięciu			
zwrot siły działającej na kulę 1:	w prawo/w lewo	zwrot siły działającej na kulę 2:	w prawo/w lewo
wyrażenie opisujące wartość tej siły:		wyrażenie opisujące wartość tej siły:	

b) Oblicz stosunek wartości siły działającej po zsunięciu do tej, która działała na początku.

Wskazówka: Aby ustalić zwrot siły, zwróć uwagę na znaki ładunków.

Wskazówka: Wartość działającej siły jest taka sama dla obu kul (III zasada dynamiki Newtona). Można ją obliczyć za pomocą zależności wynikającej z prawa Coulomba:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{d^2},$$

gdzie q_1 i q_2 są wartościami ładunków odpowiednio na kuli 1 i na kuli 2, d to odległość między kulami, a k to stała elektryczna.

Wskazówka: Aby obliczyć stosunek sił, należy podzielić przez siebie wyznaczone już wartości.

69 Zadanie – Natężenie pola elektrycznego

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 14 nm od jądra atomowego o liczbie atomowej 12. Opisz również kierunek i zwrot wektora natężenia pola elektrycznego względem jądra. Pomiń wpływ innych obiektów.

Wskazówka: Ile protonów znajduje się w jądrze?

Wskazówka: Jaki jest ładunek elektryczny protonu?

70 Zadanie – Przyciągnięty elektron

Oblicz pracę siły elektrostatycznej ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku $+3e$, gdzie e jest ładunkiem protonu, podczas przyciągania elektronu z odległości 7 mm do 4 nm. Przyjmij, że elektron na początku i na końcu procesu spoczywa. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Praca podczas przyciągania z odległości r_1 do r_2 jest równa $W_{1\to 2} = E_{p\,1} - E_{p\,2}$, gdzie $E_{p\,1}$ oznacza energię potencjalną układu jon-elektron na początku, a $E_{p\,2}$ na końcu ruchu.

71 Zadanie – Praca nad ładunkiem w polu dipola elektrycznego

Oblicz pracę, jaką wykonała zewnętrzna siła, przemieszczając proton po półokręgu w polu trwałego, nieruchomego dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego $2{,}1 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo proton spoczywał na symetralnej dipola w odległości 1,1 nm od tego dipola. Na końcu proton również spoczywał na symetralnej dipola, ale w odległości 2,4 nm od tego dipola i po jego drugiej stronie.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Ile pracy wykona zewnętrzna siła, przesuwając ładunek wzdłuż symetralnej dipola, jeśli na końcu i na początku ładunek spoczywa?
Albo:
Ile pracy wykona zewnętrzna siła, przesuwając jednostajnie ładunek wzdłuż symetralnej dipola?

Wskazówka: Jak jest skierowane natężenie pola elektrycznego na symetralnej dipola?

72 Zadanie – Obrót molekuły w polu innej cząsteczki

Oblicz, ile energii zostanie przekazane otoczeniu, gdy molekuła posiadająca moment dipolowy o wartości $3{,}5 \cdot 10^{-30}$ Cm ustawi się tak, by jej moment dipolowy był skierowany przeciwnie do momentu dipolowego drugiej, unieruchomionej molekuły znajdującej się w odległości 1,9 nm. Wartość momentu dipolowego drugiej molekuły jest równa $17{,}6 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle i mają zgodne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł. Przyjmij, że molekuły są trwałymi dipolami punktowymi. Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych jest równa

$$E_p = k\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r}\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r}\right)\frac{1}{r^3}$$

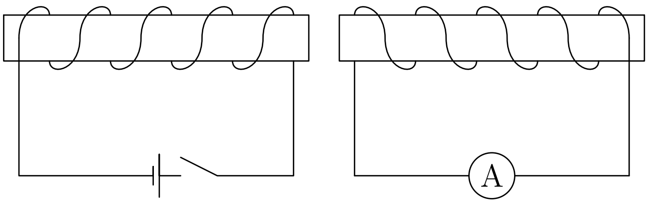
gdzie k jest stałą elektryczną, $\vec{p}_i$ momentem dipolowym, a $\vec{r}$ wektorem względnego położenia dipoli. Korzystając z tego wzoru, uzasadnij, które jego składowe są istotne w rozważanym problemie. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Momenty dipolowe w początkowym i końcowym ustawieniu są prostopadłe do wektora względnego położenia, więc $\vec{p}_i \cdot \vec{r} = 0$. Istotny jest tylko składnik $k\,\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 / r^3$.

73 Zadanie – Zwojnica

Na schemacie przedstawiono dwie zwojnice. W pierwszym obwodzie znajduje się bateria i włącznik, w drugim amperomierz. Po zamknięciu obwodu po lewej stronie w obwodzie po prawej stronie amperomierz zarejestrował przepływ prądu.



a) Jak wyjaśnisz przepływ prądu w obwodzie po prawej stronie?

b) Zaznacz na rysunku, w którym kierunku będzie płynął prąd w obwodzie po prawej stronie. Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka: Gdy zamykamy obwód, zmieniamy pole magnetyczne wokół zwojnicy.

Wskazówka: Zmiana pola magnetycznego powoduje przepływ prądu w drugiej zwojnicy.

Wskazówka: Prąd płynie w taki sposób, aby przeciwdziałać przyczynie, która go wywołała (reguła Lenza).

74 Zadanie – Cewka i magnes

Układ składa się z wykonanej z miedzianego drutu, podłączonej tylko do amperomierza cewki oraz trwałego, silnego magnesu. Cewka i magnes mogą być niezależnie przesuwane wzdłuż prostej, która jest jednocześnie osią cewki i magnesu (bieguny magnesu leżą na tej prostej). W poniższej tabeli, w wymienionych trzech przypadkach opisz zachowanie wartości bezwzględnej natężenia prądu, $|I|$, płynącego przez cewkę (*maleje, rośnie, stała i różna od 0, równa 0*) oraz wypadkowe oddziaływanie elektromagnetyczne między cewką a magnesem (*przyciągają się, odpychają się, nie oddziałują*).

opis	$\boldsymbol{|I|}$	**oddziaływanie**
Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki		
Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu		
Magnes jest ze stałą prędkością zbliżany do nieruchomej cewki		

75 Zadanie – Generator fal

Uczeń nalał wody do wanny. Na powierzchni wody położył drewnianą listewkę połączoną z generatorem drgań. Generator poruszał listewką pionowo, ze stałą częstotliwością tak, że listewka cały czas była w kontakcie z wodą. W górnym położeniu znajdowała się co 0,24 s. Uczeń wytworzył w ten sposób na powierzchni wody falę płaską. Jej prędkość wynosi 0,38 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz częstotliwość wytwarzanych fal oraz odległość między kolejnymi grzbietami.

Wskazówka: Czas, po jakim listewka znajdzie się ponownie w tym samym położeniu, należy zinterpretować jako okres T. Znajomość okresu umożliwia wyznaczenie częstotliwości f:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Wskazówka: Odległość między kolejnymi grzbietami jest równa długości fali λ i zależy w następujący sposób od prędkości fali v oraz jej okresu T:

$$\lambda = Tv.$$

76 Zadanie – Dźwięk w piaskowcu

Prędkość dźwięku w piaskowcu jest równa 2600 m/s. Oblicz okres oraz częstotliwość fali rozchodzącej się w płycie z tego piaskowca, jeśli długość fali jest równa 0,8 km.

Wskazówka: $\lambda = v\,T$

Wskazówka: $f = 1/T$

77 Zadanie – Częstotliwość światła

Wiązka światła o długości fali 700 nm w próżni pada na powierzchnię szkła o bezwzględnym współczynniku załamania tego światła równym 1,74. Oblicz częstotliwość i długość fali tego światła w szkle. Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

Wskazówka:

$$\lambda = v\,T = v/f$$

λ – długość fali; v – prędkości fali; T – okres fali; f – częstotliwość fali.

Wskazówka:

$$v = c/n$$

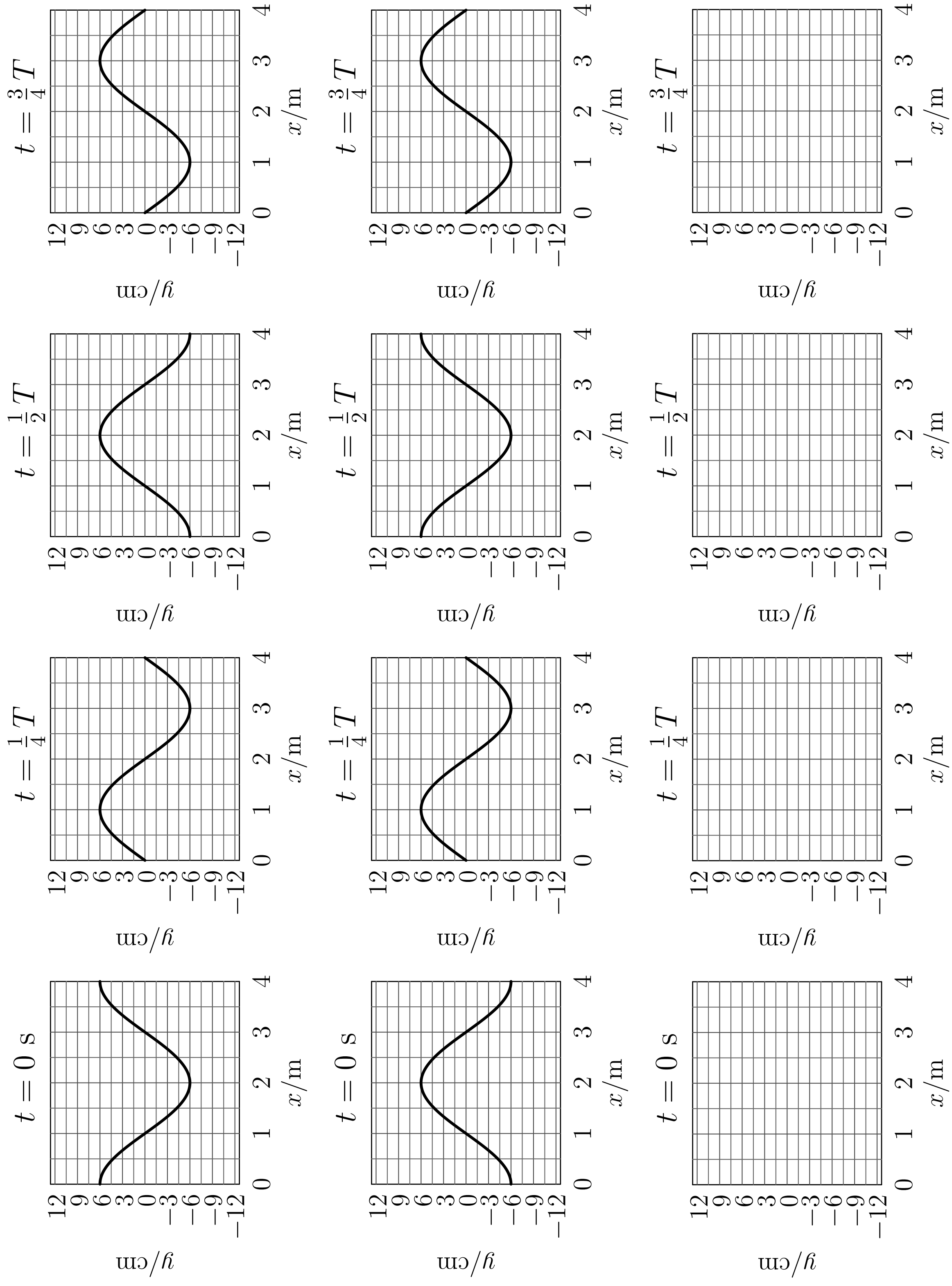
c – prędkość światła w próżni; n – bezwzględny współczynnik załamania światła.

78 Zadanie – Fala biegnąca

Wzdłuż sznurka biegnie fala, która opisana jest wzorem: $y(x,t) = A\cos(Bx - Ct + D)$, gdzie x to położenie, a t to czas. Stałe numeryczne wynoszą odpowiednio: $A = 7$ mm, $B = 74$ rad/m, $C = 37$ rad/s, $D = 1$ rad.
a) Wyznacz amplitudę fali.
b) Wyznacz długość fali.
c) Wyznacz okres fali.
d) Wyznacz częstotliwość fali.
e) Wyznacz prędkość fali.
f) Wyznacz przemieszczenie sznurka w punkcie $x = 12{,}5$ cm w chwili $t = 8{,}9$ s.

79 Zadanie – Fale przeciwbieżne

Na poniższym rysunku umieszczono zależności wychylenia y od położenia x w wyróżnionych chwilach t dla dwóch fal: dla pierwszej fali w pierwszym rzędzie i dla drugiej fali w drugim rzędzie. Jak będzie wyglądała ich suma (superpozycja)? Narysuj odpowiednie zależności $y(x)$ w trzecim rzędzie.



Wskazówka: Dla tej samej chwili t i tych samych x dodaj wychylenia y pierwszej i drugiej fali.

80 Zadanie – Kuter rybacki

Dwóch rybaków wypłynęło kutrem rybackim na morze w poszukiwaniu ławicy ryb. Płynęli z prędkością 18 km na godzinę względem dna. Fale morskie, płynące w przeciwną stronę, uderzały w przednią część kadłuba około 70 razy w ciągu minuty. Odległość między kolejnymi grzbietami fal wynosiła 5 m.
W celu znalezienia ławicy ryb, rybacy wykorzystali sonar, czyli urządzenie, które wysyłało pionowo w głąb wody fale ultradźwiękowe o częstotliwości 160 kHz i długości 9 mm. Od chwili wysłania impulsu do chwili jego powrotu po odbiciu się od ławicy ryb upłynęło 60 ms.
a) Ile wynosi szybkość przemieszczania się fal morskich względem dna?
b) Ile wynosi szybkość rozchodzenia się fal ultradźwiękowych emitowanych przez sonar?
c) Jaka jest głębokość, na której znajduje się ławica ryb?

Wskazówka:
a) Uwzględnij fakt poruszania się kutra rybackiego.
b) Jaka jest zależność pomiędzy długością a częstotliwością fali?
c) Jaką drogę musi pokonać impuls?

81 Zadanie – Struna

Rozważmy gitarową strunę o długości 0,662 m, która rozpięta jest pomiędzy dwoma zaciskami. Przy częstościach rezonansowych, w wyniku interferencji, w strunie powstaje fala stojąca. Drganie własne o najniższej częstości rezonansowej nazywamy modem podstawowym lub pierwszą harmoniczną. W przypadku powyższej struny częstotliwość modu podstawowego wynosi 325 Hz.
a) Z jaką prędkością rozchodzi się fala w strunie?
b) Jaką częstotliwość ma druga harmoniczna?

Wskazówka:
a) Ile 'połówek fali' można zmieścić między zaciskami struny?
b) Jak zależy częstotliwość od liczby harmonicznej n?

82 Zadanie – Prędkość dźwięku w stali

Paweł i Gaweł stoją na szynach kolejowych w odległości 726 m od siebie. Paweł uderzył młotkiem w szynę. Gaweł, przykładając ucho do szyny, usłyszał dźwięk o 2 sekundy wcześniej niż dźwięk, który doleciał w powietrzu. Oblicz prędkość, z jaką rozchodzi się dźwięk w stali, z której zrobiono szyny. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 339 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Wskazówka: Jak powiązać czas rozchodzenia się dźwięku w powietrzu z czasem rozchodzenia się w stali?

83 Zadanie – Radiowóz policyjny

Syrena radiowozu policyjnego wydaje dźwięk o częstotliwości 950 Hz. Samochód zbliża się ze stałą prędkością z oddali do ludzi stojących na przystanku, którzy odbierają dźwięk o częstotliwości 1040 Hz. Prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu wynosi 341 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
a) Ile wynosi prędkość radiowozu?
b) Znając prędkość radiowozu, oblicz częstotliwość dźwięku, jaką usłyszą ludzie na przystanku, gdy radiowóz znajdzie się w znacznej odległości, oddalając się od nich.

Wskazówka:
a) W jaki sposób częstotliwość odbieranego dźwięku zależy od prędkości źródła?
b) Jak zmienia się odbierana częstotliwość w przypadku oddalania się źródła?

84 Zadanie – Nietoperz

Nietoperz orientuje się w przestrzeni, wysyłając i odbierając odbite fale dźwiękowe. Spoczywający nietoperz wysyła dźwięki o częstotliwości 85 kHz. Wydając ten sam dźwięk, osobnik leciał z prędkością 13 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, prostopadle do pionowej ściany jaskini. Jaką częstotliwość miała odbierana przez nietoperza fala dźwiękowa, która wróciła do niego po odbiciu? Prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu wynosi 339 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Wskazówka: Jaką prędkość miało źródło dźwięku, a jaką detektor dźwięku?

85 Zadanie – Odkurzacz

Natężenie fali dźwiękowej I to moc fali przypadająca na jednostkę powierzchni, przez którą przechodzi fala. Poziom natężenia dźwięku β definiujemy jako $\beta = (10\ \mathrm{dB}) \log \frac{I}{I_0}$, gdzie I_0 to standardowe natężenie odniesienia, $I_0 = 10^{-12} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Jednostką natężenia dźwięku jest decybel. Poziom natężenia szeptu wynosi 21 dB, a odpowiadające mu natężenie I_1 jest 10000 razy mniejsze niż natężenie I_2 pracującego odkurzacza. Oblicz poziom natężenia dźwięku w decybelach pracującego odkurzacza.

Wskazówka: Zapisz definicję natężenia dźwięku dla odkurzacza.

86 Zadanie – Fala podłużna w pręcie

Oblicz prędkość rozchodzenia się podłużnej fali w długim, metalowym pręcie. Długość fali jest znacznie większa od średnicy pręta. Gęstość metalu, z którego wykonano pręt, jest równa 8800 $\mathrm{kg/m^3}$, a moduł Younga tego metalu jest równy 272 GPa. Jeśli nie pamiętasz zależności prędkości fali od modułu Younga i gęstości, to w opisanym przypadku możesz ją uzyskać, rozważając wymiary tych wielkości.

Wskazówka: $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$

Wskazówka: $\mathrm{N} = \mathrm{kg \cdot m/s^2}$

Wskazówka: $\mathrm{Pa} = \mathrm{kg/(m \cdot s^2)}$

Wskazówka: $\mathrm{Pa/(kg/m^3)} = \mathrm{m^2/s^2}$

87 Zadanie – Interferencja fal dźwiękowych

W jednorodnym ośrodku umieszczono dwa głośniki. Pierwszy głośnik znajduje się w odległości 11,72 m, a drugi w odległości 3,72 m od mikrofonu. Każdy z głośników oddzielnie wytwarzał w okolicy mikrofonu falę o takiej samej amplitudzie, a w obszarze między tym głośnikiem a mikrofonem zmiany ciśnienia można było w przybliżeniu opisać jako falę płaską o długości fali 200 cm. Następnie włączono oba głośniki. Drgają one w taki sam sposób, czyli w zgodnej fazie. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ, czy w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, nastąpi wzmocnienie czy osłabienie dźwięku w porównaniu z sytuacją, gdy był włączony tylko jeden z głośników.

Wskazówka:

$$|d_1 - d_2|/\lambda = ?$$

d_1 oraz d_2 – odległość od mikrofonu odpowiednio pierwszego oraz drugiego głośnika; λ – długość fali.

88 Zadanie – Siatka dyfrakcyjna

Wiązka monochromatycznego światła oświetla siatkę dyfrakcyjną posiadającą 500 rys na jednym milimetrze. Na ekranie zaobserwowano prążek pierwszego rzędu pod kątem 16°.
a) Jaka jest długość fali światła?
b) Jaka to barwa światła?

Wskazówka:
a) W jaki sposób wyznaczyć stałą siatki dyfrakcyjnej?
b) W jakim zakresie widma światła widzialnego znajduje się barwa czerwona, a w jakim zielona?

89 Zadanie – Doświadczenie Younga

Zielone światło o długości fali 550 nm oświetla dwie bardzo wąskie szczeliny odległe o 1,1 mm. Ekran, na którym obserwujemy obraz interferencyjny, jest odległy od szczelin o 5,6 m. Ile wynosi odległość między jasnymi prążkami?

Wskazówka: Jaki jest warunek powstania jasnych prążków?

90 Zadanie – Czy to fala?

W otoczeniu strefy subdukcji wychylenie powierzchni Ziemi opisano następującą funkcją zależną od położenia x oraz czasu t:

$$f(x,t) = N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + \left(\frac{t}{T}\right)^2\right)$$

gdzie N, L, T są stałymi. Funkcja opisywała wychylenie dla $x \in (0, L)$ oraz $t \in (0, T)$. Sprawdź, czy ta funkcja spełnia równanie falowe, a więc czy opisywane wychylenie było falą.

Wskazówka:

$$v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

91 Zadanie – Zderzenie z α

Z jądrem ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ zderza się cząstka α. Uzupełnij zapis tej reakcji, wpisując właściwe liczby lub symbole w 5 miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{\dots}_{\dots}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{\dots}_{\dots}\dots$$

Wskazówka: Wykonaj bilans liczb masowych i atomowych.

Wskazówka: $\alpha = {}^4_2\mathrm{He}$.

92 Zadanie – Procesy jądrowe

Uzupełnij zapis reakcji jądrowej, wpisując właściwe liczby lub symbole w miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{144}_{54}\mathrm{Xe} + \ldots{}^{\ldots}_{\ldots}\ldots$$

Wskazówka: Wykonaj bilans liczb masowych i atomowych.

93 Zadanie – Czas połowicznego rozpadu

W próbce po $900 \cdot 10^3$ latach liczba radioaktywnych jąder atomowych pewnego izotopu zmniejszyła się 64 razy. Oblicz czas połowicznego rozpadu tego izotopu.

Wskazówka: Po upływie czasu połowicznego rozpadu liczba radioaktywnych jąder danego izotopu zmniejsza się o (około) połowę.

Wskazówka: $2^n = \ldots$

Wskazówka: $2^6 = 64$.

94 Zadanie – Wiek próbki

Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu jest równy $1{,}54 \cdot 10^6$ s. Oblicz wiek próbki, jeśli wiadomo, że 85% jąder tego izotopu w próbce już się rozpadło. Wynik podaj w tygodniach.

Wskazówka: Po upływie czasu połowicznego rozpadu, $T_{1/2}$, liczba radioaktywnych jąder danego izotopu zmniejsza się o (około) połowę.

Wskazówka: Liczba jąder izotopu jest równa $N = N_0/2^n$, gdzie $n = t/T_{1/2}$, N_0 jest początkową liczbą jąder izotopu, a t czasem.

Wskazówka: Część jąder, które się rozpadły, to $d = (N_0 - N)/N_0 = 1 - N/N_0 = 1 - 2^{-n}$.

Wskazówka: $n = -\log_2(1 - d)$.

95 Zadanie – Datowanie geologiczne

W pewnej próbce granitu znajduje się 1,24 mg argonu $^{40}\mathrm{Ar}$ i 1,74 mg potasu $^{40}\mathrm{K}$. Wyznacz wiek tej próbki. Czas połowicznego rozpadu $^{40}\mathrm{K}$ wynosi $1{,}25 \cdot 10^9$ lat. Wiadomo, że tylko ok. 11% rozpadających się jąder $^{40}\mathrm{K}$ zmienia się w jądra $^{40}\mathrm{Ar}$. Przyjmij, że wszystkie jądra $^{40}\mathrm{Ar}$ w próbce powstały z rozpadu $^{40}\mathrm{K}$ i że poza tym rozpadem inne procesy nie wpływały na zmianę składu tych dwóch pierwiastków w próbce granitu.

Wskazówka: Po upływie czasu połowicznego rozpadu liczba – a więc i masa – radioaktywnych jąder danego izotopu zmniejsza się o (około) połowę.

Wskazówka: $m_{\mathrm{K}i} = m_{\mathrm{K}f} + m_{\mathrm{Ar}}/b = 1{,}74\ \mathrm{mg} + 1{,}24\ \mathrm{mg}/0{,}11$.

Wskazówka: $m_{\mathrm{K}f} = m_{\mathrm{K}i}/2^n$, gdzie $n = t/T_{1/2}$.

Wskazówka: $n = \log_2(m_{\mathrm{K}i}/m_{\mathrm{K}f}) = \log_2(1 + m_{\mathrm{Ar}}/(b \cdot m_{\mathrm{K}f}))$.

96 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 6$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej n (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

Wskazówka: $n = 1, 2, ...$

Wskazówka: $E_\gamma = E_i - E_f = hf$.

Wskazówka: $E_n \propto -n^{-2}$.

97 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej l i magnetycznej m określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 4$.

Wskazówka: $l = 0, 1, ..., n - 1$.

Wskazówka: $m = -l, ..., 0, ..., +l$.

98 Zadanie – Liczba fotonów

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 770 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 65% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 37 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Wskazówka:

$$E_\gamma = hf$$

E_γ – energia fotonu; f – częstotliwość światła.

Wskazówka:

$$\lambda = c/f$$

λ – długość fali.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 2{,}58 \cdot 10^{-19}$ J.

Wskazówka:

$$E_i = E_{\text{abs}}/\varepsilon_{\text{eff}}$$

E_i – energia impulsu; E_{abs} – energia zaabsorbowana przez płytkę; ε_{eff} – efektywność pochłaniania energii przez płytkę.

99 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 210 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 1,18 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s $= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV $\cdot$ s.

Wskazówka:

$$E_\gamma = W + E_k$$

E_γ – energia fotonu; W – praca wyjścia; E_k – maksymalna energia kinetyczna elektronu.

Wskazówka:

$$E_\gamma = hf$$

f – częstotliwość światła.

Wskazówka:

$$\lambda = c/f$$

λ – długość fali światła.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 5{,}91$ eV.

100 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa na środku studni

Cząstka jest uwięziona w jednowymiarowej, nieskończenie głębokiej studni potencjału. Studnia ma szerokość L. Położenie cząstki opisujemy zmienną $x \in [0, L]$. Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia tej cząstki na środku studni, czyli dla $x = L/2$. Kwantowa funkcja falowa opisująca cząstkę jest równa

$$\Psi(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

gdzie $n = 7$, $L = 38 \cdot 10^{-10}$ m. Wynik podaj w jednostkach nm^{-1}.

Wskazówka: Gęstość prawdopodobieństwa jest równa

$$|\Psi(x)|^2$$

Wskazówka:

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2(n\frac{\pi}{L}x)$$

Wskazówka: Dla n nieparzystego

$$\sin^2(n\frac{\pi}{2}) = 1$$

101 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Dla każdego ze stanów opisanych następującymi funkcjami falowymi oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru:
a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi} a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm^{-3}. Funkcje falowe określone są w układzie kartezjańskim XYZ, jądro spoczywa w środku tego układu, a r jest odległością od środka układu do punktu (x, y, z).

Wskazówka:

$$e^0 = 1$$

Wskazówka:

$$\Psi_{210} \propto z$$

102 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną x. Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \exp(-x/L) \cdot \sin\left(2\pi\frac{x}{L} + \frac{\pi}{4}\right)$$

gdzie N oraz $L = 8$ nm są stałymi. Zmienna x przyjmuje wartości od 0 do $\frac{3}{2}L$. Wypisz wszystkie wartości x w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np. $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.

Wskazówka: Prawdopodobieństwo jest najmniejsze w pobliżu miejsc zerowych funkcji falowej.

Wskazówka: $\sin(n\pi) = 0$ oraz $\cos(\pi/2 + n\pi) = 0$ dla n całkowitego.

103 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

Cząstka o masie m jest uwięziona w sześcianie o krawędzi L. Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.
a) Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.

b) Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
c) Dla cząstki znajdującej się w stanie opisywanym funkcją falową

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} \sin(kx) \left(1 - 4\sqrt{2}\cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky)\sin(kz)e^{-i3\omega t}$$

gdzie $k \equiv \frac{\pi}{L}$ oraz $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$, wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

d) Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

Wskazówka. Dla dodatnich liczb całkowitych p i r

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{pr}$$

Wskazówka: Spróbuj rozwiązać równanie Schrödingera, zakładając rozwiązanie postaci

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,t)\,\psi(y,t)\,\psi(z,t)$$

gdzie

$$\psi(x,t) = \eta(x)\,e^{-i\omega_x t}$$

Wskazówka: Zapisz Ψ_s jako sumę stanów o określonej energii.
Albo: Skorzystaj z tego, że $\left\langle \Psi_{n_x n_y n_z} \middle| \Psi_s \right\rangle$ jest równe współczynnikowi przy $\Psi_{n_x n_y n_z}$ w rozkładzie Ψ_s na stany o określonej energii.

104 Zadanie – Jednostki masy

Przelicz kilogramy na gramy:
5 kg to .... g
64 kg to .... g

Przelicz tony na kilogramy:
3 t to .... kg
1001000 t to .... kg

Przelicz gramy na dekagramy:
170 g to .... dag
2005 g to .... dag

Wskazówka:
1 kilogram = 1000 gramów
1 tona to 1000 kilogramów
1 dekagram to 10 gramów

105 Zadanie – Gęstość

Pytanie 1. Jaką masę ma sześcienny klocek o krawędzi 4 cm, jeśli gęstość materiału, z którego został wykonany, wynosi 9 g/cm^3?
Pytanie 2. Jaką gęstość ma kula o objętości 1 litra, jeśli jej masa to 4 kg?
Pytanie 3. Jaką objętość musi mieć klocek wykonany z materiału o gęstości 25 kg/m^3, który ma masę 75 kg?

Wskazówka: Jeśli nie wiesz, jak wykonać obliczenia, to zwróć uwagę na jednostki.

106 Zadanie – Gęstość na Marsie

Gęstość pewnej skały na powierzchni Marsa to 3,29 g/cm^3. Łazik marsjański pobrał próbkę tej skały o objętości 14 cm^3. Jaką masę miała pobrana próbka skały?

Wskazówka: Jeśli nie wiesz, jak wykonać obliczenia, to zwróć uwagę na jednostki.

107 Zadanie – Gęstość zaludnienia

Na pewnej planecie są trzy kontynenty, każdy w kształcie innej figury geometrycznej.
Pierwszy kontynent jest w kształcie kwadratu o boku 2000 km. Mieszka tu 40000000 osób.
Drugi kontynent to prostokąt o bokach 4000 km i 7000 km. Mieszka tu 196000000 osób.
Trzeci kontynent to trapez o wysokości 1000 km i podstawach o długości 400 km i 200 km. Mieszka na nim 1800000 osób.
Oblicz gęstość zaludnienia na każdym z kontynentów.

108 Zadanie – Rura z przewężeniem

Całym wnętrzem poziomo umieszczonej rury płynie woda. Rura posiada przewężenie, przez które woda przepływa z szybkością 62 cm/s. Przed przewężeniem woda płynie z szybkością 49 cm/s. Pomiń efekty związane z lepkością i ściśliwością. Przepływ jest laminarny. Gęstość wody jest równa 1000 kg/m^3.
a) Oblicz zmianę ciśnienia między dwoma punktami znajdującymi się na osi rury, z czego pierwszy punkt znajduje się przed przewężeniem, a drugi w przewężeniu.
b) Napisz, w którym z punktów ciśnienie jest większe.

Wskazówka: Skorzystaj z równania Bernoulliego.

Wskazówka: Ciecz przemieszcza się w poziomie.

Wskazówka: Ciśnienia p_i oraz szybkości v_i przed ($i = 1$) i w przewężeniu ($i = 2$) spełniają równanie

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

gdzie ρ jest gęstością wody.

109 Zadanie – Startujący samolot

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyśpieszeniem 5,71 m/s^2. Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 9 s?

Wskazówka: $v = at$

110 Zadanie – W ile sekund do setki?

Samochód, ruszając z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej, osiągnął po pierwszej sekundzie ruchu szybkość 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę przebędzie ten samochód w drugiej sekundzie ruchu, a jaką w piątej? Ile czasu potrzebuje ten samochód, aby rozpędzić się do 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Wskazówka: Zastanów się, jaką drogę przebędzie ten samochód w pierwszej sekundzie ruchu.

Wskazówka: Drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej obliczamy ze wzoru:

$$s = \frac{at^2}{2},$$

gdzie a jest przyspieszeniem, a t czasem. Przyspieszenie obliczymy z zależności:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Wskazówka: Zauważ, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym długości przebytej drogi w kolejnych równych odstępach czasu są do siebie w stosunku takim jak kolejne liczby nieparzyste. W takim razie prawdziwe są zależności:

$$s_2 = 3 \cdot s_1, \qquad s_5 = 9 \cdot s_1,$$

gdzie s_1, s_2 i s_5 oznaczają odpowiednio drogę przebytą w 1, 2 i 5 sekundzie ruchu.

Wskazówka: Aby obliczyć, jak szybko samochód osiągnie 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, należy przekształcić wzór na szybkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$v = at, \qquad t = \frac{v}{a}.$$

Należy przyjąć $v = 100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

111 Zadanie – Kolumna wojskowa

Piesza kolumna wojskowa o długości 9 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 4 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 2 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 26 km/h.
a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?
b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.
Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

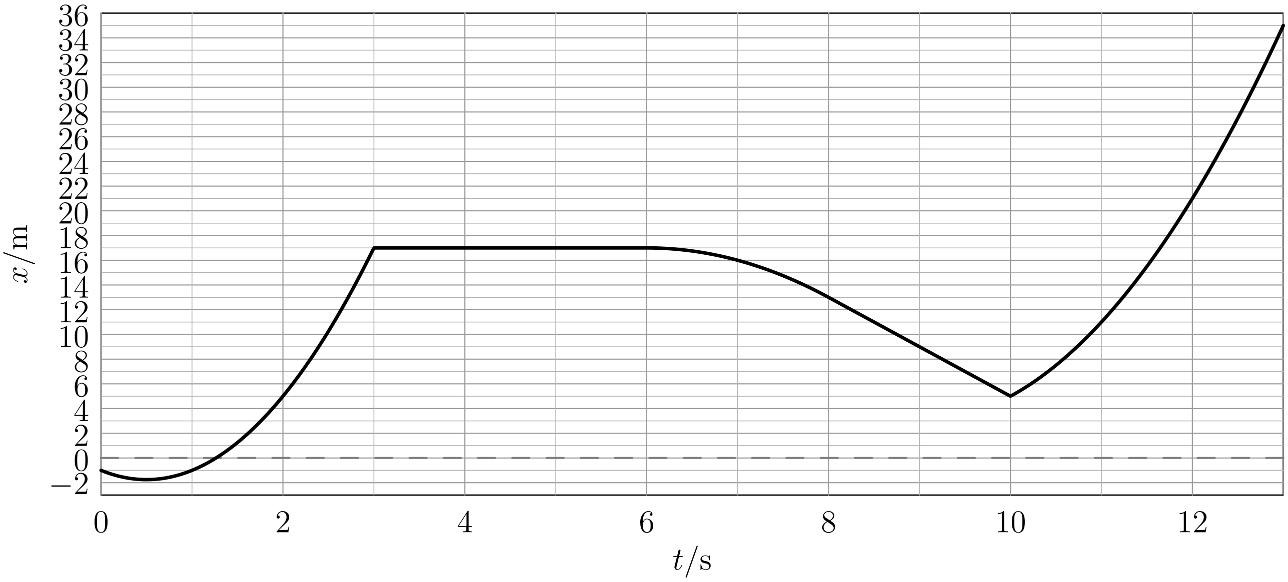
Wskazówka: Jaka jest wartość prędkości żołnierza jadącego na rowerze, względem kolumny wojskowej, gdy jedzie do dowódcy, a jaka gdy wraca?

Wskazówka: Podczas gdy rowerzysta jedzie do dowódcy, wartość jego prędkości względnej to różnica szybkości żołnierza i kolumny wojskowej, a gdy wraca od dowódcy, wartość jego prędkości względnej to suma tych szybkości.

Wskazówka: Jaka jest zależność czasu od drogi w ruchu jednostajnym?

112 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

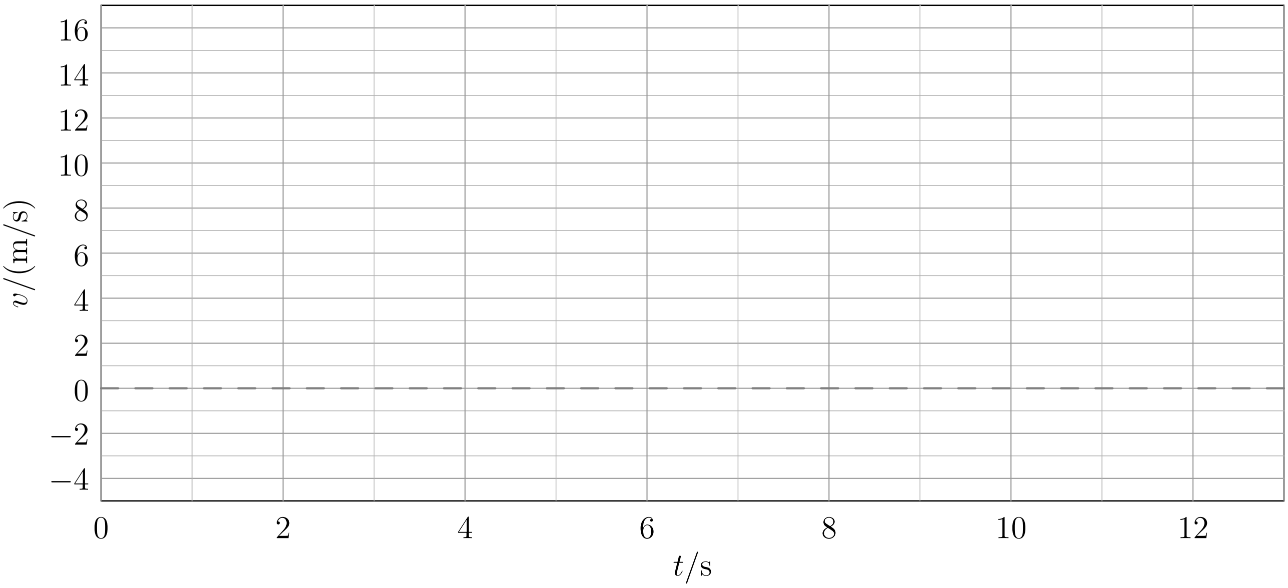
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,3[$	$]3,6[$	$]6,8[$	$]8,10[$	$]10,13]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	6	0	−2	0	4

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0, 13]$ s.



Wskazówka: Jeśli v jest dodatnie, to punkt materialny porusza się zgodnie ze zwrotem osi X, a jeśli v jest ujemne, to punkt materialny porusza się w przeciwną stronę.

Wskazówka:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Wskazówka: Wygodniej będzie posłużyć się zmianami wielkości. Po danym interwale czasowym Δt mamy:

$$\Delta x = v_0\, \Delta t + \frac{1}{2} a\, \Delta t^2,$$

więc prędkość na początku przedziału to

$$v_0 = \Delta x / \Delta t - \frac{1}{2} a\, \Delta t$$

Wskazówka: Na końcu interwału czasowego Δt prędkość to

$$v_f = v_0 + a\, \Delta t = \Delta x / \Delta t + \frac{1}{2} a\, \Delta t$$

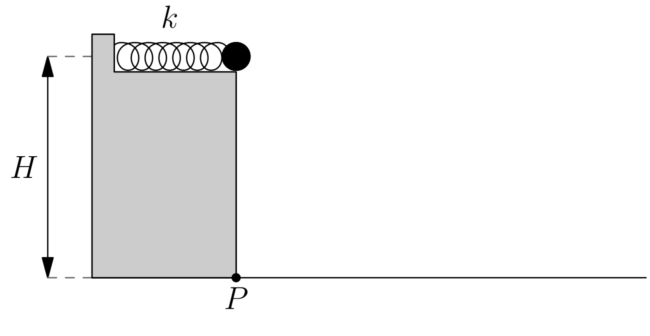
113 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 45 m ze stałą wartością prędkości 48,6 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

Wskazówka: Wartość prędkości (szybkość) $v = 13{,}5$ m/s. Przyśpieszenie $a = v^2/R$.

114 Zadanie – Rzut poziomy

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 10$ N/m, ściśnięto o 10 cm, naciskając ją kulką o masie równej 160 g. Jaka będzie odległość kulki od punktu P do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości $H = 3{,}7$ m nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominąć. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



Wskazówka: Energia potencjalna sprężystości sprężyny zostaje przekazana kulce o masie m w postaci energii kinetycznej

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mV^2}{2},$$

gdzie V to prędkość pozioma kulki.

Wskazówka: Czas spadania kulki

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Wskazówka: Zasięg w rzucie poziomym

$$z = Vt.$$

115 Zadanie – Strzelec

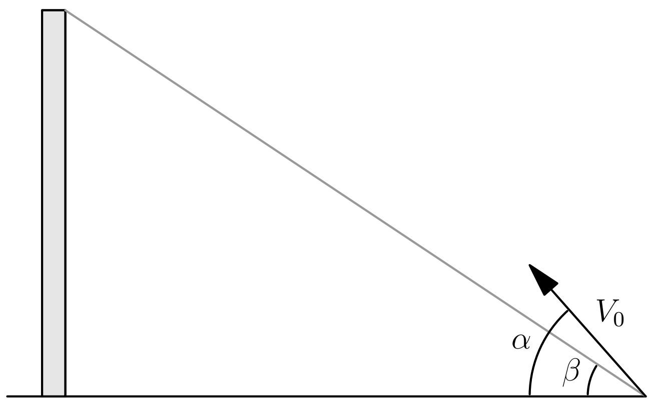
Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 150 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 920 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Wskazówka: Jaką drogę w poziomie przebył pocisk?

Wskazówka: Ile czasu pocisk leciał?

116 Zadanie – Rzut ukośny

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 65°$ do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 12 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem $\beta = 45°$ względem powierzchni ziemi. Jaką wartość prędkości V_0 powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.



Wskazówka: Widać, że $\operatorname{tg}\beta$ to stosunek wysokości słupa do odległości jego podstawy od miejsca wyrzutu piłki

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\beta.$$

Wskazówka: Przyjmując za początek ruchu początek kartezjańskiego układu współrzędnych, położenie ciała po czasie t określają równania (w pionie mamy do czynienia z ruchem jednostajnie opóźnionym, a w poziomie z jednostajnym)

$$y = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x = V_{0x}t,$$

gdzie V_{0y} to składowa pionowa prędkości V_0, a V_{0x} to składowa pozioma prędkości V_0

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha,$$

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha.$$

117 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

Wskazówka: Jaka musi być wartość prędkości v ciężarka, by poruszał się on po okręgu o promieniu l w okolicy najwyższego punktu tego okręgu?

Wskazówka: Wartość prędkości w najwyższym punkcie okręgu musi spełniać warunek $v^2/l \geq g$, czyli przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe lub równe przyśpieszeniu grawitacyjnemu. Sznurek jest wtedy rozciągnięty. Łatwo wykazać, że jeśli spełniony jest ten warunek w najwyższym punkcie, to ciężarek będzie się poruszał po okręgu. Wystarczy wykazać, że sznurek będzie zawsze napięty poniżej najwyższego punktu, a to oznacza, że przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe niż składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka. Z zasady zachowania energii wynika, że na mniejszej wysokości prędkość v' ciężarka będzie większa niż v. Z geometrii wynika, że składowa g_l przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka będzie mniejsza niż g. A więc jeśli $v^2/l \geq g$, to $v'^2/l > g_l$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań: okręgu i paraboli, po której poruszałby się cieżarek, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu.

Wskazówka: Równanie okręgu: $x^2 + y^2 = l^2$.

Wskazówka: Równanie ruchu, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu: $x = vt$ oraz $y = l - gt^2/2$.

Wskazówka: Równanie paraboli: jeśli $v \neq 0$, to $t = x/v$ i otrzymujemy równanie toru $y = l - \frac{g}{2v^2}x^2$.

118 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 1{,}3$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + B\,t^2$$

gdzie $A = 2{,}4$ m, $\omega = 1{,}6$ s^{-1}, $\phi = 1{,}4$ oraz $B = 1{,}4$ m/s^2.

Wskazówka: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

119 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 2D

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} A\cos(\omega t) \\ B\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

A	B	ω
2 m	5 m	4 s^{-1}

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 6$ s.

Wskazówka: $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -A\omega\sin(\omega t) \\ B\omega\cos(\omega t) \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} -A\omega^2\cos(\omega t) \\ -B\omega^2\sin(\omega t) \end{bmatrix} = -\omega^2\vec{r}$$

120 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
-2 m/s^2	-4 m/s	16 m	-5 m/s	-20 m	-2 m/s^3	4 m/s^2	-5 m/s

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 5$ s.

Wskazówka: $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka:

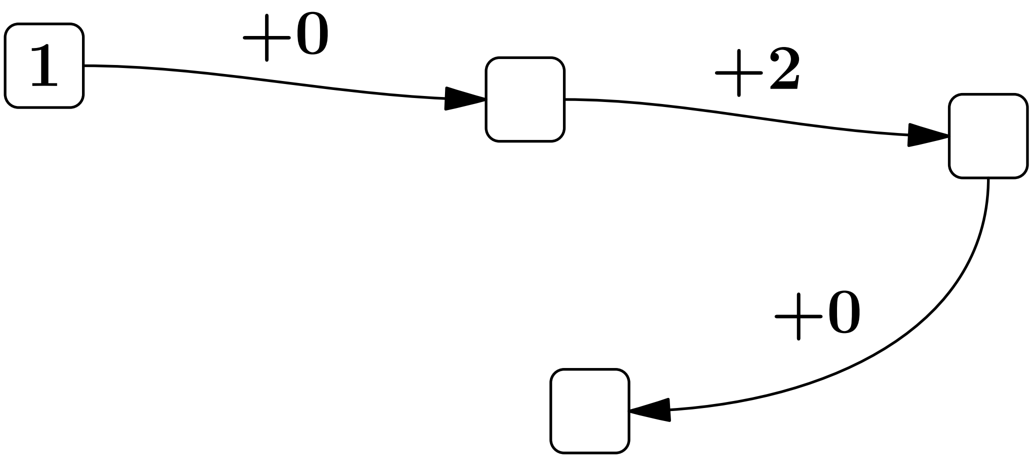
$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}b_z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2f_xt + g_x \\ g_y \\ 3e_zt^2 + 2f_zt + g_z \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} 2f_x \\ 0 \\ 6e_zt + 2f_z \end{bmatrix}$$

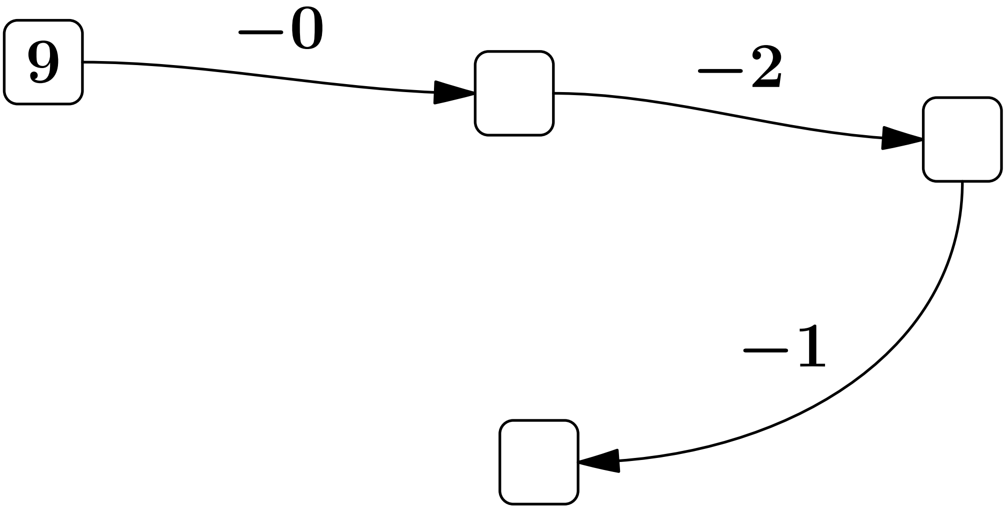
121 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie, 0–10

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



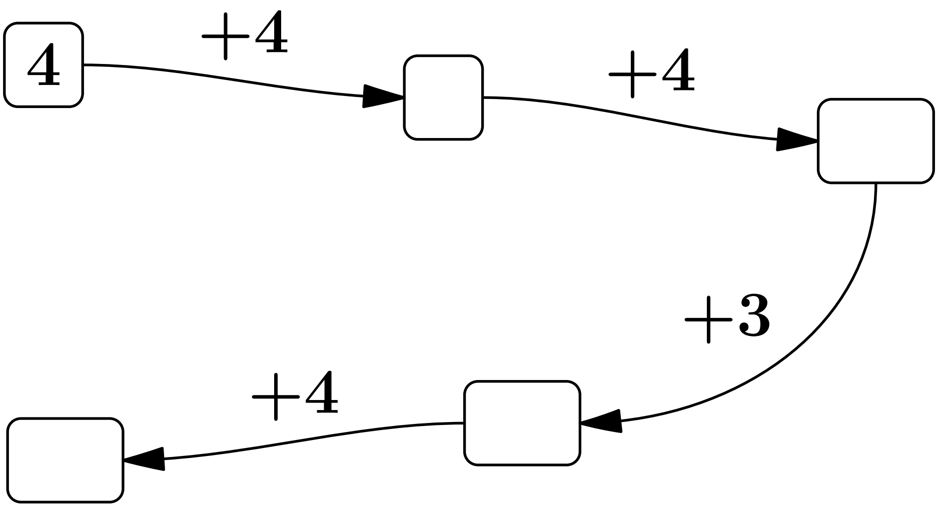
122 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie, 0–10

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



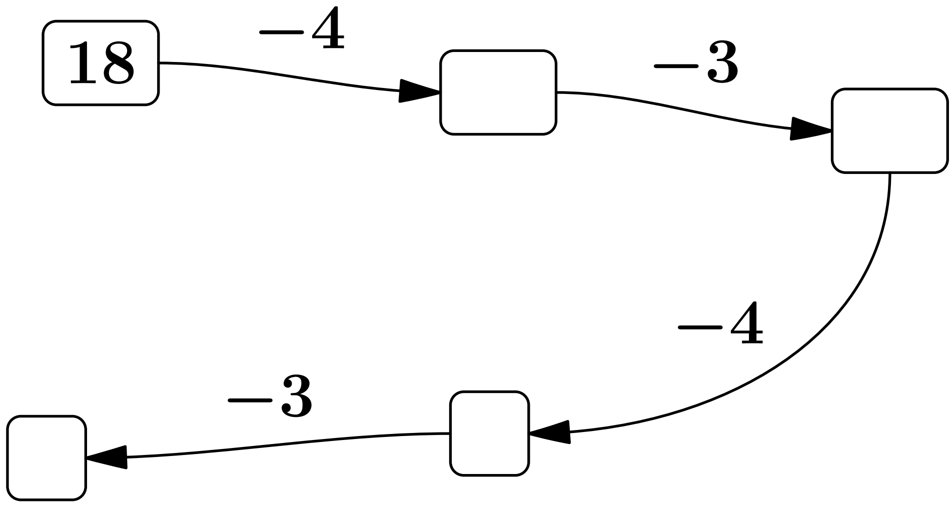
123 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 0–4, 0–20

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



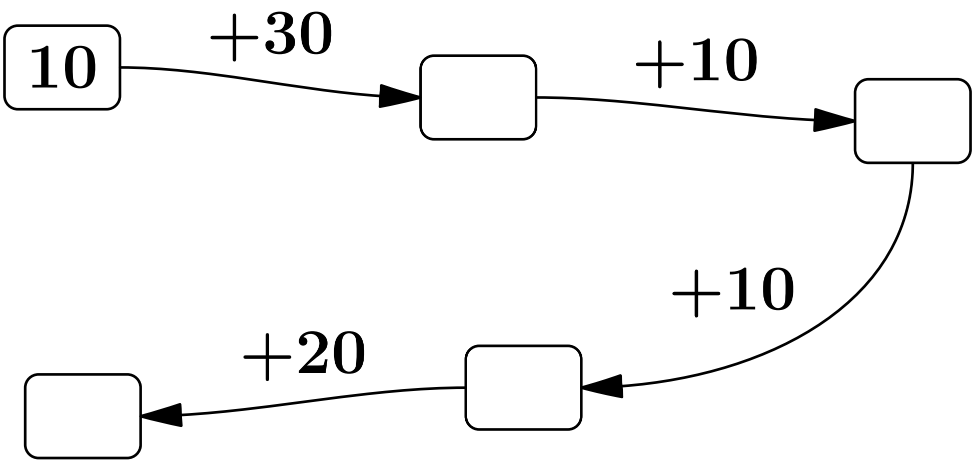
124 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 0–4, 0–20

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



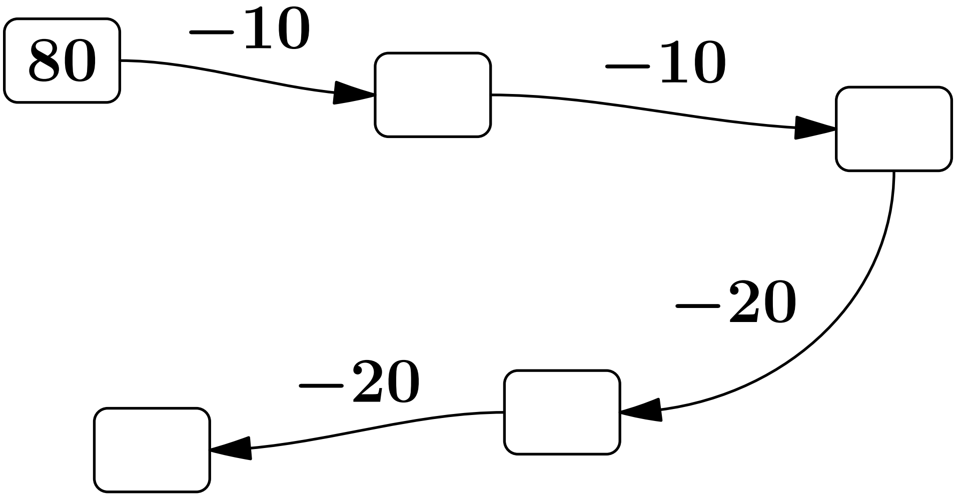
125 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie wielokrotności 10, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



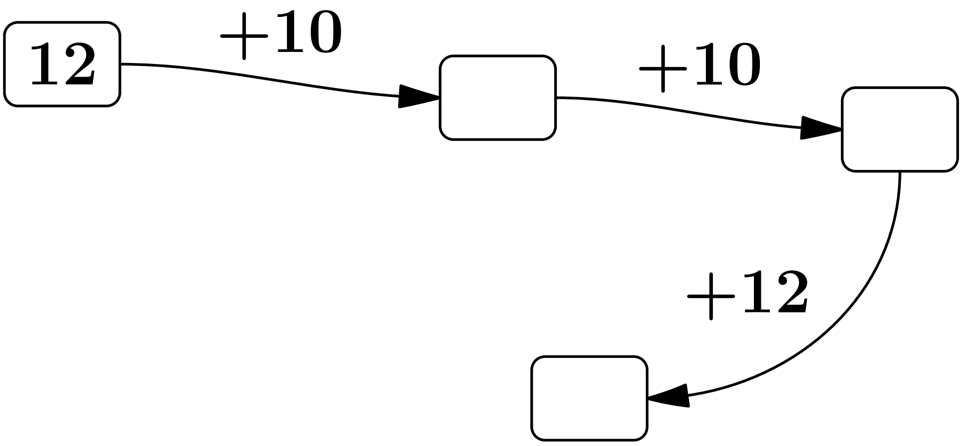
126 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie wielokrotności 10, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



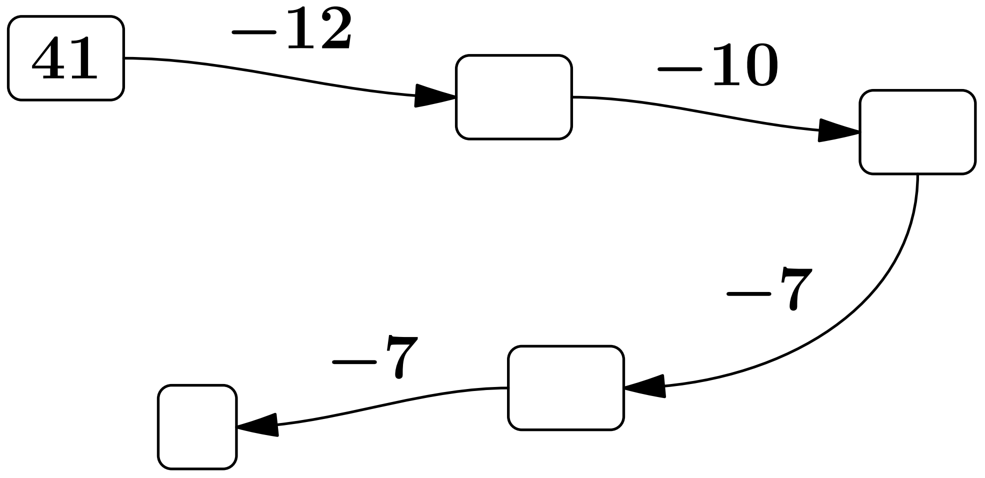
127 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–12, 0–45

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



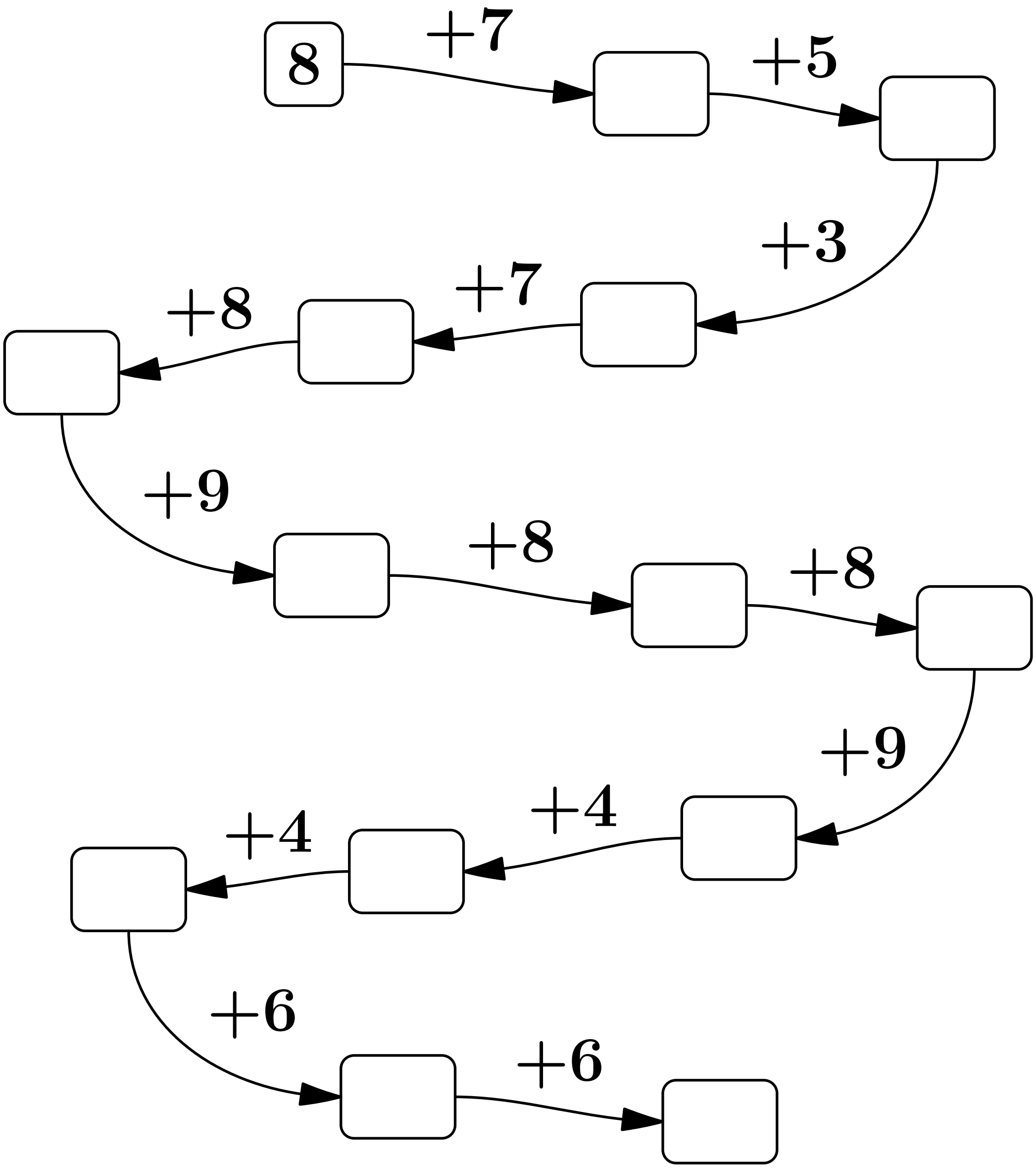
128 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–12, 0–45

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



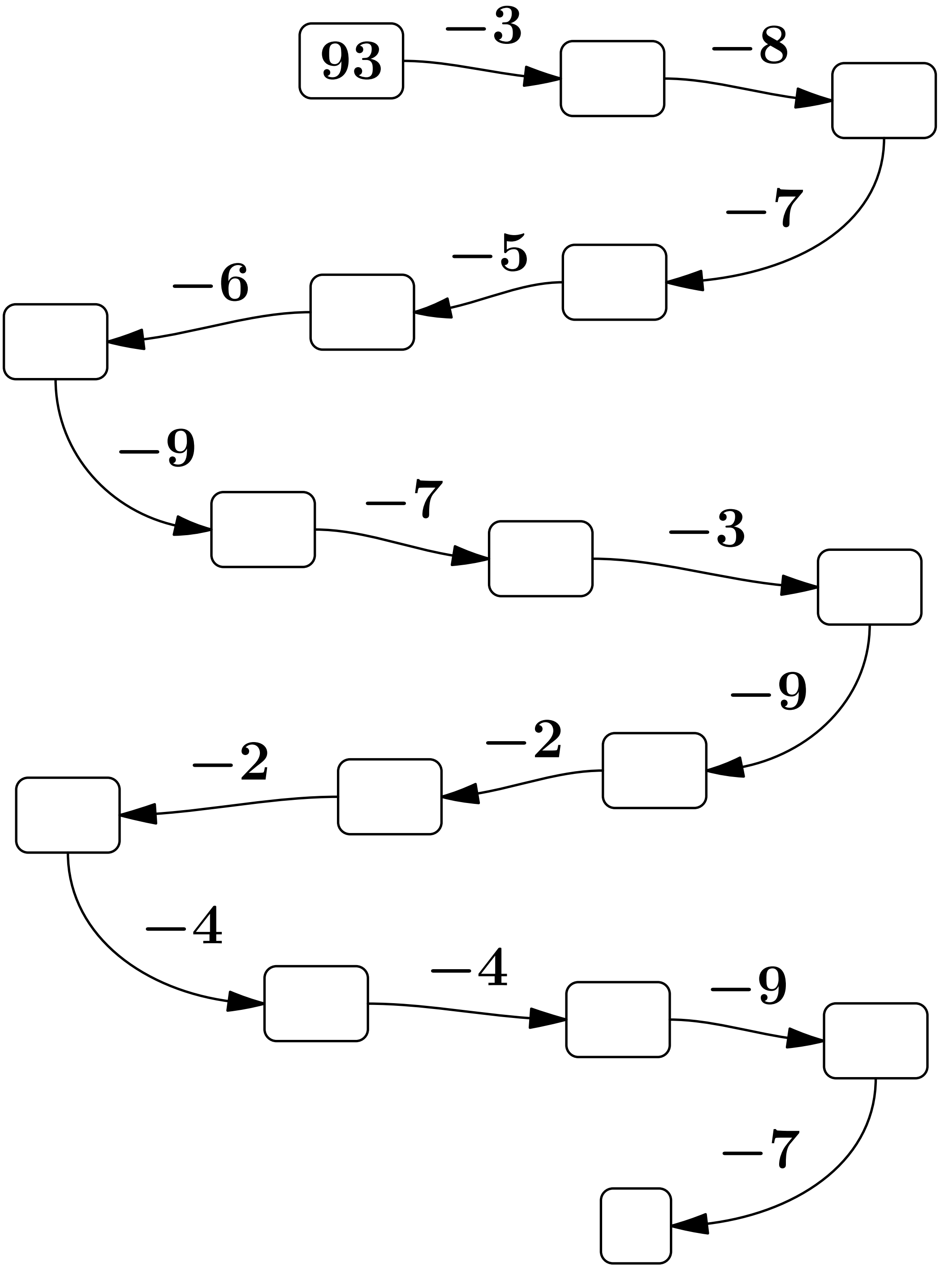
129 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 2–9, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.


8
+7
+5
+3
+7
+8
+9
+8
+8
+9
+4
+4
+6
+6

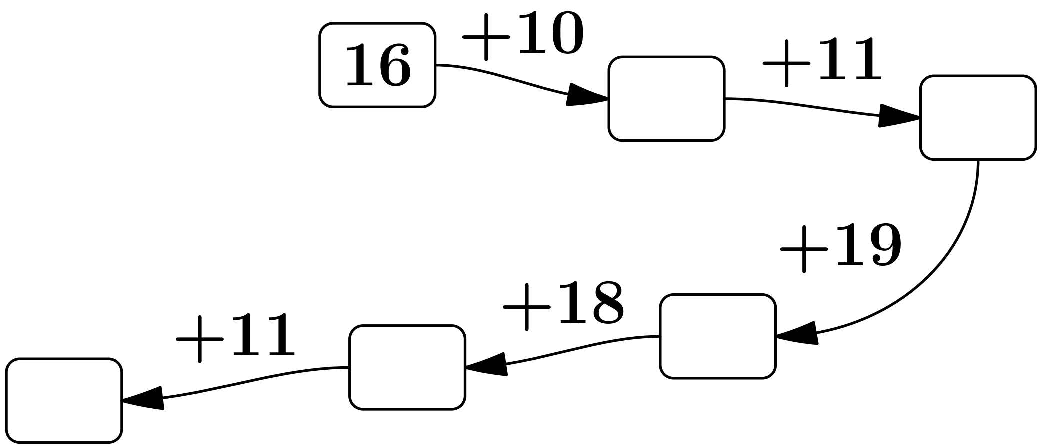
130 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 2–9, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



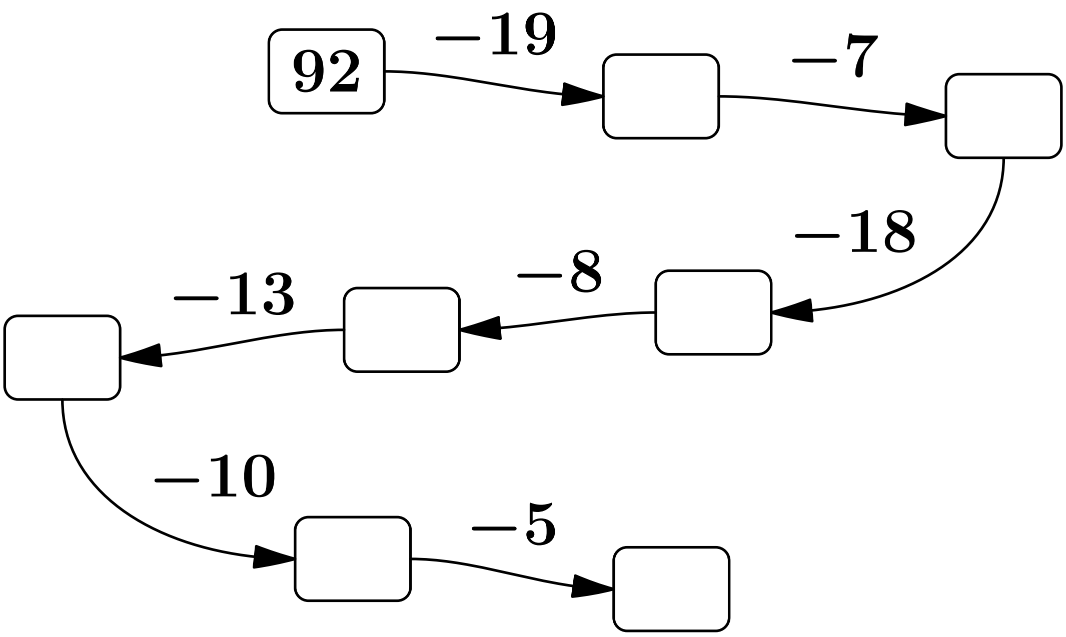
131 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–20, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



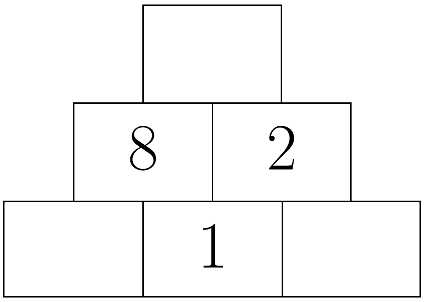
132 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–20, 0–100

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



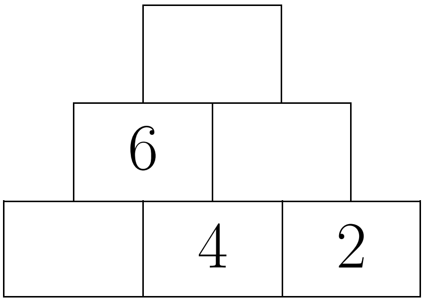
133 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 1–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



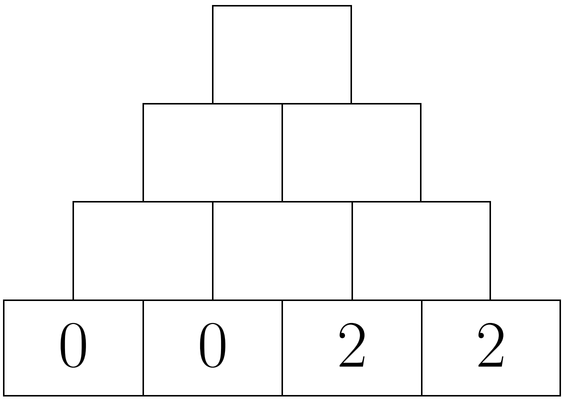
134 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 1–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



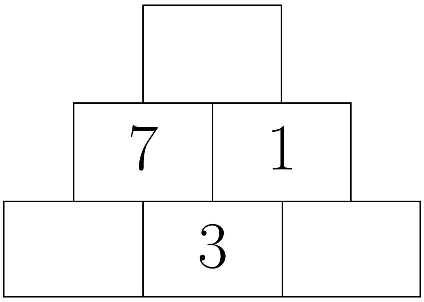
135 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



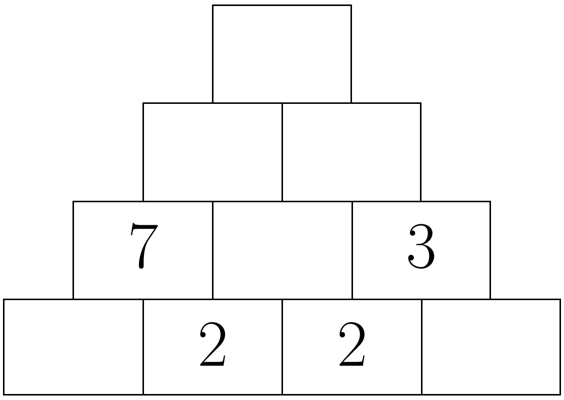
136 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–10

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



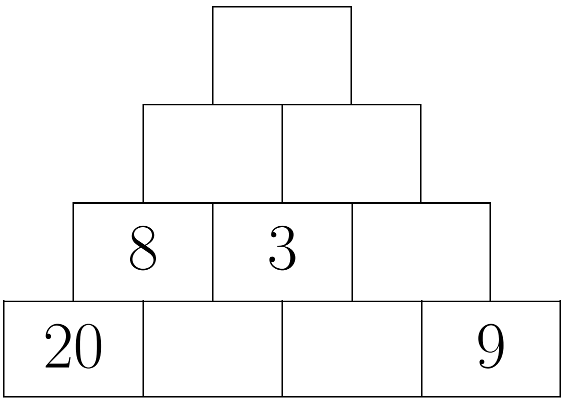
137 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



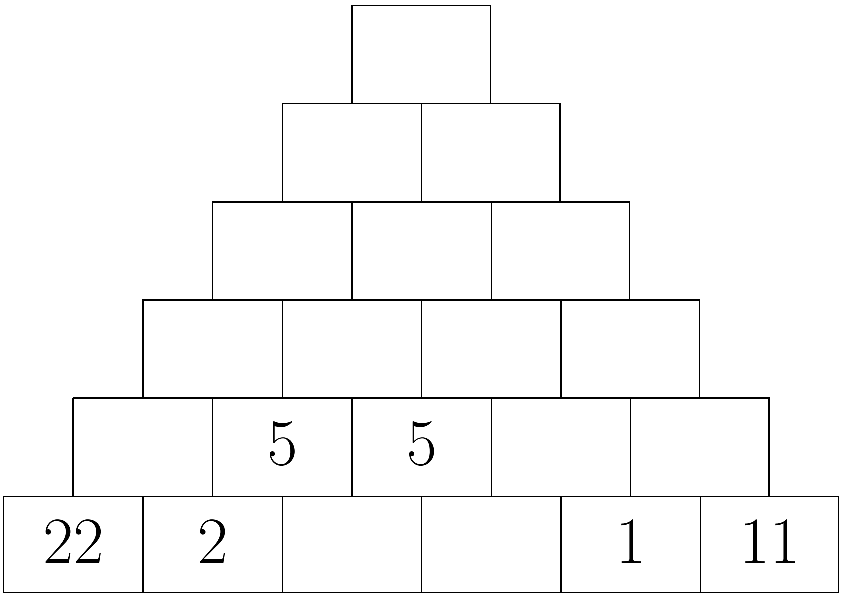
138 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–20

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



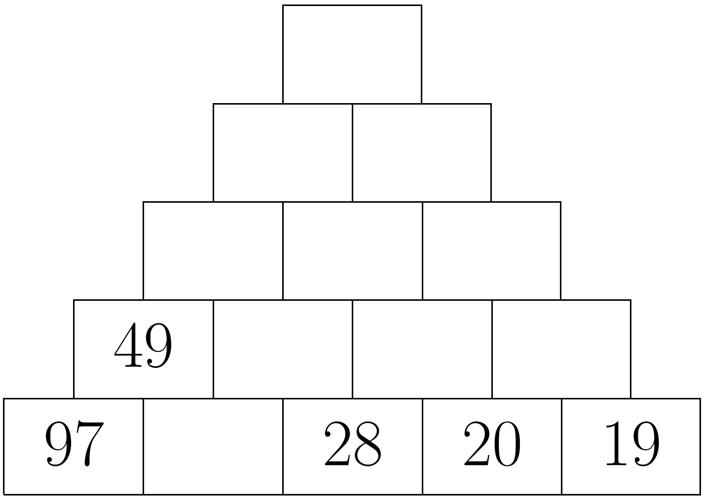
139 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



140 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–100

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.



141 Zadanie – Dodawanie pisemne, 35

Oblicz poniższe sumy.

a)

	1	7
+		7

b)

	1	7
+	1	6

142 Zadanie – Dodawanie pisemne, 55

Oblicz poniższe sumy.

a)

	2	8
+	1	8

b)

	3	3
+	2	1

143 Zadanie – Dodawanie pisemne, 100

Oblicz poniższe sumy.

a)

	5	6
+	3	2

b)

	5	6
+	4	0

144 Zadanie – Dodawanie pisemne, 150

Oblicz poniższe sumy.

a)

	4	7
+	7	0

b)

	8	9
+	5	4

145 Zadanie – Dodawanie pisemne, 1500

Oblicz poniższe sumy.

a)

	5	2	3
+	4	4	1

b)

	7	9	3
+	7	0	4

146 Zadanie – Liczba stron

Wanda rozpoczęła czytanie książki od początku 16 strony, a po dwóch godzinach skończyła czytać na końcu 83 strony.
a) Ile stron przeczytała Wanda?
b) Ile średnio stron czytała Wanda przez jedną godzinę?

Wskazówka: Jeśli Wanda zaczęłaby czytać na początku 1 strony, a skończyła na końcu 2, to ile stron by przeczytała?

147 Zadanie – Śliwki

Jaś miał 15 śliwek. Następnie zjadł jedną trzecią śliwek. Ile śliwek zostało Jasiowi?

Wskazówka: Ile jest równe 15:3? Odpowiedź: 5.

148 Zadanie – Jabłka

Jaś policzył posiadane przez Maćka jabłka – było ich 30 – a następnie wziął połowę posiadanych przez Maćka jabłek i dodał je do swoich zapasów jabłek. Wtedy okazało się, że Jaś posiada 6 razy tyle jabłek, co Maciek. Ile jabłek posiadają razem Jaś i Maciek?

Wskazówka: Ile jabłek zostało Maćkowi? Odpowiedź: 15.

Wskazówka: Ile jabłek ma Jaś? Odpowiedź: 90.

149 Zadanie – Kamyki

Daria i Nela zebrały na plaży kamyki. Jeśli Daria dałaby Neli 8 kamyków, to miałyby po tyle samo kamyków. A jeśli Nela dałaby Darii 5 kamyków, to Daria miałaby 3 razy tyle kamyków, co Nela. Ile kamyków ma każda z dziewczynek?

Wskazówka: $D - 8 = N + 8$ oraz $D + 5 = 3(N - 5)$

150 Zadanie – Działania na liczbach ujemnych

Oblicz:
a) $-2 + (-36) =$
b) $-3 - (-118) =$
c) $38 + (-31) =$
d) $-29 - 8 + 11 =$

151 Zadanie – Winda

W wysokim bloku z wielopoziomowym parkingiem podziemnym jest winda, która porusza się między piętrami. Winda ruszyła z parteru (piętro 0) 12 pięter do góry, a następnie 8 pięter w dół. Po chwili zjechała 5 pięter w dół, a następnie pojechała 16 pięter w górę. Na którym piętrze jest teraz winda, jeśli przed chwilą zjechała 8 pięter w dół?

152 Zadanie – Ślimak

Ślimak, aby wspiąć się na szczyt wieży, musi jeszcze przebyć w pionie odległość 2880 cm. Za każdym razem przez 6 godz. ślimak sunie do góry, a następnie odpoczywa przez 3 godz. Wspinając się pokonuje 20 mm na minutę w górę muru, a odpoczywając zsuwa się o 10 mm na minutę w dół. Po ilu godzinach ślimak dotrze na szczyt wieży, jeśli właśnie zaczął się wspinać?

Wskazówka: Jaką drogę pokonuje ślimak, wspinając się przez 6 godz.? Odpowiedź: 720 cm.

Wskazówka: O ile ślimak opada, odpoczywając przez 3 godz.? Odpowiedź: 180 cm.

Wskazówka: O ile ślimak przesuwa się do góry w jednym cyklu *wspianie-odpoczynek*? Odpowiedź: 540 cm.

Wskazówka: Czy ślimak będzie tyle samo razy wspinał się, co zsuwał w dół? Odpowiedź: Nie. *Dlaczego?*

Wskazówka: Ile razy ślimak będzie się wspinał? Odpowiedź: 5

153 Zadanie – Rodzaje magnetyków

Zaobserwowano, że próbka materiału umieszczona w pobliżu cewki, przez którą płynął prąd elektryczny, była przyciągana do cewki. Po wyłączeniu prądu płynącego przez cewkę magnetyzacja próbki zmniejszyła się do zera. Podkreśl nazwę opisującą rodzaj magnetyka, z którego wykonana jest próbka: diamagnetyk, paramagnetyk.

154 Zadanie – Jednostki objętości

Przelicz m^3 na km^3:
80000000 m^3 to .... km^3
1400000 m^3 to .... km^3

Przelicz m^3 na cm^3:
3 m^3 to .... cm^3
19 m^3 to .... cm^3

Przelicz mm^3 na cm^3:
29000 mm^3 to .... cm^3
300200 mm^3 to .... cm^3

Wskazówka:
1 km^3 = 1000000000 m^3
1 m^3 to 1000000 cm^3
1 cm^3 to 1000 mm^3

155 Zadanie – Rozładowanie akumulatora

Przez 17 godzin rozładowywano akumulator, mierząc płynący prąd amperomierzem. Średnie natężenie prądu podczas rozładowania było równe 22 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez amperomierz. Wynik podaj w kulombach.

Wskazówka: $I = Q/t$

Wskazówka: 1 C = 1 A · 1 s

156 Zadanie – Alarm samochodowy

Przez pewien alarm samochodowy w trybie czuwania przepływa prąd o średnim natężeniu 40 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez ten układ w trakcie 18 dób. Wynik podaj w kulombach i amperogodzinach.

Wskazówka: $I = Q/t$

Wskazówka: 1 Ah = 1 A · 1 h

Wskazówka: 1 C = 1 A · 1 s

157 Zadanie – Opornik

Gdy przez opornik płynął stały prąd o natężeniu 20 mA, napięcie mierzone między końcówkami opornika było równe 1,28 V.
a) Oblicz opór opornika.
b) Zakładając, że opornik spełnia prawo Ohma, oblicz natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy napięcie mierzone między jego końcówkami jest równe 5,12 V.

Wskazówka: $U = RI$

Wskazówka: $I_1/U_1 = I_2/U_2$

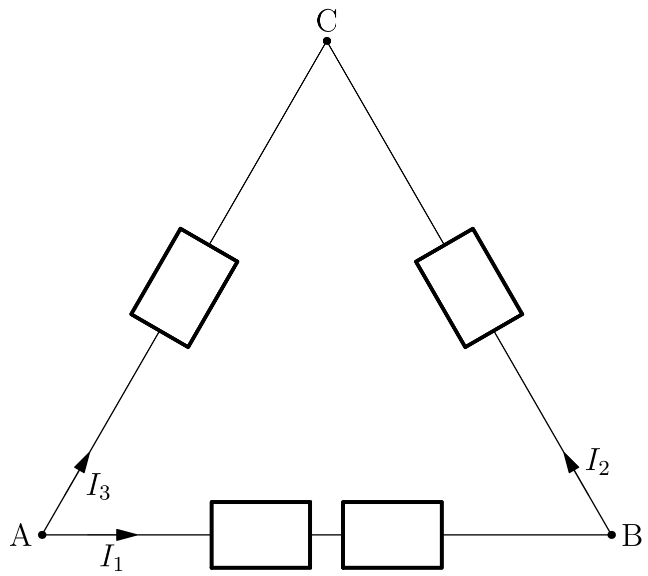
158 Zadanie – Opór zastępczy

Cztery oporniki o takich samych oporach $R = 8\ \Omega$ połączono w sposób przedstawiony na rysunku. Napięcie U między punktami A i C wynosi 2 V.

a) Oblicz opór zastępczy między zaciskami A i C.

b) Oblicz natężenia prądów I_1, I_2 i I_3 zaznaczonych na rysunku.

c) Oblicz spadek napięcia między punktami B i C.



Wskazówka: a) Zastanów się, w jaki sposób połączone są oporniki. Spróbuj narysować ten układ w prostszy sposób.

Wskazówka: Gdy rozrysujemy podany układ w postaci, w której będzie bardziej przejrzysty, otrzymamy dwie gałęzie połączone równolegle. W pierwszej znajdzie się jeden opornik, a w drugiej trzy oporniki połączone szeregowo. W takim razie opór zastępczy w pierwszej gałęzi wynosi R, a w drugiej $3R$. Ponieważ opisane fragmenty obwodu połączone są równolegle, to opór zastępczy obliczymy w następujący sposób:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R},$$

$$R_z = \frac{3R}{4}.$$

Wskazówka: b) Do obliczenia natężenia można wykorzystać wzór

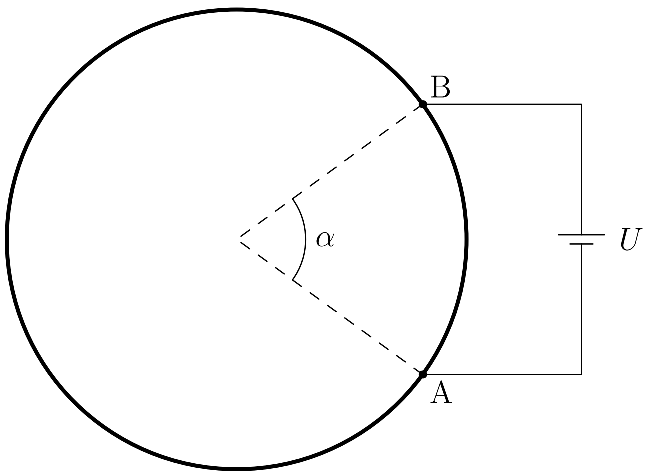
$$I = \frac{U}{R}.$$

Należy go zastosować dla każdej gałęzi opisanej w poprzedniej wskazówce oddzielnie. Zwróć uwagę, że $I_1 = I_2$.

Wskazówka: c) Napięcie obliczymy z zależności $U_{BC} = I_2 R$.

159 Zadanie – Obwód elektryczny w kształcie okręgu

Kawałek drutu o długości 11 cm wykonany z jednorodnego przewodnika wygięto w kształt okręgu. Pomiędzy punktami A i B włączono baterię. Położenie punktów A i B przedstawia rysunek, $\alpha = 72°$. Napięcie U na baterii wynosi 1,3 V. Oblicz moc wydzielaną w tym obwodzie. Opór właściwy zastosowanej substancji wynosi $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ω·m. Pole powierzchni przekroju poprzecznego drutu wynosi $S = 27$ mm^2. Pomiń opór elektryczny przewodów połączeniowych oraz opór wewnętrzny baterii.



Wskazówka: Do obliczenia mocy wydzielonej w tym obwodzie wykorzystamy wzór:

$$P = IU,$$

gdzie P jest mocą, I natężeniem prądu, U napięciem źródła.

Wskazówka: Po zastosowaniu prawa Ohma wzór na moc będzie wyglądał następująco:

$$P = \frac{U^2}{R_z} = U^2 \cdot \frac{1}{R_z},$$

gdzie R_z jest oporem zastępczym. Zauważmy, że nasz układ jest układem dwóch oporników połączonych równolegle, a opór każdego z nich można obliczyć z zależności $R = \frac{\rho l_i}{S}$, gdzie l_i jest długością przewodnika, a S polem powierzchni przekroju poprzecznego.

Wskazówka: Długość przewodnika l_i jest równa długości łuku, czyli długości całego drutu (okręgu) l przemnożonego przez $\frac{\alpha}{360°}$ lub odpowiednio $\frac{360°-\alpha}{360°}$. Odwrotność oporu zastępczego obliczymy więc następująco:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{S}{\rho l \frac{\alpha}{360°}} + \frac{S}{\rho l \frac{360°-\alpha}{360°}} = \frac{S \cdot (360°)^2}{\rho l (360° - \alpha)\alpha},$$

gdzie przez R_1 i R_2 oznaczam opory poszczególnych fragmentów obwodu. Ostateczny wzór na moc to:

$$P = \frac{U^2 S \cdot (360^\circ)^2}{\rho l (360^\circ - \alpha)\alpha}$$

160 Zadanie – Gdzie ta soczewka?

Poniższy rysunek przedstawia w schematyczny sposób przedmiot AB oraz obraz A'B' powstały po przejściu przez cienką soczewkę światła emitowanego przez przedmiot AB. Zaznaczono też oś optyczną BB'. Wypisz 3 cechy obrazu. Znajdź położenie soczewki oraz rozstrzygnij, czy użyto soczewki skupiającej, czy rozpraszającej.

Wskazówka: Zastanów się, czy obraz jest większy, czy mniejszy od przedmiotu. Czy obraz jest odwrócony? Czy obraz powstaje przez przecięcie promieni, czy ich przedłużeń?

Wskazówka: Aby znaleźć soczewkę, wystarczy narysować prostą AA'. Przecięcie tej prostej z osią optyczną wskazuje położenie soczewki. Jest ona ułożona prostopadle do osi optycznej.

Wskazówka: Aby rozstrzygnąć, czy jest to soczewka skupiająca, czy rozpraszająca, dobrze jest sprawdzić, w jaki sposób zachowa się promień padający na soczewkę równolegle do osi optycznej.

161 Zadanie – Odległość do diody

Cienka soczewka o ogniskowej 3 cm musi być odsunięta na odległość 4 cm od ekranu, aby uzyskać na nim ostry obraz świecącej diody znajdującej się na osi optycznej soczewki.
a) Oblicz odległość od soczewki do diody.
b) Oblicz stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu.

Wskazówka:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

f – ogniskowa; x – odległość od soczewki do diody; y – odległość od soczewki do obrazu (ekranu).

Wskazówka:

$$h_o/h_i = x/y$$

h_o – wysokość diody (*object*); h_i – wysokość obrazu (*image*)

162 Zadanie – Płytka równoległościenna

Wiązka światła pada na szklaną płytkę równoległościenną znajdującą się w powietrzu. Promień padający tworzy z powierzchnią graniczną kąt 50°. Bezwzględne współczynniki załamania światła dla powietrza i szklanej płytki wynoszą odpowiednio: $n_1 = 1{,}003$ i $n_2 =1{,}662$.
a) Ile wynosi kąt odbicia przy pierwszej powierzchni?
b) Ile wynosi kąt załamania przy pierwszej powierzchni?
c) Ile wynosi kąt odbicia przy drugiej powierzchni?
d) Ile wynosi kąt załamania przy drugiej powierzchni?
e) Czy wychodząca wiązka jest równoległa do wchodzącej?

Wskazówka:
a) Ile wynosi kąt padania?
b) Zastosuj prawo załamania.
c) Skorzystaj z własności kątów naprzemianległych.
d) Zastosuj prawo załamania.
e) Porównaj kąty promienia wchodzącego i wychodzącego.

163 Zadanie – Kij w basenie

Z poziomego dna basenu, prostopadle do dna, wystaje kij o długości 1,9 m. Ponad powierzchnią wody znajduje się 25% jego długości. Padają na niego promienie słoneczne pod kątem 55° do powierzchni wody. Ile wynosi długość cienia kija na dnie basenu? Współczynnik załamania wody wynosi 1,33, a powietrza 1.

Wskazówka: Jak biegnie promień przechodzący tuż nad wierzchołkiem kija?

164 Zadanie – Polaryzacja odbitego światła

Studenci powinni określić materiał, z którego została wykonana sześcienna bryła. Mają tego dokonać tylko na podstawie badania polaryzacji odbitego od jej ściany światła. Dysponują wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskali, gdy kąt między normalną do ściany a odbitą wiązką był równy 60,5°. Na podstawie odpowiednich obliczeń wskaż, z którego z następujących materiałów najprawdopodobniej wykonano bryłę (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): fluorek sodu (1,33), diament (2,42), korund (1,77). Bryła znajduje się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Wskazówka: Kąt między wiązką odbitą a załamaną musi być kątem prostym.

Wskazówka: Kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Wskazówka:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_2 \sin(90° - \alpha_1)$$

n_1 oraz n_2 – bezwzględny współczynnik załamania światła odpowiednio dla powietrza oraz materiału; α_1 oraz α_2 – kąt padania oraz załamania światła.

Wskazówka: $\sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$

165 Zadanie – Polaryzacja i geolog

Młoda geolog podczas wycieczki w Sudetach znalazła fragment kryształu. W celu jego identyfikacji badała polaryzację odbitego od ściany kryształu światła. Dysponowała wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskała, gdy kąt między normalną do ściany kryształu a odbitą wiązką był równy 55°. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ najbardziej prawdopodobny minerał, którego fragment był badany. Wybierz spośród (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): cyrkon (1,92), fluoryt (1,43), korund (1,77). Kryształ znajdował się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Wskazówka: Kąt między wiązką odbitą a załamaną musi być kątem prostym.

Wskazówka: Kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Wskazówka:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = n_2 \sin(90° - \alpha_1)$$

n_1 oraz n_2 – bezwzględny współczynnik załamania światła odpowiednio dla powietrza oraz minerału; α_1 oraz α_2 – kąt padania oraz załamania światła.

Wskazówka: $\sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$

166 Zadanie – Jednostki powierzchni

Przelicz km^2 na m^2:
137 km^2 to .... m^2
364 km^2 to .... m^2

Przelicz m^2 na cm^2:
12 m^2 to .... cm^2
201 m^2 to .... cm^2

Przelicz mm^2 na cm^2
1700 mm^2 to .... cm^2
5030 mm^2 to .... cm^2

Wskazówka:
1 km^2 = 1000000 m^2
1 m^2 to 10000 cm^2
1 cm^2 to 100 mm^2

167 Zadanie – Prostokąty

O ile zmieni się pole prostokąta o bokach 14 cm i 48 cm, jeśli pierwszy bok zwiększymy 10 razy, a drugi bok zmniejszymy 6 razy?

Wskazówka: Oblicz pole pierwszego prostokąta.
672 cm^2.
Oblicz nowe długości boków.
140 cm

8 cm
Oblicz pole nowego prostokąta: 1120 cm^2

168 Zadanie – Boki prostokątów

Oblicz długość:
a) boku kwardatu o polu powierzchni 16 m^2.
b) boku prostokąta o polu powierzchni 12 m^2, którego drugi z boków jest równy 4 m.
c) boku kwadratu o obwodzie 12 m.
d) boku prostokąta o obwodzie 24 m, którego drugi z boków jest równy 3 m.

Wskazówka:
a) $A = aa = a^2$
b) $A = ab$
c) $L = 4a$
d) $L = 2(a + b)$

169 Zadanie – Jednostki długości

Przelicz kilometry na metry:
268 km to .... m
550 km to .... m

Przelicz metry na centymetry:
11 m to .... cm
1002 m to .... cm

Przelicz milimetry na centymetry:
300 mm to .... cm
10101 mm to .... cm

Wskazówka:
1 kilometr = 1000 metrów
1 metr to 100 centymetrów
1 centymetr to 10 milimetrów

170 Zadanie – Jednostki czasu

Przelicz minuty na sekundy:
15 min. to .... s
147 min. to .... s

Przelicz godziny na minuty:
11 godz. to .... min.
14 godz. to .... min.

Przelicz sekundy na godziny:
39600 s to .... godz.
46800 s to .... godz.

Wskazówka:
1 godzina = 60 minut

1 minuta = 60 sekund
1 godzina = 3600 sekund

171 Zadanie – Prędkość człowieka

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 67650 metrów w ciągu 165 minut?

Wskazówka: Ile metrów pokonuje w ciągu minuty? Odpowiedź: 410 m.

Wskazówka: Ile metrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 24600 m.

Wskazówka: Ile kilometrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 24,6 km.

172 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 331 m/s.

Wskazówka: Jaką drogę przebędzie dźwięk?

173 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 8,5 m/s. Maciek, który wyruszył 13 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 52 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 1105 s?

Wskazówka: Ile czasu jechał Jaś? Odpowiedź: 1170 s.

Wskazówka: Jaka była długość trasy? (Jaś...) Odpowiedź: 9945 m.

174 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 200 cm/s przez 13 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 230 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 180 cm/s przez 5,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Ile czasu poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Jaką drogę przebył trzeci żółw?

175 Zadanie – Droga do szkoły

Jaś pokonuje swoją drogę do szkoły ze średnią szybkością 25 km/h. Pierwszą część drogi pokonuje rowerem miejskim, a drugą autobusem. Oba odcinki drogi są sobie równe. Rowerem porusza się ze średnią szybkością 20 km/h. Oblicz średnią szybkość jazdy autobusem. Wynik podaj z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

Wskazówka: Zastanów się, w jaki sposób obliczyć średnią szybkość przy znanej szybkości autobusu i roweru. Możesz prowadzić przekształcenia wzorów tak, jakby dystans przejechany przez Jasia do szkoły był znany, zobaczysz, że w późniejszych obliczeniach ten dystans nie będzie istotny.

Wskazówka: Przyjmijmy oznaczenia: v_a - szybkość autobusu, v_r - szybkość jazdy rowerem, v - szybkość średnia, s - długość całej drogi Jasia do szkoły, t_a - czas jazdy autobusem, t_r - czas jazdy rowerem.
Średnia szybkość jest to iloraz całej drogi i całego czasu, tj.

$$v = \frac{s}{t_a + t_r}, \qquad t_a = \frac{s}{2v_a}, \qquad t_r = \frac{s}{2v_r}.$$

Podstawiając odpowiednio czas jazdy autobusem oraz czas jazdy rowerem do pierwszego z równań, otrzymujemy równanie:

$$v = \frac{s}{\frac{s}{2v_a} + \frac{s}{2v_r}}.$$

Po skróceniu przez s i uproszczeniu równania otrzymujemy:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r}}.$$

Jest to tzw. średnia harmoniczna. Końcowy wzór na prędkość autobusu to:

$$v_a = \frac{v v_r}{2v_r - v}.$$

176 Zadanie – Samochód

Samochód pana Krzysztofa spala 5 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 4 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 2 zł?

Wskazówka: Na ile litrów benzyny wystarczy równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej? Odpowiedź: 0,5 litra.

177 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 14,7 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 1470 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

Wskazówka: Rozważ całe zdarzenie w układzie związanym z wodą.

178 Zadanie – Przejażdżka metrem

Uczeń wsiadł do metra na początku pociągu. Postanowił przejść podczas jazdy na jego koniec korytarzem o długości $l = 115$ m. Gdy tam dotarł, pociąg wjechał na kolejną stację. Uczeń szedł ze średnią szybkością $v_p = 4{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ względem pociągu. Pociąg przejechał drogę $s = 1100$ m. Oblicz średnią szybkość, z jaką jechał pociąg względem stacji metra u, oraz średnią szybkość ucznia względem ziemi v_z.

Wskazówka: Aby otrzymać średnią szybkość jazdy pociągu, należy obliczyć iloraz całej drogi pokonanej przez pociąg s oraz czasu przejazdu pociągu pomiędzy stacjami t:

$$u = \frac{s}{t}.$$

W takim samym czasie uczeń pokonuje długość całego pociągu l ze średnią szybkością v_p względem pociągu:

$$v_p = \frac{l}{t}, \qquad t = \frac{l}{v_p}.$$

W ten sposób otrzymujemy ostateczne wyrażenie na szybkość pociągu względem peronu:

$$u = \frac{s \cdot v_p}{l}.$$

Wskazówka: Z transformacji Galileusza wynika zależność:

$$v_z = u - v_p.$$

179 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 15 mm zakończony jest otworem o średnicy 7 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 50 cm/s?

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że wodę w tym przypadku można uznać za ciecz nieściśliwą.

Wskazówka: $v_1 t A_1 = v_2 t A_2$, gdzie $A_i \propto d_i^2$

180 Zadanie – Odcinki

Odcinek w skali 1:16 ma 18 cm długości. Jaką długość ma ten odcinek w skali 18:1?

Wskazówka: Jaką długość ma ten odcinek w skali 1:1?

18 trzeba pomnożyć przez 16

Zastanów się, ile razy powiększono ten odcinek i jaka będzie jego długość?

181 Zadanie – Fotografia

Łazik marsjański przesłał zdjęcie znalezionego obiektu do analizy. Na zdjęciu w skali 1:20 obiekt miał 4,5 mm. Aby go dokładniej zbadać, powiększono zdjęcie. Jaką wielkość będzie miał ten obiekt w skali 6:1?

Wskazówka: 4,5 mm na fotografii to ile milimetrów w rzeczywistości (w skali 1:1)? Odpowiedź: 90 mm.

Wskazówka: 90 mm to ile mm w skali 6:1? Odpowiedź: 540 mm.

182 Zadanie – Sonda

Sonda wykonała zdjęcia powierzchni Marsa. Po analizie obrazów stwierdzono, że na zdjęciach krater wulkanu miał średnicę 14 cm, a wysokość wulkanu była równa 1,4 cm. Jakie były rzeczywiste rozmiary tego wulkanu w kilometrach, jeśli zdjęcia zostały wykonane w skali 1:15000?

Wskazówka: 14 cm na mapie to ile centymetrów w rzeczywistości? Odpowiedź: 210000 cm.

Wskazówka: 1,4 cm na mapie to ile centymetrów w rzeczywistości? Odpowiedź: 21000 cm.

Wskazówka: Ile centymetrów to 1 km? 100000 cm to 1 km.

183 Zadanie – Przyssawka

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 11 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1010 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Wskazówka: $F = p\,A$

Wskazówka: $A = \pi(d/2)^2$

Wskazówka: $F \approx 960$ N.

Wskazówka: $m = F/g$

184 Zadanie – Pod wodą

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 15 m. Przyjmij gęstość wody 1026 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Wskazówka: $p = dgh$

185 Zadanie – Prasa hydrauliczna

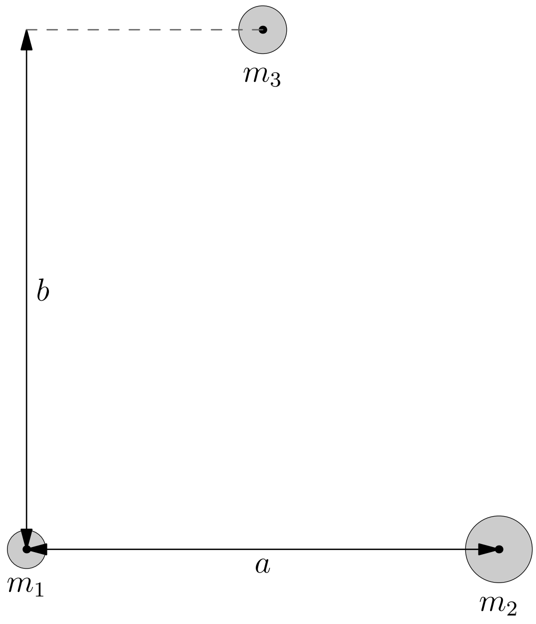
Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 5 cm, a duży średnicę 49 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 300 kg leżącą na dużym tłoku?

Wskazówka: $p = mg/S$, gdzie $S = \pi r^2$

Wskazówka: $p_1 = p_2$

186 Zadanie – Środek masy

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0{,}4$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg, $m_3 = 0{,}8$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 7$ cm, a wysokość to $b = 10{,}5$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy m_1.



Wskazówka: Współrzędne środka masy to

$$x_c = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i},$$

$$y_c = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{\sum\limits_i m_i},$$

gdzie x_c to współrzędna pozioma, a y_c to współrzędna pionowa środka masy.

187 Zadanie – Lot mionu

Mion leci ze stałą prędkością $1{,}9 \cdot 10^8$ m/s względem laboratorium. W układzie związanym z mionem rozpadł się on po czasie $2{,}4\ \mu$s od początku lotu. Ile czasu trwał lot mionu w układzie związanym z laboratorium? Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

Wskazówka: Czas lotu zmierzony w układzie związanym z laboratorium, t, będzie dłuższy niż czas zmierzony w układzie związanym z mionem, t_0.

188 Zadanie – Jednostki temperatury

Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Celsjusza na skalę Kelwina:
-12°C to ..... K.
-16°C to ..... K.
Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Fahrenheita na skalę Kelwina:
5°F to ...... K.
-4°F to ...... K.

189 Zadanie – Temperatury

W różnych krajach stosuje się inne skale temperatur, np. w Polsce temperaturę podaje się w skali Celsjusza, a w USA w skali Fahrenheita. Naukowcy używają najczęściej skali Kelwina. Aby dowiedzieć się, jak przeliczyć temperatury, zapoznaj się z poniższymi wzorami, w których T_K oznacza temperaturę podaną w skali Kelwina, T_C oznacza temperaturę podaną w stopniach Celsjusza, a T_F oznacza temperaturę podaną w stopniach Fahrenheita.

$$T_K = 273{,}15 + T_C \qquad\qquad T_C = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

Dwaj chłopcy, Adaś z Polski i John z USA, mierzyli codziennie temperaturę przed domem, otrzymując następujące wyniki:
Adaś: -11°C, -8°C, -12°C, -14°C.
John: 14°F, 23°F, 41°F, 5°F.
Obaj chłopcy biorą udział w konkursie badawczym i muszą przesłać wyniki swoich pomiarów w skali Kelwina.
Pytanie 1. Jakie będą wartości uzyskanych przez nich temperatur w skali Kelwina?
Pytanie 2. Ile wynosi średnia temperatura u każdego z chłopców? Odpowiedź podaj w skali Kelwina.

190 Zadanie – Średnia temperatura

Stacja meteorologiczna prowadziła przez tydzień pomiary średniej dobowej temperatury, uzyskując następujące wyniki: 1°C, 3°C, -1°C, 2°C, -2°C, 0°C, 4°C.
Ile wynosi średnia temperatura w tym tygodniu?

Wskazówka: Aby obliczyć średnią temperaturę, należy dodać wszystkie pomiary i podzielić przez liczbę pomiarów.

191 Zadanie – Zmiana energii wewnętrznej układu

W pewnym procesie dostarczyliśmy do układu ciepło o wartości 340 J, wykonaliśmy pracę nad tym układem (np. sprężając go) o wartości 100 J oraz odebraliśmy od układu ciepło o wartości 170 J, a układ wykonał pracę o wartości 110 J. Oblicz zmianę energii wewnętrznej tego układu wskutek opisanego procesu.

Wskazówka: $\Delta U = Q + W$, gdzie Q jest ciepłem dostarczanym do układu, a W jest pracą wykonywaną nad układem.

192 Zadanie – Szybkość średnia atomu

W pewnym ośrodku o temperaturze 27°C, poruszają się atomy argonu. Oblicz szybkość średnią kwadratową, z jaką poruszają się cząsteczki tego gazu, wiedząc, że jego masa molowa wynosi 40 g/mol.

Wskazówka: Wyraź temperaturę w kelwinach.

Wskazówka: Energia kinetyczna cząsteczki jest równa

$$\frac{3}{2}nRT$$

R - uniwersalna stała gazowa, T - temperatura.

Wskazówka: Uniwersalna stała gazowa wynosi 8,31 J/(mol·K).

Wskazówka: Szybkość średnia kwadratowa cząsteczki wynosi

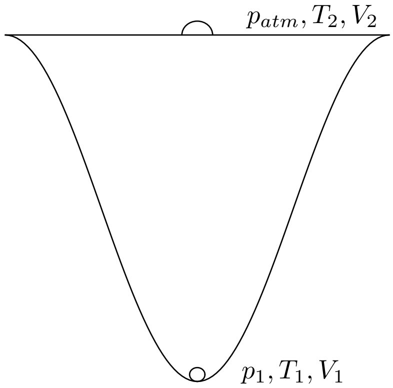
$$\sqrt{3TR/\mu}$$

μ - masa molowa.

193 Zadanie – Pęcherzyk powietrza

Z dna jeziora o głębokości 27,4 m odrywa się pęcherzyk powietrza o promieniu 4,4 mm. Temperatura na dnie jeziora wynosi 4,2°C. Pęcherzyk po dotarciu na powierzchnię jeziora zmienił się w półsferyczną bańkę o promieniu 10,1 mm. Jaka temperatura panuje na powierzchni jeziora, jeśli ciśnienie atmosferyczne wynosi 100 kPa? Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1000 kg/m^3, a gęstość powietrza w warunkach normalnych 1,29 kg/m^3. Pomiń wpływ napięcia powierzchniowego na ciśnienie w pęcherzyku. Załóż, że temperatura powietrza w pęcherzyku jest zawsze równa temperaturze otoczenia.

Wskazówka:



Wskazówka: Do znalezienia ciśnienia na dnie jeziora skorzystaj z równania

$$p = p_a + \rho_w \cdot g \cdot h$$

p - całkowite ciśnienie, p_a - ciśnienie atmosferyczne, ρ - gęstość wody, g - przyspieszenie ziemskie, h - głębokość jeziora.

Wskazówka: Ułóż równania gazu doskonałego w pęcherzyku na dnie i na powierzchni jeziora

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$$

$$p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2$$

p_1 - całkowite ciśnienie na dnie jeziora, V_1 - objętość pęcherzyka na dnie jeziora, n - liczba moli, R - uniwersalna stała gazowa, T_1 - temperatura na dnie jeziora, p_2 - całkowite ciśnienie na powierzchni jeziora, V_2 - objętość pęcherzyka na powierzchni jeziora, T_2 - temperatura na powierzchni jeziora.

Wskazówka:

$$T_2 = \frac{p_a \cdot T_1}{p_a + h \cdot g \cdot \rho_w} \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

r_2 - promień pęcherzyka na powierzchni jeziora, r_1 - promień pęcherzyka na dnie jeziora.

194 Zadanie – Entropia i porcja wody

Oblicz zmianę entropii wody o masie 52 g podczas przemiany jej stanu ze stałego (lód) w stan ciekły (płyn) w temperaturze topnienia pod ciśnieniem 1 atm. Przyjmij ciepło topnienia równe 334 kJ/kg.

Wskazówka: Zmiana entropii $\Delta S = Q/T$, gdzie Q – ciepło, T – temperatura (w K).

Wskazówka: $Q = mL$, gdzie m – masa wody, L – ciepło przemiany.

195 Zadanie – Przemiany gazowe

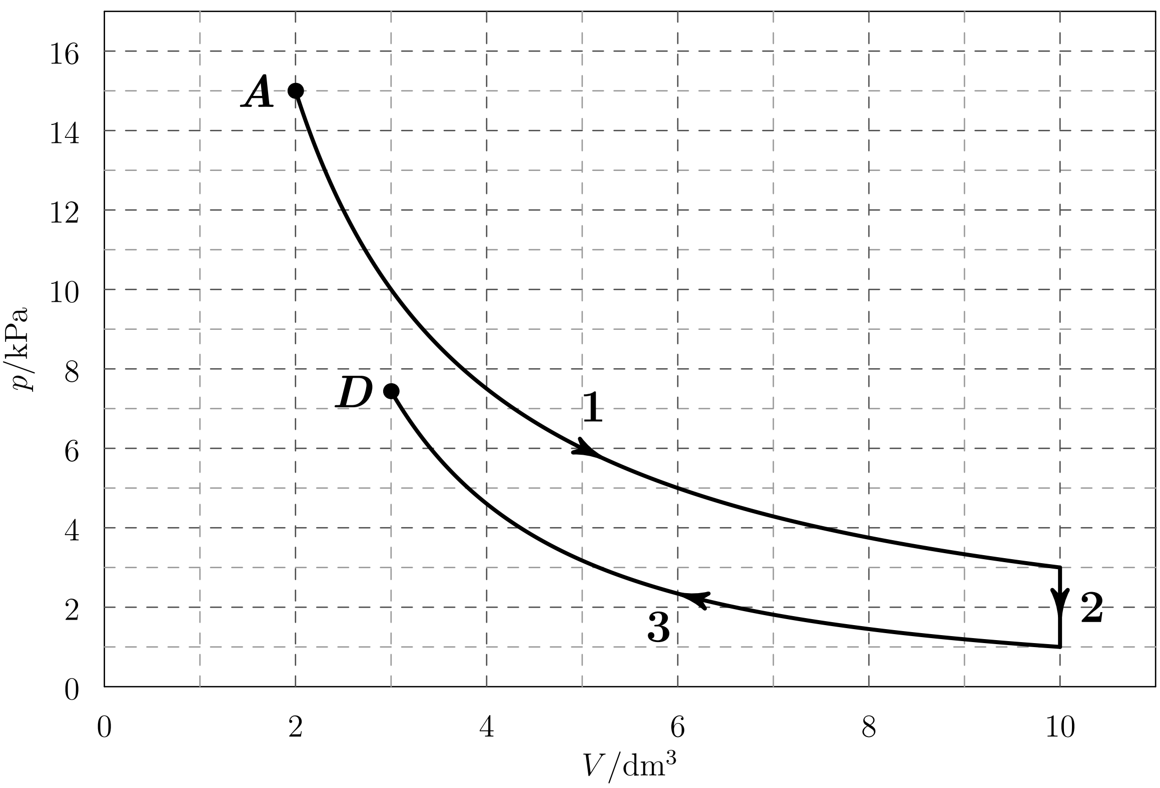
Ustalona porcja gazowego neonu przeszła przemiany 1, 2 i 3 przedstawione na poniższym wykresie, gdzie p oznacza ciśnienie gazu, a V jego objętość. Początkowo parametry gazu opisywał punkt A. Wiadomo, że przemiana 3 była adiabatyczna.

a) Podaj nazwy przemian 1 i 2. W przypadku przemiany 1 swoją hipotezę dotyczącą rodzaju przemiany sprawdź w 3 różnych punktach.

b) Dla każdej z przemian wskaż wielkości, które są zawsze równe 0 w trakcie tej przemiany.

c) Czy gaz w punkcie D ma większą temperaturę niż w punkcie A?

d) Czy z punktu D może ta porcja gazu dotrzeć do punktu A w przemianie izobarycznej?

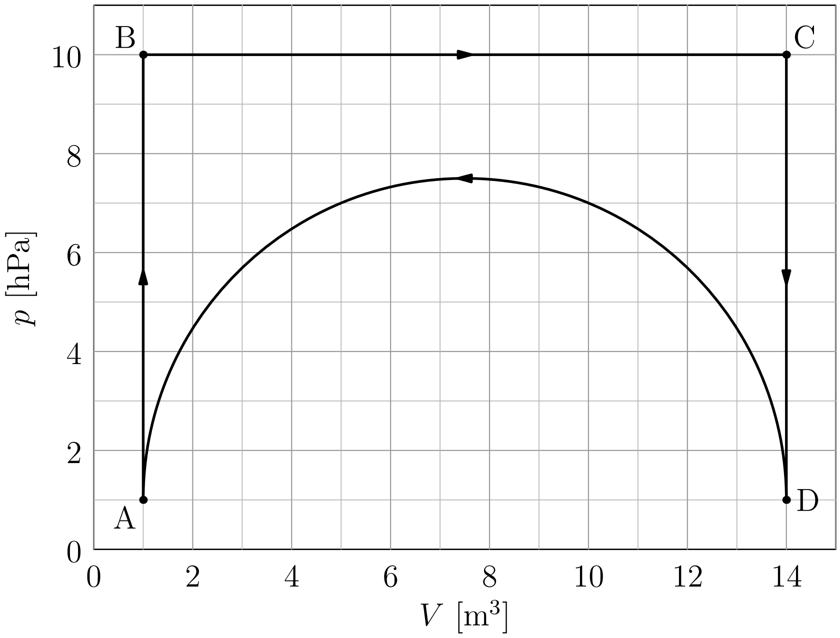


Wskazówka: W przemianie 1 iloczyn pV jest stały.

Wskazówka: Dla gazu doskonałego $T \propto pV$.

196 Zadanie – Praca wykonana przez gaz

Oblicz pracę wykonaną przez gaz podczas jednego cyklu przedstawionego na wykresie poniżej. Fragment DA ma kształt półokręgu.



Wskazówka: Praca wykonana przez gaz jest równa polu pod wykresem $p(V)$.

Wskazówka: Dolny fragment wykresu ma kształt półokręgu

$$W = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} - \frac{\pi}{2} r^2$$

197 Zadanie – Przemiany gazu doskonałego

W szczelnym naczyniu, zamkniętym tłokiem, znajduje się argon. Masa gazu jest równa 2 kg, a początkowa temperatura 18°C. Gaz poddano przemianie izobarycznej, dostarczając mu 840 J ciepła. Jaką pracę wykonał argon podczas rozprężania? Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 40 g/mol.

Wskazówka: Skorzystaj z równania gazu doskonałego.

Wskazówka: Zauważ, że w przemianie izobarycznej istnieje związek między zmianą objętości a zmianą temperatury.

Wskazówka:

$$C_p = \frac{Q}{n \cdot \Delta T}$$

C_p - molowe ciepło właściwe, Q - przekazane ciepło, n - liczba moli, ΔT - zmiana temperatury.

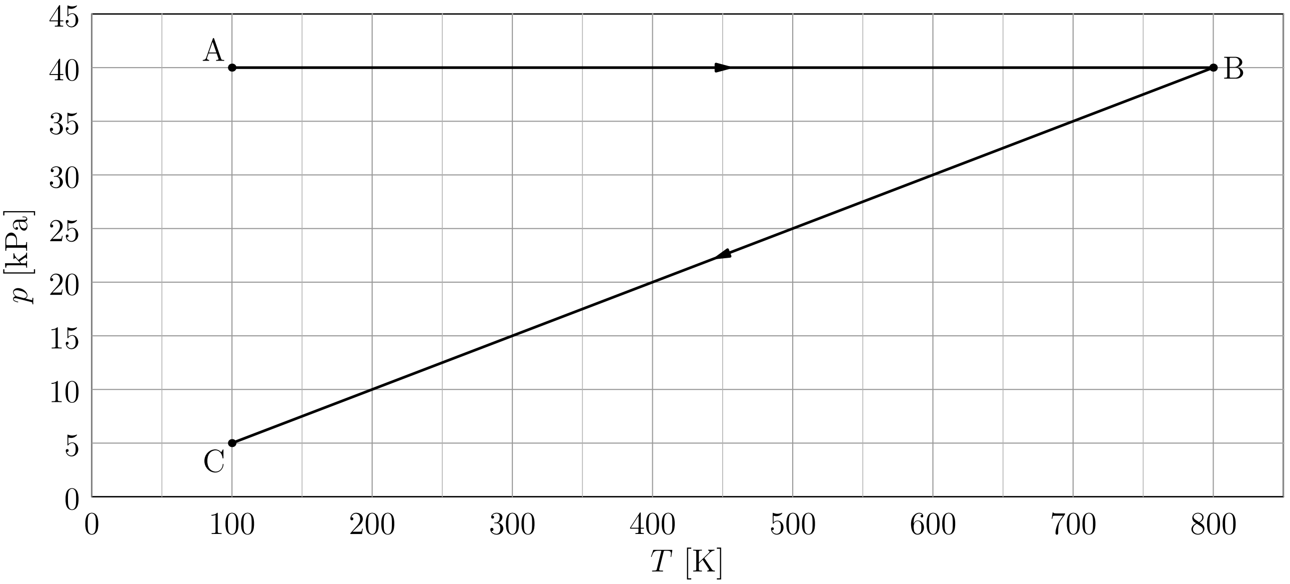
Wskazówka:

$$W = \frac{2}{5} Q$$

W - praca gazu.

198 Zadanie – Ciepło, energia wewnętrzna i praca w przemianach gazowych

Oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu doskonałego, pracę wykonaną przez gaz oraz ciepło wymienione z otoczeniem podczas przemiany przedstawionej na wykresie poniżej. Przyjmij, że zmiana objętości wyniosła 0,21 m^3.



Wskazówka: Energia wewnętrzna zależy od temperatury.

Wskazówka: Praca wykonana przez gaz w przemianie izobarycznej (A-B)

$$W = p \cdot \Delta V$$

p - ciśnienie gazu, ΔV - zmiana objętości gazu.

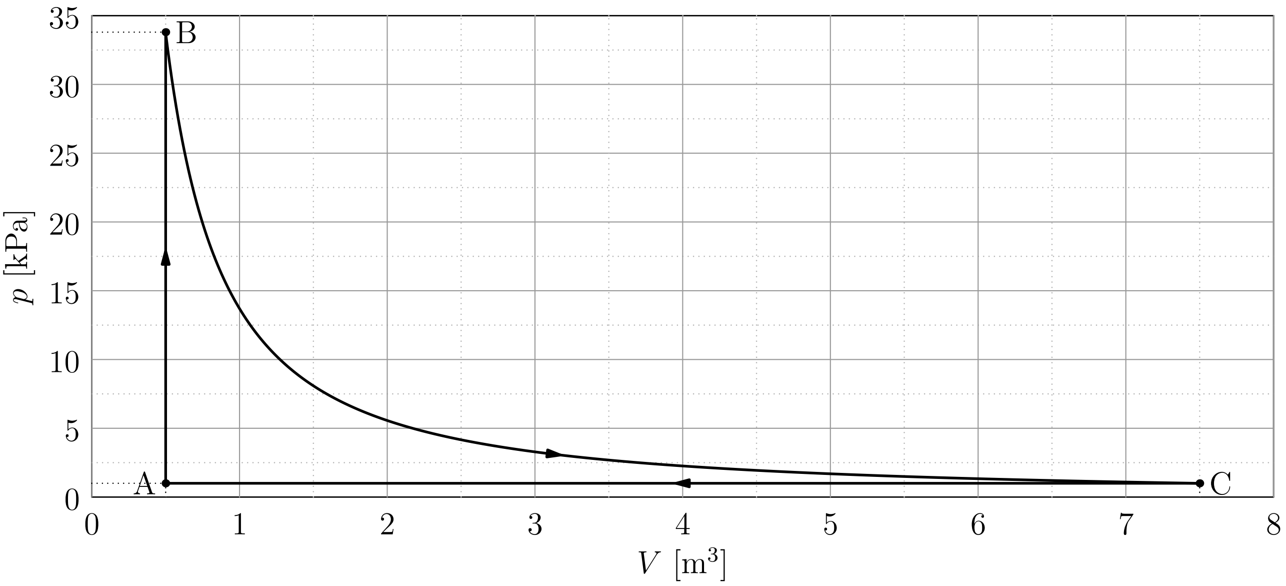
Wskazówka:

$$\Delta U = W + Q$$

ΔU - zmiana energii wewnętrznej, W - praca wykonana nad gazem, Q - ciepło wymienione z otoczeniem.

199 Zadanie – Ciepło oddane i pobrane

Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest poddawany przemianom przedstawionym na wykresie poniżej. Wiedząc, że przemiana B-C jest przemianą adiabatyczną oraz że ciśnienie w punkcie A jest równe 1 kPa, a w punkcie B ciśnienie wynosi 33,8 kPa, oblicz:
a) energię pobraną przez gaz z grzejnika;
b) energię oddaną chłodnicy;
c) wypadkową pracę w jednym cyklu silnika cieplnego, w którym gaz poddawany jest opisanym przemianom;
d) sprawność tego silnika.



Wskazówka: W przemianie A-B gaz pobiera ciepło

$$Q_{AB} = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

C_v - ciepło molowe przy stałej objętości.

Wskazówka: Korzystając z równania gazu idealnego dla stanów A, B

$$p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A$$

$$p_B \cdot V_B = n \cdot R \cdot T_B$$

odejmując równania stronami i upraszczając równanie otrzymujemy związek między zmianą temperatury a zmianą ciśnienia

$$T_B - T_A = \frac{p_B \cdot V_B - p_A \cdot V_A}{n \cdot R}$$

T_B - temperatura w stanie B, T_A - temperatura w stanie A, p_B - ciśnienie w stanie B, p_A - ciśnienie w stanie A, V_B - objętość w stanie B, V_A - objętość w stanie A.

Wskazówka: Ciepło molowe przy stałej objętości dla gazu jednoatomowego jest równe $\frac{3}{2}R$.

Wskazówka: W przemianie C-A gaz oddaje ciepło

$$Q_{CA} = n \cdot C_p \cdot \Delta T$$

n - liczba moli, C_p - ciepło molowe przy stałym ciśnieniu, ΔT - zmiana temperatury gazu.

Wskazówka: Ciepło molowe przy stałym ciśnieniu dla gazu jednoatomowego jest równe $\frac{5}{2}R$.

Wskazówka: Praca wykonana przez gaz jest równa różnicy między ciepłem otrzymanym a oddanym

$$W = Q_{AB} + Q_{CA}$$
$$W = Q_{AB} - |Q_{CA}|$$

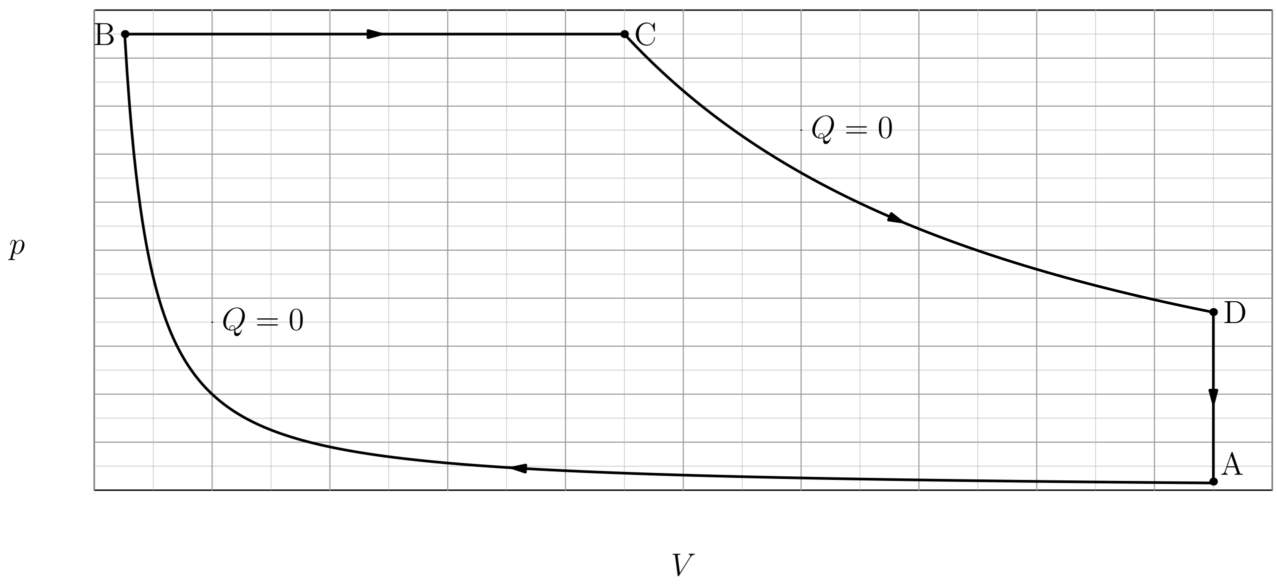
Wskazówka:

$$\eta = \left|\frac{W}{Q}\right|$$

η - sprawność silnika, W - praca wykonana przez gaz, Q - przekazane ciepło.

200 Zadanie – Cykl przemian gazu

Wyznacz sprawność cyklu dla ustalonej porcji gazu doskonałego przedstawionego na rysunku poniżej. Wynik przedstaw tylko w zależności od temperatur oraz stosunku ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej. Przemiany A-B oraz C-D są adiabatyczne. Dane są temperatury w punktach A, B, C, D.



Wskazówka:

$$\eta = \left|\frac{W}{Q}\right| = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

η - sprawność cieplna, W - praca wykonana przez gaz, Q - przekazane ciepło.

Wskazówka: Pobrane ciepło w przemianie izbarycznej

$$Q_{BC} = C_p \cdot n \cdot \Delta T = C_p \cdot n \cdot (T_C - T_B)$$

C_p - ciepło molowe w przemianie izobarycznej, ΔT - zmiana temperatury.

Wskazówka: Oddane ciepło w przemianie izochorycznej

$$Q_{DA} = C_v \cdot n \cdot \Delta T = C_v \cdot n \cdot (T_A - T_D)$$

C_v - ciepło molowe w przemianie izochorycznej.

201 Zadanie – Przemiana adiabatyczna i izotermiczna

Porcję 2 kg argonu o temperaturze 613,7 K i ciśnieniu $3 \cdot 10^5$ Pa sprężono adiabatycznie, a następnie rozprężono izotermicznie. Ilość ciepła pobrana w procesie izotermicznym jest równa przyrostowi energii wewnętrznej gazu w procesie adiabatycznym i wynosi 250 kJ. Oblicz objętość i ciśnienie gazu po przemianie
a) adiabatycznej
b) izotermicznej.
Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 40 g/mol, a wykładnik adiabaty 1,66.

Wskazówka: Wyznacz początkową objętość gazu z równania gazu doskonałego.

Wskazówka: W przemianie adiabatycznej praca jest równa:

$$W = \int_1^2 p \cdot dV = \frac{p_1 \cdot {V_1}^{\chi}}{1-\chi}\left({V_2}^{1-\chi} - {V_1}^{1-\chi}\right)$$

a w przemianie izotermicznej:

$$W = \int_2^3 p \cdot dV = n \cdot R \cdot T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$$

W - praca gazu, p - ciśnienie gazu, V - objętość gazu, χ - wykładnik adiabaty, p_1 - początkowe ciśnienie, V_1 - początkowa objętość, V_2 - objętość po przemianie adiabatycznej, V_3 - objętość po przemianie izotermicznej, T_2 - temperatura po przemianie izotermicznej.

Wskazówka: Objętość gazu po przemianie adiabatycznej obliczysz, korzystając ze wzoru na pracę w przemianie adiabatycznej.

Wskazówka: Korzystając z równań Poissona, oblicz ciśnienie oraz temperaturę po przemianie adiabatycznej:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\chi}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\chi-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

Wskazówka: Objętość gazu po przemianie izotermicznej obliczysz, korzystając ze wzoru na pracę w przemianie izotermicznej

$$V_3 = V_2 \exp\left(\frac{W}{n \cdot R \cdot T_2}\right)$$

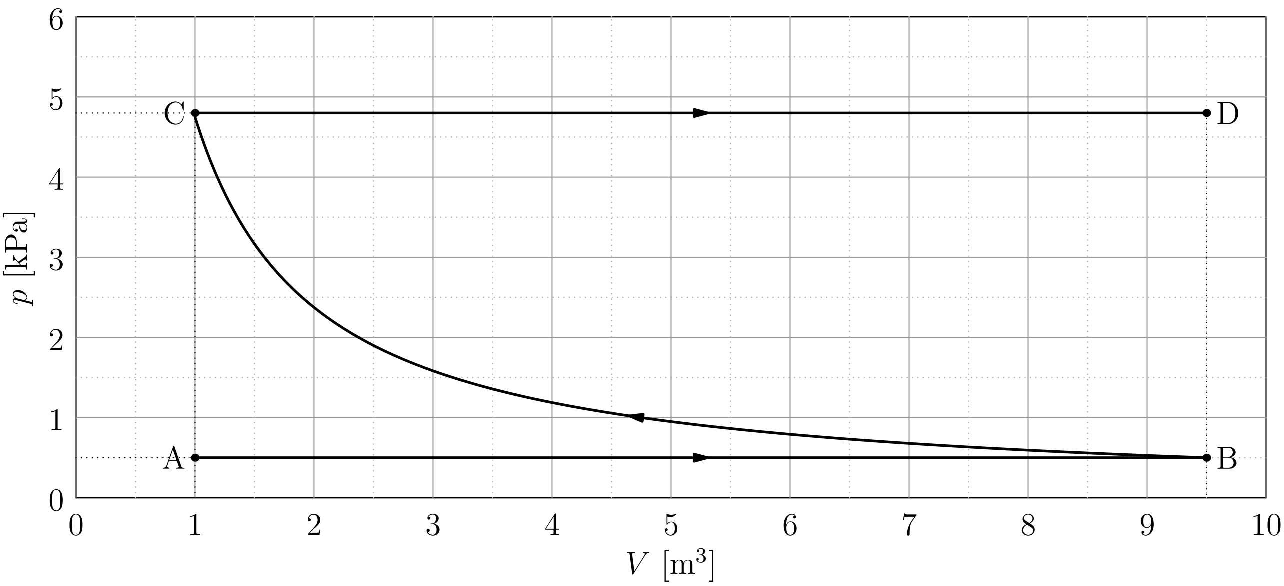
Wskazówka: Wyznacz końcowe ciśnienie gazu z równania gazu doskonałego.

202 Zadanie – Entropia gazu

Zmianę entropii gazu doskonałego wyraża uniwersalny dla każdej przemiany wzór.

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_p} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{T_k}{T_p}$$

n - liczba moli, R - uniwersalna stała gazowa, V_k - objętość końcowa, V_p - objętość początkowa, C_v - ciepło molowe przy stałej objętości, T_k - temperatura końcowa, T_p - temperatura początkowa.
Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego został poddany przemianie izotermicznej i dwóm przemianom izobarycznym. Końcowe ciśnienie gazu jest równe 4,8 kPa. Korzystając z przedstawionego wzoru oraz wykresu poniżej, oblicz zmianę entropii dla każdego z trzech procesów. Zinterpretuj otrzymane wyniki.



Wskazówka: Zmianę entropii w przemianie izobarycznej można zapisać

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta S = n \cdot C_p \ln \frac{V_B}{V_A}$$

ΔS - zmiana entropii, n - liczba moli, R - uniwersalna stała gazowa, V_B - ciśnienie w stanie B, V_A - ciśnienie w stanie A, T_A - temperatura w stanie A, T_B - temperatura w stanie B, C_v - ciepło molowe przy stałej objętości, C_p - ciepło molowe przy stałym ciśnieniu.

Wskazówka: Dla przemiany izotermicznej zmianę entropii można zapisać

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_C}{V_B} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{T_C}{T_B}$$

ponieważ temperatura jest stała, ostatni człon równania wynosi zero,

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_C}{V_B}$$

203 Zadanie – Równanie van der Waalsa

Porcję 2 kg chloru ogrzano od temperatury 420 K do temperatury 510 K. Podczas przemiany objętość gazu wzrosła od 4 m^3 do 8 m^3. Zakładając, że gaz spełnia równanie van der Waalsa, oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu. Załóż, że masa molowa użytego gazu to 35 g/mol, ciepło molowe przy stałej objętości 12,8 J/(K·mol), a stałe występujące w równaniu van der Waalsa $a = 0{,}658$ J·m^3/(mol)^2, $b = 0{,}056 \cdot 10^{-3}$ m^3/mol.

Wskazówka: Równanie van der Waalsa dla dowolnej masy gazu ma postać:

$$(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2})(V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

p - ciśnienie gazu, n - liczba moli, a - stała uwzględniająca oddziaływania między cząsteczkami, V - objętość gazu, b - stała uwzględniająca rozmiary gazu, R - uniwersalna stała gazowa, T - temperatura gazu.

Wskazówka:

$$U(T,V)$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$dU = C_v \cdot dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right] dV$$

dU - zmiana energii wewnętrznej gazu, C_v - ciepło molowe przy stałym ciśnieniu.

Wskazówka: Ciśnienie wyznaczone z równania van der Waalsa jest równe

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V - n \cdot b} - \frac{n^2 \cdot a}{V^2}$$

Wskazówka:

$$\Delta U = n \cdot C_v(T_2 - T_1) - n^2 \cdot a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

204 Zadanie – Wzory redukcyjne 1

Oblicz:
a) $(-3\sin 150^\circ + 4\operatorname{tg} 225^\circ) \cdot 2\cos 225^\circ =$
b) $-3\sin 225^\circ + 3\cos 225^\circ =$
c) $(3\sin 45^\circ - \cos 150^\circ)\cdot(3\sin 45^\circ + \cos 150^\circ) =$

205 Zadanie – Wzory redukcyjne 2

Oblicz:
a) $(-3\sin(-45^\circ) + 6\operatorname{tg} 480^\circ) \cdot 3\cos 930^\circ =$
b) $6\sin 930^\circ + 3\cos(-150^\circ) =$
c) $(3\sin 480^\circ - \cos(-45^\circ))\cdot(3\sin(-150^\circ) + \cos(-150^\circ)) =$
d) $\operatorname{tg} 930^\circ \cdot \sin 480^\circ + \sin 930^\circ \cdot \cos(-45^\circ) - \sin(-150^\circ) =$
e) $(\operatorname{tg} 780^\circ)^2 - 3(\operatorname{ctg} 420^\circ)^2 =$
f) $\sin^2(-45^\circ) + \cos^2(-45^\circ) =$

206 Zadanie – Wzory redukcyjne 3

Oblicz:
a) $(\sin(-162^\circ) + 5\cos(-162^\circ))^2 - 2 \cdot 5\cos(-162^\circ)\sin(-162^\circ) =$
b) $5\sin 597^\circ + 2\cos(-457^\circ) =$
c) $(2\sin 134^\circ - \cos(-162^\circ))\cdot(2\sin(-457^\circ) + \cos(-457^\circ)) =$
d) $\operatorname{tg} 597^\circ \cdot \sin 134^\circ + \sin 597^\circ \cdot \cos(-162^\circ) - \sin(-457^\circ) =$
e) $(\operatorname{tg} 780^\circ)^2 - 3(\operatorname{ctg} 420^\circ)^2 =$
f) $\sin^2(-162^\circ) - \cos^2(-162^\circ) =$

207 Zadanie – Zbiory liczb naturalnych

Zbiory A, B i C składają się z następujących elementów:

$A = \{6, 7, 10, 12, 15, 19\}$

$B = \{2, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 22\}$

$C = \{2, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 21\}$

Określ:
a) sumę $A \cup B$,
b) sumę $B \cup C$,
c) sumę $A \cup B \cup C$,
d) różnicę $A \setminus B$,
e) różnicę $B \setminus C$,
f) różnicę $A \setminus C$,
g) iloczyn (część wspólną) $A \cap B$,
h) iloczyn $B \cap C$,
i) iloczyn $A \cap C$,
j) iloczyn $A \cap B \cap C$.

208 Zadanie – Działania na zbiorach

Uprość poniższe wyrażenia, w których występują zbiory A i B:
a) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
b) $(A \cup B) \cap (B \setminus A)$
c) $A \cap (B \cup A)$
d) $(B \cup B) \setminus A$