Warszawa, 2017-09-23

Spis wszystkich zadań napisanych po polsku w Gezmat

Adresy autorów znajdziesz na stronie projektu (linki - nagłówek, stopka) oraz w pliku gezmat.cxx

Instrukcję, jak używać Gezmat, by tworzyć własne zestawy zadań i dodawać własne zadania, znajdziesz na stronie projektu. Ten plik został wygenerowany po wywołaniu w konsoli systemu Linux polecenia: `./gezmat.bash def/all_problems_pl.gzm`
Ważne! Plik `def/all_problems_pl.gzm` jest tworzony po wywołaniu

`./gezmat.bash def/pl-prepare-all-problems-config.gzm`

Nie edytuj tych plików! Możesz zmienić nazwę pliku `def/all_problems_pl.gzm` i wtedy go edytować jako swój własny plik konfiguracyjny.

1 Zadanie – Ogrzewanie wody

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-ciepło-0000400, diff: 1

Ile ciepła należy dostarczyć 900 g wody, aby ogrzać ją o 15 K? Wynik wyraź w kJ. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K).

Wskazówka:

$$c_w = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

c_w - ciepło właściwe, Q - przekazane ciepło, ΔT - zmiana temperatury.

Odpowiedź: Należy dostarczyć 56,7 kJ.

2 Zadanie – Ochładzanie sali

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-22, id: pl-ciepło-0000500, diff: 2

W pomieszczeniu są klimatyzatory o maksymalnej mocy chłodniczej 3 kW. W sali znajduje się 45 studentów. Można przyjąć, że każdy z nich wydziela ciepło z szybkością około 320 kJ/godz. W pomieszczeniu znajduje się także 17 żarówek, każda o mocy 80 W. Ponieważ na zewnątrz panuje wysoka temperatura, przez ścianę przenika ciepło z szybkością 7 MJ/godz. Ile klimatyzatorów powinno być włączonych, jeśli powietrze w pomieszczeniu ma być utrzymywane w stałej temperaturze 23°C?

Wskazówka: Oblicz ilość wytwarzanego ciepła w ciągu sekundy przez studentów, żarówki oraz ciepło przepływające przez ściany.

Wskazówka: Moc działających klimatyzatorów musi być równa ilości wytwarzanego ciepła w ciągu sekundy.

Odpowiedź: Powinny być włączone 3 klimatyzatory.

3 Zadanie – Kolektor słoneczny

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-ciepło-0000550, diff: 2

Na dachu zamontowany jest kolektor słoneczny o sprawności $n = 24\%$. Energia słoneczna docierająca do kolektora przekazywana jest do wody krążącej w rurach kolektora. Jaka jest powierzchnia kolektora, jeśli w ciągu godziny ogrzewa 189 litrów wody, zwiększając jej temperaturę o 20°C? Przyjmij, że w danej godzinie natężenie promieniowania słonecznego wynosi 760 W/m^2. Ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K), a jej gęstość 1000 kg/m^3.

Wskazówka: Natężenie promieniowania jest równe

$$I = \frac{P}{S}$$

P - moc docierająca do kolektora, S - powierzchnia.

Wskazówka: Moc z jaką ogrzewana jest woda

$$P' = \frac{Q}{t} = \frac{c_w \cdot m \cdot \Delta T}{t}$$

Q - ciepło, t - czas, c_w - ciepło właściwe wody, m - masa wody, ΔT - zmiana temperatury.

Wskazówka:

$$P' = n \cdot P$$

Wskazówka: Powierzchnia kolektora jest równa

$$S = \frac{P}{I} = \frac{c_w \cdot m \cdot \Delta T}{t \cdot I \cdot n}$$

Odpowiedź: Powierzchnia kolektora słonecznego wynosi 24,2 m^2.

4 Zadanie – Ciepło właściwe ciała

Małgorzata Berajter, update: 2017-09-21, id: pl-ciepło-0000600, diff: 2

Do aluminiowego kalorymetru o masie 200 g włożono kulę o masie 390 g. Następnie do naczynia wlano 21 g wrzącej wody i zamknięto kalorymetr, aby zminimalizować wymianę ciepła z otoczeniem. Po ustaleniu się równowagi termicznej układu zmierzono temperaturę wody, wyniosła ona 37°C. Temperatura początkowa kalorymetru i kuli jest równa temperaturze otoczenia i wynosi 21°C. Przyjmij, że ciepło właściwe wody wynosi 4200 J/(kg·K), a ciepło właściwe aluminium 900 J/(kg·K). Oblicz ciepło właściwe kuli, a następnie sprawdź w tablicy, z jakiego materiału jest najprawdopodobniej zbudowana. Zastanów się, dlaczego otrzymana wartość różni się od wartości podanej w tablicy.

substancja	ciepło właściwe J/(kg·K)
cyna	220
miedź	380
nikiel	460
glin	900

Wskazówka: Wykonaj bilans energetyczny.

Wskazówka:

$$c_{ww} \cdot m_w \cdot (100°\mathrm{C} - t_k) = c_{wk} \cdot m_k \cdot (t_k - t_p) + c_{wc} \cdot m_c \cdot (t_k - t_p)$$

c_{ww} - ciepło właściwe wody, m_w - masa wody, t_k temperatura końcowa układu, t_p - temperatura początkowa układu, m_k - masa kalorymetru, c_{wc} - ciepło właściwe kuli, m_c - masa kuli.

Odpowiedź: Ciepło właściwe kuli wynosi 429 J/(kg·K). Otrzymana wartość ciepła właściwego różni się od wartości podanych w tablicy. W obliczeniach nie uwzględniliśmy wymiany ciepła między otoczeniem a układem, która występuje mimo zastosowania kalorymetru. Kula jest prawdopodobnie zbudowana z miedzi.

5 Zadanie – Topienie złota

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-ciepło-0000800, diff: 1

Jubiler na stopienie złota zużył 6080 J energii. Oblicz, ile złota stopił jubiler, wiedząc, że złoto było już podgrzane do temperatury topnienia oraz że ciepło topnienia złota wynosi 64 kJ/kg.

Wskazówka:

$$c_t = \frac{Q}{m}$$

c_t - ciepło topnienia, Q - przekazane ciepło, m - masa ciała.

Odpowiedź: Złotnik stopił 95 g złota.

6 Zadanie – Parowanie wody

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-ciepło-0000900, diff: 1

Do naczynia zawierającego 0,4 kg wody włożono grzałkę o mocy 600 W, a następnie doprowadzono wodę do wrzenia. Ile wody wyparowało w ciągu 3 minut wrzenia? Przyjmij, że ciepło parowania wody wynosi 2270 kJ/kg.

Wskazówka:

$$Q = P \cdot t$$

Q - przekazane ciepło, P - moc grzałki, t - czas.

Wskazówka: Wykonaj bilans energetyczny.

Odpowiedź: Wyparowało 47,6 g wody.

7 Zadanie – Silnik spalinowy

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-ciepło-0000950, diff: 2

Samochód jedzie po autostradzie ze stałą prędkością. By utrzymać prędkość, silnik pracuje z mocą 29 kW. Sprawność silnika wynosi 28%. Ile zapłacimy za benzynę zużytą przez samochód jadący przez 3 godziny? Cena benzyny na stacji paliw wynosi 4,58 zł/l, ciepło spalania wynosi 42 MJ/kg, a jej gęstość 0,7 g/cm^3.

Wskazówka:

$$\eta = \frac{W}{Q}$$

η - sprawność cieplna silnika, W - praca wykonana przez silnik, Q - dostarczone ciepło.

Wskazówka:

$$m = \frac{P \cdot t}{\eta \cdot c_s}$$

m - masa benzyny, P - moc silnika, c_s - ciepło spalania.

Wskazówka: Aby obliczyć koszt przejazdu, trzeba znać objętość zużytego paliwa.

Odpowiedź: Za benzynę zapłacimy 174,25 zł.

8 Zadanie – Lód w ciepłej wodzie

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-22, id: pl-ciepło-0001000, diff: 1

Blok lodu o temperaturze $-10°\mathrm{C}$ i masie 210 g włożono do 770 g wody o temperaturze 55°C. Oblicz końcową temperaturę układu, zakładając, że nie następuje wymiana cieplna z otoczeniem. Przyjmij wartości: ciepła właściwego lodu 2050 J/(kg K), ciepła topnienia lodu 334 kJ/kg, ciepła właściwego wody (cieczy) 4200 J/(kg K).

Wskazówka: Układ jest izolowany, całkowita energia nie zmieniła się.

Wskazówka: Wykonaj bilans energetyczny.

Wskazówka: $(0°\mathrm{C} - T_i)c_i m_i + m_i l_i + (T_f - 0°\mathrm{C})m_i c_w + (T_f - T_w)m_w c_w = 0$

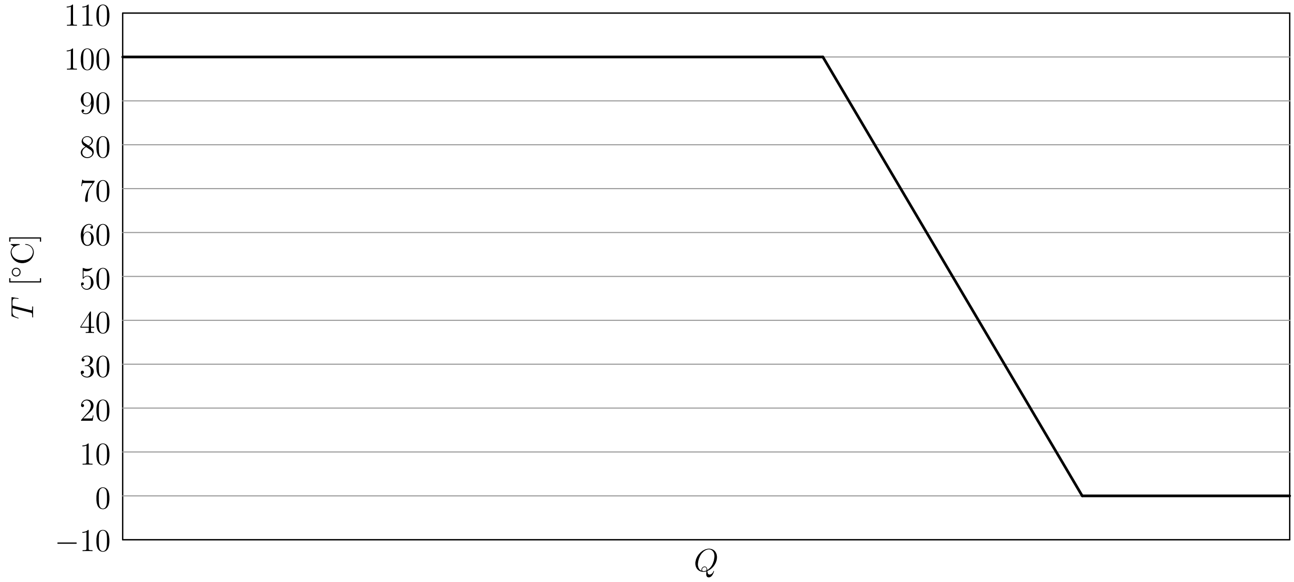
Odpowiedź: Końcowa temperatura układu $T_f = (T_w m_w c_w + (T_i c_i - l_i)m_i)/[(m_i + m_w)c_w] \approx$ 25,1°C.

9 Zadanie – Zjawiska cieplne

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-ciepło-0001500, diff: 1

Na rysunku poniżej przedstawiono zależność temperatury próbki 2 g H_2O od wymienionego z otoczeniem ciepła. Rozpoznaj i podpisz przedstawione zjawiska cieplne. Oblicz, ile kalorii próbka wymieniła z otoczeniem podczas całego procesu przedstawionego na rysunku. Potrzebne dane znajdują się w tabeli. Przyjmij, że na diagramie został przedstawiony cały proces przemiany fazowej. Uwaga, rysunek nie zachowuje skali.

ciepło topnienia/zamarzania	336000 J/kg
ciepło parowania/skraplania	2270000 J/kg
ciepło właściwe (woda)	4200 J/(kg·K)
ciepło właściwe (lód)	2100 J/(kg·K)
ciepło właściwe (para wodna)	2000 J/(kg·K)



Wskazówka: Ciepło wymienione z układem zostało wykorzystane na skroplenie pary wodnej, ochłodzenie wody od 100°C do 0°C i zamianę całej wody w lód.

Wskazówka:

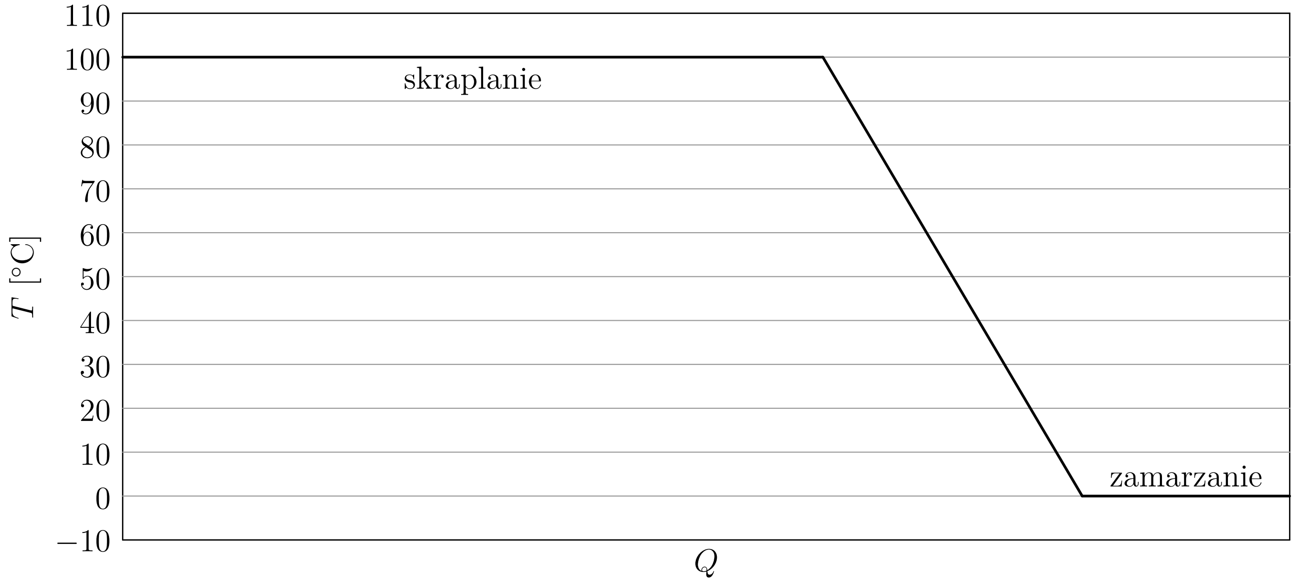
$$Q = c_s \cdot m + c_{ww} \cdot m \cdot (T_2 - T_1) + c_z \cdot m$$

Q - przekazane ciepło, c_s - ciepło skraplania, m - masa ciała, c_{ww} - ciepło właściwe wody, T_2 - temperatura skraplania, T_1 - temperatura zamarzania, c_z - ciepło zamarzania.

Wskazówka: Zamień ciepło wyrażone w dżulach na kalorie.

$$4{,}2\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{cal}$$

Odpowiedź:



Całkowita ilość ciepła wymienionego z otoczeniem, podczas wszystkich procesów ukazanych na rysunku, jest równa w przybliżeniu 1440 cal.

10 Zadanie – Granitowa płyta

Piotr Niezurawski, update: 2017-09-19, id: pl-ciepło-0002000, diff: 1

Powierzchnia płyty granitowej to $114 \cdot 10^3$ m^2, a jej grubość 3 m. Pod płytą panuje temperatura 60°C, a nad płytą −2°C. Oblicz ciepło przepływające przez płytę w trakcie jednej minuty, jeśli współczynnik przewodnictwa cieplnego granitu jest równy 2,41 W/(K · m).

Wskazówka: Strumień ciepła jest wprost proporcjonalny do różnicy temperatur, ΔT, i powierzchni, A, a odwrotnie proporcjonalny do grubości, h.

Wskazówka: Strumień ciepła: $H = k\,A\,\Delta T/h$

Wskazówka: Ciepło: $Q = Ht$, gdzie t to czas.

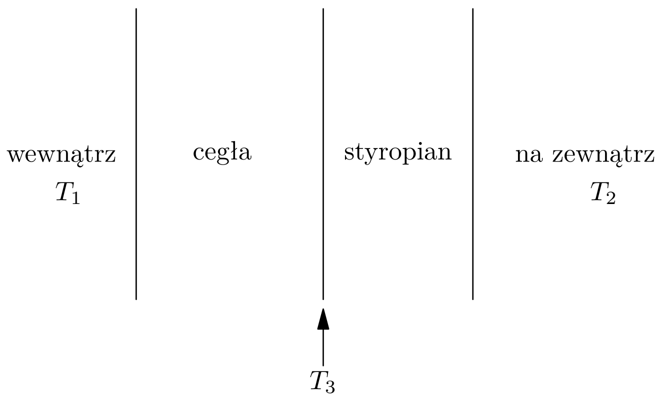
Odpowiedź: Ciepło: $Q \approx 341$ MJ.

11 Zadanie – Ceglany dom

Małgorzata Berajter, update: 2017-09-19, id: pl-ciepło-0002100, diff: 3

Ceglany dom ma ściany o grubości 30 cm. Wewnątrz domu utrzymywana jest stała temperatura 19°C. Temperatura powietrza na zewnątrz wynosi 15°C.
a) Oblicz, ile ciepła stracimy w ciągu sekundy przez jedną ze ścian o powierzchni 24 m^2. Przyjmij, że przewodnictwo cieplne cegły wynosi 0,8 W/(K·m).
b) Aby zapobiec utracie ciepła, ocieplono budynek z zewnątrz warstwą styropianu o grubości 30 cm. Ile teraz tracimy ciepła przez tę samą ścianę? Przyjmij, że przewodnictwo cieplne styropianu wynosi 0,04 W/(K·m).
c) Jaka temperatura panuje na złączu matariałów?

Wskazówka:



Wskazówka:

$$H = \frac{Q}{t} = k \cdot \frac{S}{L} \cdot (T_1 - T_2)$$

H - strumień ciepła, Q - przekazane ciepło, k - współczynnik przewodnictwa cieplnego, S - powierzchnia ciała, L - grubość ciała, T_1 - temperatura powietrza wewnątrz domu, T_2 - temperatura powietrza na zewnątrz.

Wskazówka:

$$H_1 \cdot \frac{L_1}{k_1} = S \cdot (T_1 - T_3)$$

$$H_2 \cdot \frac{L_2}{k_2} = S \cdot (T_3 - T_2)$$

W warunkach stacjonarnych strumienie ciepła przepływające przez obie warstwy muszą być równe, stąd:

$$H_1 = H_2 = H$$

Dodając dwa pierwsze równania stronami i porządkujac je, uzyskujemy:

$$H = S \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

H_1 - strumień ciepła płynący przez cegłę, H_2 - strumień ciepła płynący przez styropian, k_1 - współczynnik przewodnictwa cieplnego cegły, k_2 - współczynnik przewodnictwa cieplnego styropianu, L_1 - grubość cegły, L_2 - grubość styropianu, T_3 - temperatura panująca między cegłą a styropianem.

Odpowiedź: Przez ceglany mur tracimy około 256 J na sekundę, a przez mur ocieplony warstwą styropianu 12,2 J na sekundę. Temperatura między cegłą a styropianem jest równa 18,1°C.

12 Zadanie – Wydłużenie szyny

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-30, id: pl-ciepło-0003000, diff: 1

Oblicz, o ile zmieni się długość stalowej szyny po ogrzaniu jej do temperatury 13°C, jeśli jej długość przy temperaturze 8°C jest równa 14 m. Współczynnik rozszerzalności cieplnej użytej stali jest równy $0{,}99 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

Wskazówka: Wydłużenie jest wprost proporcjonalne do różnicy temperatur i początkowej długości.

Odpowiedź: Wydłużenie szyny: $\Delta l = \alpha\, \Delta T\, l \approx 0{,}693$ mm.

13 Zadanie – Zegar

Małgorzata Berajter, update: 2017-09-06, id: pl-ciepło-0003500, diff: 2

Pewien zegar, posiadający wahadło ze złota, odmierza dokładnie czas w temperaturze 19°C. Temperatura spadła do -2°C. O ile więcej wahnięć w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej złota wynosi $14 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Jeden koniec pręta ze złota zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt ze złota jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

Wskazówka: Okres wahadła w temperaturze początkowej wynosi 1 s.

Wskazówka:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

P - okres drgań, l - długość wahadła, g - przyspieszenie ziemskie.

Wskazówka: Zmiana długości pręta:

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta T \cdot l$$

ΔT - zmiana temeperatury, α - współczynnik rozszerzalności liniowej.

Wskazówka:

$$\Delta n = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha \Delta T)}} - 1$$

Δn - zmiana liczby wahnięć w trakcie 1 s.

Odpowiedź: Zegar wykona o 12,7 więcej wahnięć na dobę.

14 Zadanie – Spadająca kulka

Małgorzata Berajter, update: 2017-09-21, id: pl-ciepło-0003900, diff: 2

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z indu, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 41\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 298 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232
ind	233	28	156
ołów	128	25	328

Wskazówka: Energia kinetyczna, jaką kulka uzyska podczas ruchu, jest równa przekazanemu jej ciepłu.

Wskazówka: Aby ciało uległo stopieniu, najpierw musi zostać podgrzane do temperatury topnienia

$$Q_1 = c_w \cdot m \cdot \Delta T$$

A następnie otrzymać tyle ciepła, aby się stopić

$$Q_2 = c_t \cdot m$$

Q_1 - ciepło przekazane na ogrzanie ciała, c_w - ciepło właściwe ciała, m - masa ciała, ΔT - zmiana temperatury, Q_2 - ciepło przekazane na stopienie ciała, c_t - ciepło topnienia ciała.

Wskazówka:

$$v = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot (c_w \cdot \Delta T + c_t)}$$

v - prędkość kulki.

Odpowiedź: Kulka powinna spadać z prędkością około 5,34 m/s.

15 Zadanie – Spadająca kulka (1 wiersz tabeli)

Małgorzata Berajter, Piotr Nieżurawski (skrót tabeli), update: 2017-10-18, id: pl-ciepło-0003901, diff: 2

Z jaką prędkością powinna spadać kulka wykonana z cyny, aby przy uderzeniu o ziemię całkowicie uległa stopieniu? Zakładamy, że mimo odkształcenia pocisk pozostał w całości oraz że przy uderzeniu $n = 34\%$ energii zostało przekazane pociskowi w formie ciepła. Temperatura początkowa kulki wynosi 296 K. Pozostałe potrzebne dane zamieszczone są w tabeli poniżej.

substancja	ciepło właściwe [J/(kg·K)]	ciepło topnienia [kJ/kg]	temperatura topnienia [°C]
cyna	222	59	232

Wskazówka: Energia kinetyczna, jaką kulka uzyska podczas ruchu, jest równa przekazanemu jej ciepłu.

Wskazówka: Aby ciało uległo stopieniu, najpierw musi zostać podgrzane do temperatury topnienia

$$Q_1 = c_w \cdot m \cdot \Delta T$$

A następnie otrzymać tyle ciepła, aby się stopić

$$Q_2 = c_t \cdot m$$

Q_1 - ciepło przekazane na ogrzanie ciała, c_w - ciepło właściwe ciała, m - masa ciała, ΔT - zmiana temperatury, Q_2 - ciepło przekazane na stopienie ciała, c_t - ciepło topnienia ciała.

Wskazówka:

$$v = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot (c_w \cdot \Delta T + c_t)}$$

v - prędkość kulki.

Odpowiedź: Kulka powinna spadać z prędkością około 7,87 m/s.

16 Zadanie – Lodowiec

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-04, id: pl-ciepło-0004000, diff: 1

Oszacuj masę stopionego lodu z lodowca, który zsunął się i zatrzymał w dolinie. Początkowo lodowiec spoczywał na wysokości 326 m nad doliną i miał masę $14 \cdot 10^9$ kg. Załóż, że energia tracona przez zsuwający się lodowiec i spływającą wodę powstałą podczas topnienia lodowca powoduje dalsze topnienie lodu. Przyjmij ciepło topnienia lodu 334 kJ/kg. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Zmiana energii potencjalnej jest równa energii, która została zużyta na stopienie lodu.

Odpowiedź: Masa stopionego lodu to około $m_i = m_0\, g\, h/l \approx 130 \cdot 10^6$ kg, gdzie m_0 jest początkową masą lodowca, h zmianą wysokości lodowca, l ciepłem topnienia lodu, a g wartością przyśpieszenia ziemskiego. Oszacowanie to m.in. zakłada, że h jest zmianą wysokości środka masy lodowca razem z powstałą z niego wodą.

17 Zadanie – Promieniowanie kuli

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-ciepło-0010000, diff: 3

Gorąca kula o promieniu 7 cm, temperaturze powierzchni 900 K i względnej zdolności emisyjnej 0,75 wysyła energię w postaci promieniowania. Ile energii zaabsorbuje w ciągu 3 minut ciało doskonale czarne, które odbiera $3 \cdot 10^{-3}$ energii promieniowania wyemitowanego przez kulę? Stała Stefana-Boltzmanna wynosi $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2·K^4).

Wskazówka: Moc absorbowana przez ciało z otoczenia:

$$P = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot T^4$$

σ - stała Stefana-Boltzmana, ε - względna zdolność emisyjna, S - powierzchnia ciała, T - temperatura ciała.

Odpowiedź: Ciało odbierze około 928 J energii.

18 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-18, id: pl-dynamika-0000500, diff: 1

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $14{,}6 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 2,5 m/s. Druga część o masie $26{,}7 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 6,2 m/s.

Wskazówka: Jakie wielkości są zachowane?

Wskazówka: Którą z zachowanych wielkości można obliczyć na podstawie danych?

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3 v_3 = m_1 v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1 v_1 / v_3 \approx 5{,}89 \cdot 10^3$ kg.

19 Zadanie – Spadochroniarz

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0001000, diff: 1

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 137 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 7,3 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Wskazówka: Jakim ruchem względem Ziemi porusza się spadochroniarz? Jakie siły na niego działają i jaki związek zachodzi między nimi?

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 1340$ N.

20 Zadanie – Zderzenie wagonów

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0002000, diff: 1

Wagon kolejowy o masie 25 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 1,5 m/s, uderzył w stojący skład 4 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:
a) wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
b) o ile zmniejszyła się na skutek sczepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Zasada zachowania pędu (składowa pozioma) prowadzi do równania $mv_0 = (n+1)mv$, a więc po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}3$ m/s.

Odpowiedź:
a) Po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}3$ m/s.
b) Energia kinetyczna ruchu postepowego zmniejszyła się o $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n+1)v^2)/2 \approx 22{,}5$ kJ.

21 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0004000, diff: 2

Kula o masie 7 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 93 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 9 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Wskazówka: Pod jakim względnym kątem skierowane są dwie siły? Z jakiego twierdzenia dotyczącego trójkąta prostokątnego można skorzystać?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły to ok. 116 N. Z której zasady dynamiki należy skorzystać, by obliczyć przyśpieszenie kuli?

Wskazówka: Wartość przyśpieszenia to ok. 16,5 m/s^2. Przyśpieszenie to jest stałe. Jaką prędkość po czasie t osiągnie ciało poruszające się ze stałym przyśpieszeniem a?

Odpowiedź:
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 116 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 16{,}5$ m/s^2.
c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 149$ m/s.

22 Zadanie – Kula w cieczy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-29, id: pl-dynamika-0004500, diff: 1

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 1700 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 2900 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Wskazówka: Jakie siły działają na kulę?

Wskazówka: Jaka jest wartość wypadkowej siły?

Wskazówka: $V_2\, d_l\, g = V d_b\, g$

Wskazówka: $V_1 + V_2 = V$

Wskazówka: $V_1/V = 1 - V_2/V$

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}414$.

23 Zadanie – Ołów, lód i woda

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-dynamika-0004750, diff: 2

Kulę o masie 5,6 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,29 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10300 $\mathrm{kg/m^3}$, a gęstość wody 1000 $\mathrm{kg/m^3}$. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Wskazówka: Jak związana jest wysokość lustra wody w pojemniku z objętością wody i ciał w niej zanurzonych?

Wskazówka: Jaką objętość wody wypiera kula lodowa zawierająca kulę ołowianą?

Wskazówka: Jaką objętość wody wyprze ołowiana kula po stopieniu lodu?

Wskazówka: Ile wody powstanie ze stopionego lodu?

Wskazówka: Kula lodowa zawierająca kulę ołowianą wypiera objętość wody równą $(m_p + m_i)/\rho_w$, gdzie m_p jest masą ołowianej kuli, m_i masą lodu, a ρ_w gęstością wody.

Wskazówka: Po stopieniu lodu ołowiana kula opadnie na dno i będzie wypierać objętość wody równą własnej objętości, a więc m_p/ρ_p, gdzie ρ_p to gęstość użytego stopu ołowiu.

Wskazówka: Lód stopi się, a powstała woda będzie mieć objętość m_i/ρ_w, czyli taką samą, jaką wypierał lód.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -17{,}4\ \mathrm{mm}$$

A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

24 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0005000, diff: 1

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3800 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 2 kg, a każdy student może wykonać pracę 31000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 13 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Wskazówka: O ile zmieni się energia potencjalna cegieł?

Wskazówka: Ilu studentów potrzeba, by zmienić energię potencjalną cegieł o 968240 J? Zwróć uwagę na fakt, że część studenta nie może wnosić cegieł :-)

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 32.

25 Zadanie – Wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0006000, diff: 1

Kulkę o masie 60 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 3 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania możesz skorzystać?

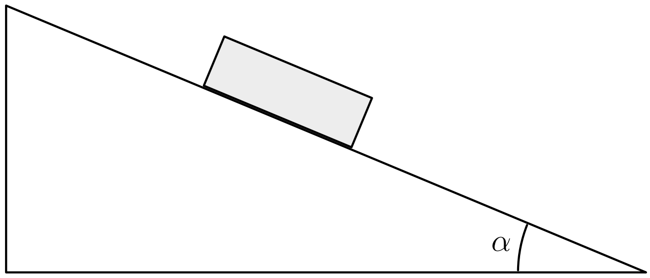
Wskazówka: Korzystając z równania opisującego zasadę zachowania energii mechanicznej, oblicz wartość prędkości kulki w najniższym punkcie jej toru.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 0,767 m/s.

26 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-29, id: pl-dynamika-0006450, diff: 1

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 35°$ zsuwa się cegła o masie 4,8 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

Wskazówka: Ile wynosi składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do równi?

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 5{,}62$ m/s^2, w dół równi.

27 Zadanie – Równia pochyła

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-29, id: pl-dynamika-0006500, diff: 1

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 34° zsuwa się cegła o masie 4,7 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

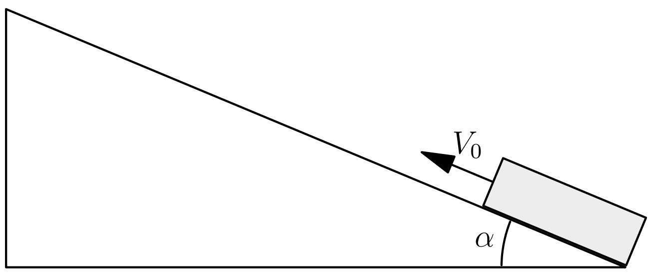
Wskazówka: Ile wynosi składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do równi?

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 5{,}48$ m/s^2, w dół równi.

28 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0006550, diff: 2

U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 768 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 8$ m/s wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 35°$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 1,4.
a) Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
b) Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
c) Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



Wskazówka: Jakie siły działają na klocek podczas jego ruchu?

Wskazówka: Wartość opóźnienia klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F_T + F_s}{m},$$

gdzie F_T to siła tarcia, a F_s to siła zsuwająca, czyli

$$a = \frac{mgf \cos\alpha + mg \sin\alpha}{m}.$$

Wskazówka: Zależność czasu od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym to

$$t = \frac{|\Delta V|}{a}.$$

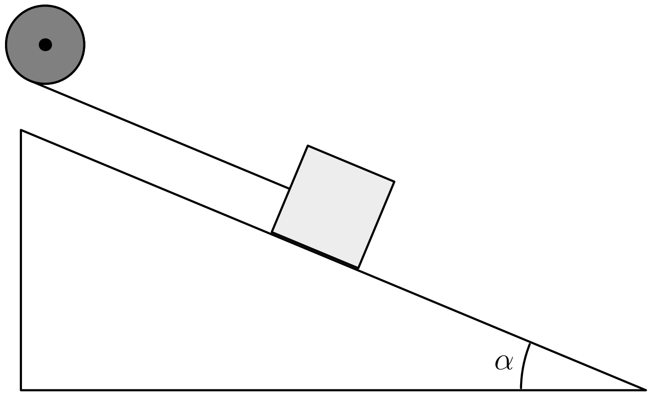
Wskazówka: Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym? **Albo:** Jak zmienia się energia całkowita klocka na skutek pracy siły tarcia?

Odpowiedź:
a) Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi $a = g(f\cos\alpha + \sin\alpha) \approx 16{,}9$ m/s^2, gdzie α to kąt nachylenia równi, a f to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
b) Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to $t = \frac{V_0}{a} \approx 0{,}48$ s.
c) Droga hamowania to $s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}V_0 t \approx 1{,}9$ m.

29 Zadanie – Sześcian na równi

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0006600, diff: 2

Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 40°$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 34 dag i o długości krawędzi 6 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 66 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześcianu znajduje się 40 cm nad stołem.
a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?
Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,42.



Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $\epsilon = \frac{M}{I}$, gdzie M to moment siły, a ϵ to przyśpieszenie kątowe. Moment bezwładności walca o promieniu R wynosi $I = \frac{1}{2}m_w R^2$.

Wskazówka: Przyśpieszenie kątowe walcowego bloku

$$\epsilon = \frac{a}{R},$$

gdzie a to przyśpieszenie liniowe sześcianu.

Wskazówka: Moment siły działający na walcowy blok

$$M = F_L R,$$

gdzie F_L to siła naciągu linki.

Wskazówka: Uwzględniając wszystkie siły działające na sześcian, otrzymujemy

$$a = \frac{m_s g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - F_L}{m_s}.$$

Wskazówka: Droga, jaką pokona sześcian, wynosi

$$s = \frac{h}{\sin\alpha},$$

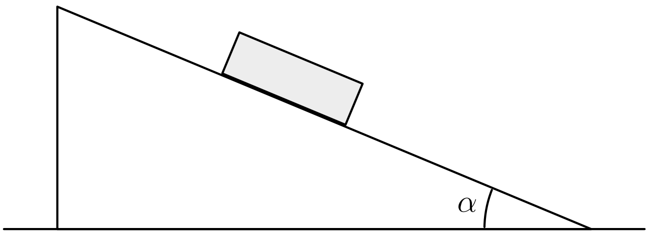
gdzie h to wysokość względem stołu, na jakiej początkowo znajduje się najniżej położona krawędź sześcianu.

Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie sześcianu o masie m_s wyniesie $a = m_s g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{m_s + \frac{1}{2}m_w} = 1{,}6\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię, a m_w to masa walca.
b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0{,}883$ s, gdzie s to droga jaką pokona sześcian.

30 Zadanie – Jeżdżąca równia

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0006700, diff: 3

Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie naczylenia $\alpha = 35°$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,2.



Wskazówka: Należy znaleźć minimalne przyśpieszenie równi (a_{min}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zsunie, oraz maksymalne przyśpieszenie równi (a_{max}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zacznie wsuwać.

Wskazówka: Jakie siły działają na klocek w nieinercjalnym układzie związanym z równią?

Wskazówka: Żądamy, by wypadkowa sił działających na klocek w układzie związanym z równią była równa zero, wówczas składowe sił wzdłuż równi muszą spełniać równanie

$$F_s - F_T - F_b\cos\alpha = mg\sin\alpha - f(mg\cos\alpha + F_b\sin\alpha) - F_b\cos\alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{min},$$

gdzie F_s to siła zsuwająca, F_T to siła tarcia, F_b to siła bezwładności, a m to masa klocka.

Wskazówka: Gdy szukamy a_{max} w układzie związanym z równią, siła tarcia jest skierowana w dół równi

$$F_s + F_T - F_b\cos\alpha = mg\sin\alpha + f(mg\cos\alpha + F_b\sin\alpha) - F_b\cos\alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{max}.$$

Odpowiedź: Wartość przyśpieszenia minimalnego wynosi $a_{min} = g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 4{,}3$ m/s^2, a wartość przyśpieszenia maksymalnego wynosi $a_{max} = g\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 10{,}3$ m/s^2, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię.

31 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-15, id: pl-dynamika-0006800, diff: 1

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 63 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 33 N na drodze 3,6 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 8 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Wskazówka: Jak praca wypadkowej siły związana jest ze zmianą szybkości ciała?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły działającej na łyżwiarza to $F - T$, gdzie F to wartość siły rozpędzającej, a T to wartość siły oporu.

Wskazówka: Praca wypadkowej siły na drodze S, czyli $W = (F - T)S$, jest równa zmianie energii kinetycznej łyżwiarza.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F - T)S/m} \approx 1{,}69$ m/s.

32 Zadanie – Pocisk

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0006850, diff: 2

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 47 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 40 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 636 m/s, a po przejściu przez drzewo zmiejszyła się do 516 m/s.
a) Ile wynosi praca sił oporu?
b) Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
c) Ile wynosi czas przebijania drzewa?
Załóż, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

Wskazówka: Zmiana enegii kinetycznej pocisku jest równa pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W.$$

Wskazówka: Praca siły tarcia

$$W = -F_o d,$$

gdzie F_o to wartość siły oporu drzewa.

Wskazówka: Wartość opóźnienia kuli

$$a = \frac{F_o}{m}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z zależności czasu od przyśpieszenia dla ruchu jednostajnie opóźnionego

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t.

Odpowiedź:
a) Praca sił oporu wynosi $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -3250$ J, gdzie V_1 i V_2 to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie m przed wbiciem w drzewo i po przebiciu drzewa.
b) Wartość opóźnienia kuli wynosi $a = \frac{W}{md} \approx 173$ km/s^2, gdzie d to średnica drzewa.
c) Czas wynosi $t = \frac{V_1 - V_2}{a} \approx 0{,}694$ ms.

33 Zadanie – Krążek hokejowy

Magda Gładka, update: 2017-09-20, id: pl-dynamika-0006900, diff: 2

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 5 m, a po zderzeniu przebył drogę 3 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,08. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

Wskazówka: Skorzystaj z zależności drogi od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2,$$

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t.
Albo: Skorzystaj z tego, że zmiana energii kinetycznej krążka o masie m to skutek pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W,$$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mas,$$

gdzie s to całkowita droga przebyta przez krążek, do momentu zatrzymania, a a to wartość opóźnienia krążka, równa wartości bezwzględnej przyśpieszenia.

Wskazówka: Wartość opóźnienia krążka

$$a = gf.$$

Odpowiedź: Szybkość początkowa wynosi $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 3{,}54$ m/s, gdzie s_1 to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę, s_2 to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a f to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

34 Zadanie – Droga hamowania

Magda Gładka, update: 2017-07-03, id: pl-dynamika-0006950, diff: 2

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 80 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszał się samochód?

Wskazówka: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnym

$$s_1 = V_0 t_1.$$

Wskazówka: Jak zmienia się energia kinetyczna na skutek pracy siły tarcia? **Albo:** Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym i jak powiązane są prędkość początkowa z czasem tego ruchu?

Wskazówka: Zmiana energii kinetycznej na skutek pracy siły tarcia

$$E_2 - E_1 = W,$$

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -mgfs_2,$$

$$s_2 = \frac{V_0^2}{2gf},$$

Albo: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$s_2 = V_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2},$$

$$a = gf,$$

$$t_2 = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie a to wartość opóźnienia samochodu, ΔV to zmiana prędkości w czasie t_2, gdzie t_2 to czas od momentu zadziałania hamulców do momentu zatrzymania samochodu.

Odpowiedź: Droga, jaką pokona samochód, wynosi $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 47{,}4$ m, gdzie V_0 to prędkość początkowa samochodu, t_1 to czas reakcji kierowcy, a f to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

35 Zadanie – Spacer z sankami

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-27, id: pl-dynamika-0007000, diff: 1

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 70 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 59 N i tworzy on kąt 35° z poziomem.

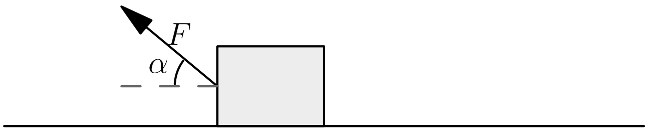
Wskazówka: Jak obliczyć składową poziomą siły?

Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 3380$ J.

36 Zadanie – Ukośna siła

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0007100, diff: 2

Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,8 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 5$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,09.
a) Oblicz przyśpieszenie klocka.
b) Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
c) Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



Wskazówka: Przyśpieszenie klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F\cos\alpha - f(mg - F\sin\alpha)}{m},$$

gdzie f to współczynnik tarcia klocka o podłogę.

Wskazówka: Związek między przyśpieszeniem a drogą w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie klocka wynosi $a \approx 3{,}94$ m/s^2.
b) Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi $s_{0\to5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 49{,}2$ m, gdzie t to czas.
c) Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi $s_3 = s_{0\to3} - s_{0\to2} \approx 9{,}84$ m.

37 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-19, id: pl-dynamika-0008000, diff: 1

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $2{,}25 \cdot 10^{24}$ kg i $4{,}69 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $405 \cdot 10^6$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Wskazówka: Jaka siła działa na planetę?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie i siła?

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 1{,}91 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

38 Zadanie – Samochód na moście

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0008050, diff: 2

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 72 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 70% ciężaru samochodu?

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym związanym z samochodem następujące siły muszą się równoważyć: siła grawitacji, siła odśrodkowa bezwładności i siła reakcji mostu na samochód.

Wskazówka: Siła reakcji mostu na auto F_r jest to wypadkowa dwóch sił: siły grawitacji F_g i siły odśrodkowej bezwładności F_o

$$F_r = F_g - F_o,$$
$$F_r = mg - \frac{mV^2}{R},$$

gdzie V to prędkość samochodu o masie m.

Odpowiedź: Prędkość wynosi $V = \sqrt{gR(1-k)} \approx 14{,}5$ m/s, gdzie $k = 70\%$, a R to promień krzywizny mostu.

39 Zadanie – Obrót Ziemi

Magda Gładka, update: 2017-10-01, id: pl-dynamika-0008060, diff: 2

Oblicz:
a) z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 76% siły grawitacji działającej na niego.
b) ile wynosi ciężar człowieka o masie 52 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym związanym z Ziemią na człowieka, stojącego na równiku, działa siła grawitacji, z którą jest on przyciągany i siła odśrodkowa bezwładności. Ciężar człowieka Q jest to wypadkowa tych dwóch sił

$$Q = G\frac{Mm}{R^2} - \frac{mV^2}{R},$$
$$Q = kmg,$$
$$g = \frac{GM}{R^2},$$

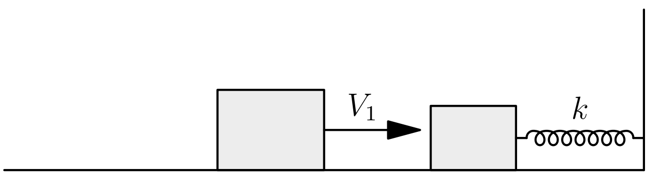
gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masa Ziemi i człowieka, a g to przyśpieszenie ziemskie wynikające tylko z oddziaływania grawitacyjnego.

Odpowiedź:
a) Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić $V = \sqrt{Rg(1-k)} \approx 3870$ m/s, gdzie R to promień Ziemi, a $k = 0{,}76$.
b) Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 508 N.

40 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0008100, diff: 2

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,8 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 153$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześcian o masie 1,2 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 4$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu

$$p_1 = p_2,$$

$$m_1V_1 = V_2(m_1 + m_2),$$

gdzie V_2 to prędkość zlepionych klocków po zderzeniu.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej - energia kinetyczna E_k zmienia się w energię potencjalną sprężystości E_{ps}

$$E_k = E_{ps},$$

$$\frac{(m_1 + m_2)V_2^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}.$$

Odpowiedź: Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}} = 27{,}4$ cm, gdzie m_1 to masa uderzającego klocka, a m_2 to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

41 Zadanie – Sprężyna

Magda Gładka, update: 2017-07-08, id: pl-dynamika-0008150, diff: 2

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,3 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 0,9 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 0,9 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 1,35 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Wskazówka: Jakie siły działają na zawieszony odważnik na sprężynie?

Wskazówka: Ciężarek zawieszony na sprężynie jest w równowadze, więc siła grawitacji F_g równoważy siłę sprężystości sprężyny F_s

$$F_g = F_s$$

$$m_1 g = k_1 x.$$

Wskazówka: Okres drgań wahadła sprężynowego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_1}}.$$

Wskazówka: W momencie, gdy łączymy szeregowo dwie takie same sprężyny, to współczynnik sprężystości nowej sprężyny można obliczyć z

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_2},$$

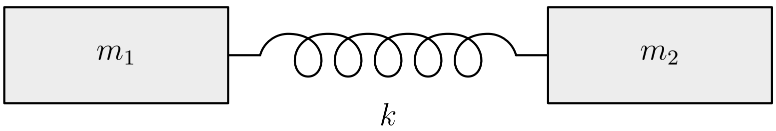
czyli $k_2 = 2k_1$.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}33$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0{,}285$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

42 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-25, id: pl-dynamika-0008200, diff: 1

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 59$ N/m, $m_1 = 2$ kg oraz $m_2 = 3$ kg.



Wskazówka: Opiszmy położenie ciężarków za pomocą współrzędnych x_1 oraz x_2, przyjmijmy zwrot osi X w prawo. Odstęp między nimi to $u \equiv x_2 - x_1$.

Wskazówka: Niech l będzie długością swobodną sprężyny. Siła sprężystości działająca na drugi ciężarek będzie równa: $-k(u - l)$.

Wskazówka: Równiania ruchu dla obu ciężarków:

$$m_1\ddot{x}_1 = +k(u - l)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(u - l)$$

Wskazówka: Po wyznaczeniu przyśpieszeń i odjęciu równań stronami otrzymujemy:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Ale

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{u}$$

Prowadzi to do równania oscylatora

$$\ddot{u} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 0{,}896$ s.

43 Zadanie – Ciężarek na lince

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-13, id: pl-dynamika-0008500, diff: 1

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,79 s zakreśla okrąg o promieniu 112 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 70 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Wskazówka: Jaka siła działa na ciężarek?

Wskazówka: Jaka wielkość jest zachowana w tym przypadku?

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu.

Wskazówka: Jak powiązana jest wartość prędkości z okresem w ruchu jednostajnym po okręgu?

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx 0{,}309$ s.

44 Zadanie – Tarcza

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0008600, diff: 2

Na środku tarczy o średnicy 3 m i masie 117 kg, znajduje się człowiek o masie 76 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,6 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu

$$L_2 = L_1,$$

$$2\pi f_2 I_1 + 2\pi f_2 I_2 = 2\pi f_1 I_2,$$

gdzie I_1 to moment bezwładności punktu materialnego, a I_2 to moment bezwładności walca, względem osi obrotu tarczy.

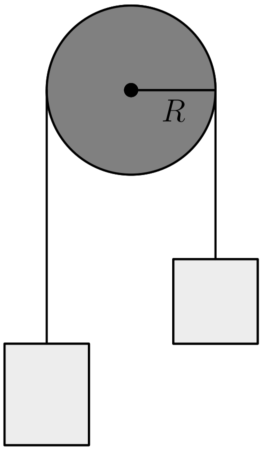
Wskazówka: Moment bezwładności punktu materialnego o masie m w odległości r od osi obrotu to mr^2, a walca o masie M i promieniu R to $\frac{1}{2}MR^2$.

Odpowiedź: Częstotliwość układu wyniesie $f_2 = f_1 \frac{Md^2}{8mr^2 + Md^2} = 0{,}248$ Hz, gdzie d to średnica tarczy o masie M, f_1 to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a r to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie m od osi obrotu.

45 Zadanie – Maszyna Atwooda

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0008700, diff: 2

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0{,}7$ m i masie 4 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszone są dwa obciążniki o masach 1,24 kg i 0,44 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomiń. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:
a) załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
b) załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



Wskazówka: Jakie siły działają na obciążniki?

Wskazówka: Gdy nić ślizga się po nieruchomym bloczku, przyśpieszenie dwóch obciążników połączonych nicią wynosi

$$a_1 = \frac{F_w}{m_c},$$

gdzie $m_c = m_1 + m_2$ to masa całkowita układu, a F_w to siła wypadkowa działająca na układ wzdłuż nici, przy czym $a_1 > 0$, gdy obciążnik m_1 przyśpiesza w dół

$$a_1 = \frac{F_{g1} - F_{g2} - F_L + F_L}{m_1 + m_2},$$

gdzie F_{g1} i F_{g2} to odpowiednio wartości siły grawitacji cięższego i lżejszego obciążnika, a F_L to siły naciągu linki, wynikające z trzeciej zasady dynamiki Netwona.

Wskazówka: Gdy uwzględniamy bezwładność bloczka układamy cztery równania

$$m_1 a_2 = m_1 g - F_{L1},$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + F_{L2},$$

$$\epsilon = \frac{M}{I} = \frac{(F_{L1} - F_{L2})R}{\frac{1}{2} m_3 R^2},$$

$$\epsilon = \frac{a_2}{R},$$

gdzie M to moment siły, I to moment bezwładności walca, a F_{L1} i F_{L2} to wartości siły naciągu nici.
Albo: Można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Przy założeniu, że w chwili początkowej środki mas nieruchomych obciążników były na tej samej wysokości, zmiana wysokości obciążnika o masie m_1 to $-h$, a obciążnika m_2 to $+h$

$$E_1 = E_2,$$

$$E_1 = 0,$$

$$E_2 = \frac{m_1 V^2}{2} - m_1 g h + \frac{m_2 V^2}{2} + m_2 g h + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

otrzymujemy wartość kwadratu prędkości obciążnika

$$V^2 = 2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3},$$

należy skorzystać z tego, że droga w ruchu jednostajnie przyśpieszonym, bez prędkości początkowej jest równa

$$h = \frac{V^2}{2a_2}.$$

Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie układu wynosi $a_1 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = 4{,}67$ m/s^2, gdzie m_1 i m_2 to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.
b) Przyśpieszenie układu wynosi $a_2 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_3} = 2{,}13$ m/s^2, gdzie m_3 to masa walca.

46 Zadanie – Naturalny satelita

Piotr Nieżurawski, update: 2017-04-25, id: pl-dynamika-0009000, diff: 2

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $84 \cdot 10^3$ kg okrążającego w czasie 35,3 h jednorodną planetę o masie $823 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Z jakim przyśpieszeniem porusza się satelita?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość satelity, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na satelitę?

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 60{,}8 \cdot 10^3$ km.

47 Zadanie – Zmiana orbity

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0009100, diff: 2

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 600 kg znajduje się w odległości 5800 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8000 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi 3,69 m/s^2, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

Wskazówka: Praca, jaką trzeba wykonać, jest równa przyrostowi energii mechanicznej satelity

$$E_2 - E_1 = W.$$

Wskazówka: Całkowita energia satelity to suma energii kinetycznej E_k i potencjalnej grawitacji E_p

$$E = E_k + E_p = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{h+R},$$

gdzie h to odległość sztucznego satelity od powierzchni Marsa

$$M = 0{,}1M_z,$$

gdzie M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym satelity siła odśrodkowa bezwładności F_{ob} równoważy siłę grawitacji F_g

$$F_{ob} = F_g,$$

$$\frac{mV^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2},$$

więc prędkość satelity na orbicie to

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}.$$

Wskazówka: Przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie jest równe

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

więc promień planety Mars to

$$R = \sqrt{\frac{GM}{g}}.$$

Odpowiedź: Praca wyniesie $W = \frac{GMm}{2}(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2}) = 257$ MJ, gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity, R to promień Marsa, a h_1 i h_2 to odległości satelity od powierzchni planety.

48 Zadanie – Prędkość ucieczki

Magda Gładka, update: 2017-07-02, id: pl-dynamika-0009180, diff: 2

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety $Z90$, stanowi 60% masy Ziemi, a jej promień wynosi 13300 km. Oblicz:
a) prędkość ucieczki ciała z planety $Z90$.
b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie $Z90$ do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 15 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

Wskazówka: Prędkość ucieczki można obliczyć z zasady zachowania energii mechanicznej. Ciało o masie m oddali się dowolnie daleko od planety, gdy ma odpowiednio dużą prędkość, tak by jego prędkość w nieskończoności była równa zero

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mV_\infty^2}{2} - \frac{GMm}{R_\infty},$$

ale

$$\frac{GMm}{R_\infty} \to 0 \text{ dla } R_\infty \to \infty,$$
$$\frac{mV_\infty^2}{2} \to 0 \text{ dla } V_\infty \to 0,$$

gdzie $M = 0{,}6M_z$, a M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: Aby znaleźć wysokość w rzucie pionowym w górę, można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Dla $h \ll R$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh,$$

gdzie

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Albo: Skorzystaj z zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$h = V_0t - \frac{1}{2}gt^2,$$
$$t = \frac{|\Delta V|}{g} = \frac{V_0}{g},$$

gdzie h to wysokość na jaką wzniesie się cało, V_0 to prędkość początkowa wyrzuconego pionowo ciała, ΔV to zmiana prędkości w czasie t, podczas wznoszenia się ciała.

Odpowiedź:
a) Prędkość ucieczki wyniesie $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 6$ km/s, gdzie G to stała grawitacji, R to promień planety $Z90$ o masie M.
b) Stosunek wysokości wyniesie $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 7{,}24$, gdzie h i h_z to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie $Z90$ i na Ziemi, a g i g_z to odpowiednio przyśpieszenie na planecie $Z90$ i na Ziemi.

49 Zadanie – Tunel średnicowy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0009250, diff: 2

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 3600 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $8{,}07 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 7100 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Wskazówka: Jak powiązane są praca siły działającej na ciało i zmiana energii kinetycznej tego ciała?

Wskazówka: Siła grawitacji wewnątrz tej planety, w odległości r od jej środka jest równa sile grawitacji pochodzącej tylko od masy wewnątrz kuli o promieniu r i środku w środku planety.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}\,' = -\int_R^r F(r')\, dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\, dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 7510 \text{ m/s}$$

50 Zadanie – Kosmiczny walc

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-30, id: pl-dynamika-0009500, diff: 2

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 39 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 80 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 760$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszają się te obiekty?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość obiektu, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na obiekty?

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_a M_a = r_b M_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 166 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 80{,}9 \cdot 10^3$ km, $d \approx 247 \cdot 10^3$ km.

51 Zadanie – Dwie gwiazdy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-dynamika-0009600, diff: 1

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 8 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 13 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 93$ km/s, $v_{B1} = 72$ km/s, $d_1 = 3 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 62$ km/s, $d_2 = 17 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Układ jest izolowany, więc zachowana jest całkowita energia.

Wskazówka: Zasadę zachowania energii dla dwóch ciał można zapisać następująco

$$E_{k\,A1} + E_{k\,B1} + E_{p\,A1-B1} = E_{k\,A2} + E_{k\,B2} + E_{p\,A2-B2}$$

Oznaczenia energii kinetycznych: $E_{k\,A1}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili początkowej; $E_{k\,A2}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili końcowej; analogicznie dla gwiazdy B. Oznaczenia energii potencjalnych: $E_{p\,A1-B1}$ energia potencjalna układu obu gwiazd w chwili początkowej; analogicznie dla chwili końcowej.

Wskazówka: Zasada zachowania energii z użyciem wielkości wymienionych w treści zadania oraz z poszukiwaną szybkością v_{A2}:

$$\frac{1}{2}M_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B1}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_1} = \frac{1}{2}M_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B2}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_2}$$

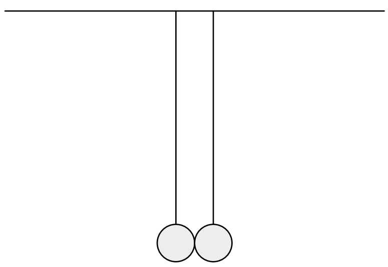
Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$
$$\approx 77{,}9 \text{ km/s}$$

52 Zadanie – Dwie kulki na linkach

Magda Gładka, update: 2017-04-15, id: pl-dynamika-0009700, diff: 2

Dwie stykające się małe kulki o masach 0,6 kg i 0,3 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 1,3 m. Lżejsza kulka zostaje odchylona w płaszczyźnie linek o kąt 55° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



Wskazówka: Wysokość h, na jaką lżejsza kulka będzie uniesiona, zależy od kąta odchylenia α i od długości linki l

$$h = l(1 - \cos\alpha).$$

Wskazówka: Jeżeli przyjmiemy, że początkowe położenie kulek odpowiada energii potencjalnej równej zero, to zasada zachowania energii mechanicznej dla lżejszej kulki wygląda następująco

$$E_2 = E_1,$$
$$\frac{mV^2}{2} = mgh,$$

gdzie V to prędkość lżejszej kulki tuż przed zderzeniem.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu, aby obliczyć prędkość zlepionych kulek po zderzeniu V_x

$$p_2 = p_1,$$
$$(m + M)V_x = mV.$$

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej dla zlepionych kulek

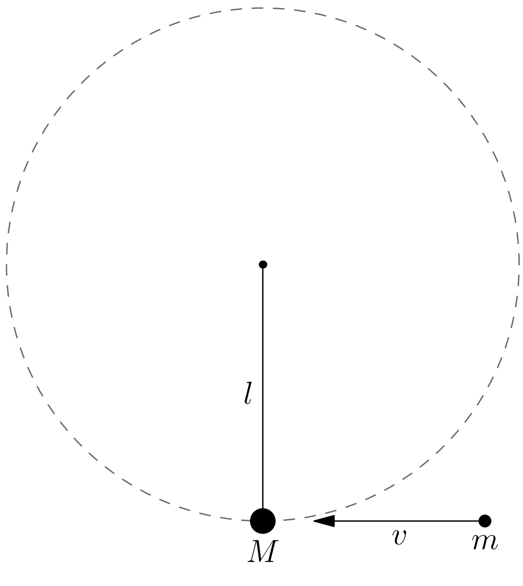
$$(m + M)gH = \frac{(m + M)V_x^2}{2}.$$

Odpowiedź: Wysokość wyniesie $H = \frac{m^2 l(1-\cos\alpha)}{(m+M)^2} = 6{,}2$ cm, gdzie m i M są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki, l to długość linki, a α to kąt odchylenia.

53 Zadanie – Postrzelone wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0010000, diff: 2

Metalowy ciężarek o masie $M = 338$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 50$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 42$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Pomiń opory ruchu bryły.



Wskazówka: Jaka będzie prędkość powstałej bryły tuż po zderzeniu i zlepienu się ciężarka i pocisku?

Wskazówka: Jaka będzie prędkość bryły w najwyższym punkcie okręgu?

Wskazówka: Jaki warunek musi być spełniony w najwyższym punkcie okręgu, by torem bryły był właśnie okrąg?

Wskazówka: Ile jest równa minimalna wartość prędkości spełniająca ten warunek?

Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

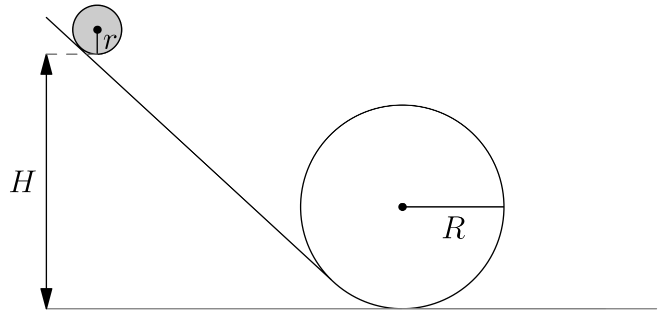
$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 44{,}8$ m/s.

54 Zadanie – Pętla śmierci

Magda Gładka, update: 2017-07-04, id: pl-dynamika-0010500, diff: 2

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0{,}08$ m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu $R = 0{,}6$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej.

Wskazówka: Uwzględnij energię kinetyczną ruchu obrotowego kuli o masie m i promieniu r. Moment bezwładności jednorodnej kuli $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej w układzie związanym z pętlą

$$mg(H + r) = mg(2R - r) + \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

$$\omega = \frac{V}{r},$$

gdzie V i ω to odpowiednio prędkość liniowa kuli i prędkość kątowa kuli w najwyższym punkcie pętli.

Wskazówka: Rozpatrując problem w układzie inercjalnym, w najwyższym punkcie pętli przyśpieszenie ziemskie pełni rolę przyśpieszenia dośrodkowego

$$\frac{mV^2}{R - r} = mg.$$

Odpowiedź: Minimalna wysokość wynosi $H = 2{,}7(R - r) = 1{,}4$ m.

55 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Piotr Nieżurawski, update: 2016-12-15, id: pl-dynamika-0020000, diff: 2

Proton porusza się z prędkością o wartości 2700 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 1,9 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg.

Wskazówka: Ile wynosi wartość działającej na proton siły?

Wskazówka: Na proton działa siła Lorentza o wartości $F = qvB \approx 82{,}2 \cdot 10^{-17}$ N.

Odpowiedź: Proton porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = F/m \approx 49{,}1 \cdot 10^{10}$ m/s^2.

56 Zadanie – Natężenie pola elektrycznego

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-16, id: pl-elektrodynamika-0001000, diff: 1

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 15 nm od jądra atomowego o liczbie atomowej 5. Opisz również kierunek i zwrot wektora natężenia pola elektrycznego względem jądra. Pomiń wpływ innych obiektów.

Wskazówka: Ile protonów znajduje się w jądrze?

Wskazówka: Jaki jest ładunek elektryczny protonu?

Odpowiedź: Wartość natężenia pola elektrycznego $|\vec{E}| = kne/r^2 \approx 32 \cdot 10^6$ N/C, gdzie n jest liczbą atomową, e ładunkiem protonu, a k stałą elektryczną. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest taki sam jak prosta przechodząca przez jądro i punkt, w którym określamy pole. Zwrot $\vec{E}$ jest *od jądra*.

57 Zadanie – Przyciągnięty elektron

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-19, id: pl-elektrodynamika-0002000, diff: 1

Oblicz pracę siły elektrostatycznej ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku $+3e$, gdzie e jest ładunkiem protonu, podczas przyciągania elektronu z odległości 4 mm do 7 nm. Przyjmij, że elektron na początku i na końcu procesu spoczywa. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Praca podczas przyciągania z odległości r_1 do r_2 jest równa $W_{1\to 2} = E_{p\,1} - E_{p\,2}$, gdzie $E_{p\,1}$ oznacza energię potencjalną układu jon-elektron na początku, a $E_{p\,2}$ na końcu ruchu.

Odpowiedź: Praca

$$W_{1\to 2} = -k\,n\,e\,e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \approx 0{,}617 \text{ eV} \approx 98{,}9 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

gdzie $n = +3$.

58 Zadanie – Praca nad ładunkiem w polu dipola elektrycznego

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-19, id: pl-elektrodynamika-0003500, diff: 1

Oblicz pracę, jaką wykonała zewnętrzna siła, przemieszczając proton po półokręgu w polu trwałego, nieruchomego dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego $4{,}4 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo proton spoczywał na symetralnej dipola w odległości 2,3 nm od tego dipola. Na końcu proton również spoczywał na symetralnej dipola, ale w odległości 4,1 nm od tego dipola i po jego drugiej stronie.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Ile pracy wykona zewnętrzna siła, przesuwając ładunek wzdłuż symetralnej dipola, jeśli na końcu i na początku ładunek spoczywa?
Albo:
Ile pracy wykona zewnętrzna siła, przesuwając jednostajnie ładunek wzdłuż symetralnej dipola?

Wskazówka: Jak jest skierowane natężenie pola elektrycznego na symetralnej dipola?

Odpowiedź: Praca zewnętrznej siły jest równa 0.

59 Zadanie – Obrót molekuły w polu innej cząsteczki

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-04, id: pl-elektrodynamika-0004000, diff: 1

Oblicz, ile energii zostanie przekazane otoczeniu, gdy molekuła posiadająca moment dipolowy o wartości $4{,}7 \cdot 10^{-30}$ Cm ustawi się tak, by jej moment dipolowy był skierowany przeciwnie do momentu dipolowego drugiej, unieruchomionej molekuły znajdującej się w odległości 1,2 nm. Wartość momentu dipolowego drugiej molekuły jest równa $17{,}7 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle i mają zgodne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł. Przyjmij, że molekuły są trwałymi dipolami punktowymi. Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych jest równa

$$E_p = k\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r}\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r}\right)\frac{1}{r^3}$$

gdzie k jest stałą elektryczną, $\vec{p}_i$ momentem dipolowym, a $\vec{r}$ wektorem względnego położenia dipoli. Korzystając z tego wzoru, uzasadnij, które jego składowe są istotne w rozważanym problemie. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Momenty dipolowe w początkowym i końcowym ustawieniu są prostopadłe do wektora względnego położenia, więc $\vec{p}_i \cdot \vec{r} = 0$. Istotny jest tylko składnik $k\,\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2/r^3$.

Odpowiedź: Energia przekazana otoczeniu

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB} = 2\,k\,p_1\,p_2/r^3 \approx 5400\ \mu\text{eV} \approx 8650 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$$

60 Zadanie – Cewka i magnes

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-26, id: pl-elektrodynamika-0008000, diff: 1

Układ składa się z wykonanej z miedzianego drutu, podłączonej tylko do amperomierza cewki oraz trwałego, silnego magnesu. Cewka i magnes mogą być niezależnie przesuwane wzdłuż prostej, która jest jednocześnie osią cewki i magnesu (bieguny magnesu leżą na tej prostej). W poniższej tabeli, w wymienionych trzech przypadkach opisz zachowanie wartości bezwzględnej natężenia prądu, $|I|$, płynącego przez cewkę (*maleje, rośnie, stała i różna od 0, równa 0*) oraz wypadkowe oddziaływanie elektromagnetyczne między cewką a magnesem (*przyciągają się, odpychają się, nie oddziałują*).

opis	$\boldsymbol{|I|}$	**oddziaływanie**
Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki		
Magnes spoczywa w środku nieruchomej cewki		
Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu		

Odpowiedź:

opis	$\boldsymbol{|I|}$	**oddziaływanie**
Magnes jest ze stałą prędkością oddalany od nieruchomej cewki	maleje	przyciągają się
Magnes spoczywa w środku nieruchomej cewki	równa 0	brak oddziaływania
Cewka jest ze stałą prędkością oddalana od nieruchomego magnesu	maleje	przyciągają się

61 Zadanie – Dźwięk w piaskowcu

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-07, id: pl-fale-0001000, diff: 1

Prędkość dźwięku w piaskowcu jest równa 2600 m/s. Oblicz okres oraz częstotliwość fali rozchodzącej się w płycie z tego piaskowca, jeśli długość fali jest równa 1,5 km.

Wskazówka: $\lambda = v\,T$

Wskazówka: $f = 1/T$

Odpowiedź: Okres fali $T = \lambda/v \approx 0{,}577$ s, a jej częstotliwość $f = 1/T \approx 1{,}73$ Hz.

62 Zadanie – Częstotliwość światła

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fale-0002000, diff: 1

Wiązka światła o długości fali 470 nm w próżni pada na powierzchnię szkła o bezwzględnym współczynniku załamania tego światła równym 1,48. Oblicz częstotliwość i długość fali tego światła w szkle. Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

Wskazówka:

$$\lambda = vT = v/f$$

λ – długość fali; v – prędkości fali; T – okres fali; f – częstotliwość fali.

Wskazówka:

$$v = c/n$$

c – prędkość światła w próżni; n – bezwzględny współczynnik załamania światła.

Odpowiedź: Częstotliwość fali w szkle $f_2 = f_1 = c/\lambda_1 \approx 638$ THz, gdzie f_1 i λ_1 to odpowiednio częstotliwość i długość fali w próżni. Długosc fali w szkle $\lambda_2 = v_2 T = cT/n = \lambda_1/n \approx 318$ nm, gdzie v_2 to prędkość fali w szkle.

63 Zadanie – Fala podłużna w pręcie

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-19, id: pl-fale-0004000, diff: 1

Oblicz prędkość rozchodzenia się podłużnej fali w długim, metalowym pręcie. Długość fali jest znacznie większa od średnicy pręta. Gęstość metalu, z którego wykonano pręt, jest równa 9100 kg/m^3, a moduł Younga tego metalu jest równy 216 GPa. Jeśli nie pamiętasz zależności prędkości fali od modułu Younga i gęstości, to w opisanym przypadku możesz ją uzyskać, rozważając wymiary tych wielkości.

Wskazówka: $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$

Wskazówka: $\mathrm{N} = \mathrm{kg \cdot m/s^2}$

Wskazówka: $\mathrm{Pa} = \mathrm{kg/(m \cdot s^2)}$

Wskazówka: $\mathrm{Pa/(kg/m^3)} = \mathrm{m^2/s^2}$

Odpowiedź: Prędkość fali jest równa $v = \sqrt{E/\rho} \approx 4870$ m/s.

64 Zadanie – Interferencja fal dźwiękowych

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fale-0005000, diff: 1

W jednorodnym ośrodku umieszczono dwa głośniki. Pierwszy głośnik znajduje się w odległości 14,65 m, a drugi w odległości 4,65 m od mikrofonu. Każdy z głośników oddzielnie wytwarzał w okolicy mikrofonu falę o takiej samej amplitudzie, a w obszarze między tym głośnikiem a mikrofonem zmiany ciśnienia można było w przybliżeniu opisać jako falę płaską o długości fali 250 cm. Następnie włączono oba głośniki. Drgają one w taki sam sposób, czyli w zgodnej fazie. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ, czy w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, nastąpi wzmocnienie czy osłabienie dźwięku w porównaniu z sytuacją, gdy był włączony tylko jeden z głośników.

Wskazówka:

$$|d_1 - d_2|/\lambda = ?$$

d_1 oraz d_2 – odległość od mikrofonu odpowiednio pierwszego oraz drugiego głośnika; λ – długość fali.

Odpowiedź: Iloczyn wartości bezwzględnej różnicy odległości i długości fali $|d_1 - d_2|/\lambda = 4$, a więc w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, fale spotykają się w zgodnej fazie – nastąpi wzmocnienie.

65 Zadanie – Czy to fala?

Piotr Nieżurawski, update: 2017-04-22, id: pl-fale-0008000, diff: 2

W otoczeniu strefy subdukcji wychylenie powierzchni Ziemi opisano następującą funkcją zależną od położenia x oraz czasu t:

$$f(x,t) = N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) + K$$

gdzie N, L, T, a, b, K są stałymi. Funkcja opisywała wychylenie dla $x \in (0, L)$ oraz $t \in (0, T)$. Sprawdź, czy ta funkcja spełnia równanie falowe, a więc czy opisywane wychylenie było falą.

Wskazówka:

$$v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Odpowiedź:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / L^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / T^2$$

Funkcja $f(x,t)$ spełnia równanie falowe, a więc opisuje falę.

66 Zadanie – Zderzenie z α

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-23, id: pl-fizyka-jądrowa-0001000, diff: 1

Z jądrem ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ zderza się cząstka α. Uzupełnij zapis tej reakcji, wpisując właściwe liczby lub symbole w 5 miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$${}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{\dots}_{\dots}\alpha \rightarrow {}^{242}_{96}\mathrm{Cm} + {}^{\dots}_{\dots}\dots$$

Wskazówka: Wykonaj bilans liczb masowych i atomowych.

Wskazówka: $\alpha = {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Odpowiedź:

$$^{239}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{242}_{96}\mathrm{Cm} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

67 Zadanie – Procesy jądrowe

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-23, id: pl-fizyka-jądrowa-0002000, diff: 1

Uzupełnij zapis reakcji jądrowej, wpisując właściwe liczby lub symbole w miejscach oznaczonych wielokropkiem. Symbol pierwiastka chemicznego oznacza tylko jądro atomowe, bez elektronów.

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{144}_{54}\mathrm{Xe} + \ldots{}^{\ldots}_{\ldots}\ldots$$

Wskazówka: Wykonaj bilans liczb masowych i atomowych.

Odpowiedź:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{144}_{54}\mathrm{Xe} + 2{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

68 Zadanie – Czas połowicznego rozpadu

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-07, id: pl-fizyka-jądrowa-0004000, diff: 1

W próbce po $800 \cdot 10^3$ latach liczba radioaktywnych jąder atomowych pewnego izotopu zmniejszyła się 32 razy. Oblicz czas połowicznego rozpadu tego izotopu.

Wskazówka: Po upływie czasu połowicznego rozpadu liczba radioaktywnych jąder danego izotopu zmniejsza się o (około) połowę.

Wskazówka: $2^n = \ldots$

Wskazówka: $2^5 = 32$.

Odpowiedź: Czas połowicznego rozpadu to około $T_{1/2} = t/n = 160 \cdot 10^3$ lat.

69 Zadanie – Wiek próbki

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-30, id: pl-fizyka-jądrowa-0004100, diff: 1

Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu jest równy $8{,}04 \cdot 10^6$ s. Oblicz wiek próbki, jeśli wiadomo, że 94% jąder tego izotopu w próbce już się rozpadło. Wynik podaj w tygodniach.

Wskazówka: Po upływie czasu połowicznego rozpadu, $T_{1/2}$, liczba radioaktywnych jąder danego izotopu zmniejsza się o (około) połowę.

Wskazówka: Liczba jąder izotopu jest równa $N = N_0/2^n$, gdzie $n = t/T_{1/2}$, N_0 jest początkową liczbą jąder izotopu, a t czasem.

Wskazówka: Część jąder, które się rozpadły, to $d = (N_0 - N)/N_0 = 1 - N/N_0 = 1 - 2^{-n}$.

Wskazówka: $n = -\log_2(1 - d)$.

Odpowiedź: Najbardziej prawdopodobny wiek próbki to około $t = n\,T_{1/2} \approx 54$ tygodnia.

70 Zadanie – Datowanie geologiczne

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-23, id: pl-fizyka-jądrowa-0005000, diff: 2

W pewnej próbce granitu znajduje się 0,963 mg argonu ^{40}Ar i 1,25 mg potasu ^{40}K. Wyznacz wiek tej próbki. Czas połowicznego rozpadu ^{40}K wynosi $1{,}25 \cdot 10^9$ lat. Wiadomo, że tylko ok. 11% rozpadających się jąder ^{40}K zmienia się w jądra ^{40}Ar. Przyjmij, że wszystkie jądra ^{40}Ar w próbce powstały z rozpadu ^{40}K i że poza tym rozpadem inne procesy nie wpływały na zmianę składu tych dwóch pierwiastków w próbce granitu.

Wskazówka: Po upływie czasu połowicznego rozpadu liczba – a więc i masa – radioaktywnych jąder danego izotopu zmniejsza się o (około) połowę.

Wskazówka: $m_{\mathrm{K}i} = m_{\mathrm{K}f} + m_{\mathrm{Ar}}/b = 1{,}25\ \mathrm{mg} + 0{,}963\ \mathrm{mg}/0{,}11$.

Wskazówka: $m_{\mathrm{K}f} = m_{\mathrm{K}i}/2^n$, gdzie $n = t/T_{1/2}$.

Wskazówka: $n = \log_2(m_{\mathrm{K}i}/m_{\mathrm{K}f}) = \log_2(1 + m_{\mathrm{Ar}}/(b \cdot m_{\mathrm{K}f}))$.

Odpowiedź: Najbardziej prawdopodobny wiek próbki $t = n \cdot T_{1/2} \approx 3{,}75 \cdot 10^9$ lat.

71 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-06, id: pl-fizyka-kwantowa-0001000, diff: 1

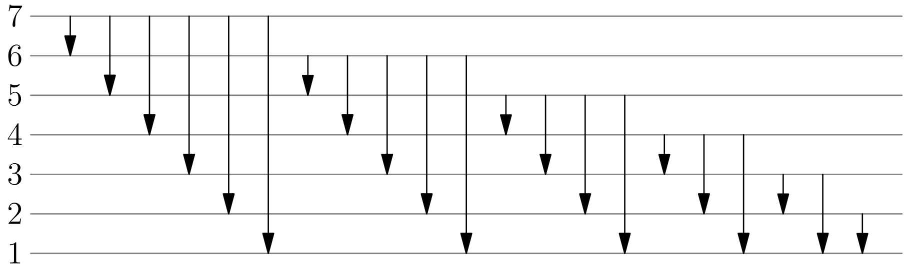
Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 7$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej n (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

Wskazówka: $n = 1, 2, ...$

Wskazówka: $E_\gamma = E_i - E_f = hf$.

Wskazówka: $E_n \propto -n^{-2}$.

Odpowiedź:
a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



b) Można zaobserwować 21 linii.
c) Przejście z poziomu 7 na poziom 6.

72 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-18, id: pl-fizyka-kwantowa-0002000, diff: 1

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej l i magnetycznej m określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.

Wskazówka: $l = 0, 1, ..., n - 1$.

Wskazówka: $m = -l, ..., 0, ..., +l$.

Odpowiedź: Możliwe stany to:
$l = 0$ z $m \in \{0\}$
$l = 1$ z $m \in \{-1, 0, 1\}$
$l = 2$ z $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$l = 3$ z $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$l = 4$ z $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

73 Zadanie – Liczba fotonów

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0003000, diff: 1

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 500 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 67% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 32 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s.

Wskazówka:

$$E_\gamma = hf$$

E_γ – energia fotonu; f – częstotliwość światła.

Wskazówka:

$$\lambda = c/f$$

λ – długość fali.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 3{,}98 \cdot 10^{-19}$ J.

Wskazówka:

$$E_i = E_{\text{abs}}/\varepsilon_{\text{eff}}$$

E_i – energia impulsu; E_{abs} – energia zaabsorbowana przez płytkę; ε_{eff} – efektywność pochłaniania energii przez płytkę.

Odpowiedź: Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\text{abs}}/(\varepsilon_{\text{eff}} E_\gamma) \approx 1200 \cdot 10^{14}$.

74 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0004000, diff: 1

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 230 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 2,64 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s $= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

Wskazówka:

$$E_\gamma = W + E_k$$

E_γ – energia fotonu; W – praca wyjścia; E_k – maksymalna energia kinetyczna elektronu.

Wskazówka:

$$E_\gamma = hf$$

f – częstotliwość światła.

Wskazówka:

$$\lambda = c/f$$

λ – długość fali światła.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 5{,}4$ eV.

Odpowiedź: Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 2{,}76$ eV.

75 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Andrzej Twardowski, Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-30, id: pl-fizyka-kwantowa-0004900, diff: 2

Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru w stanach:
a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi} a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm^{-3}. Funkcje określone są w układzie kartezjańskim XYZ, jądro spoczywa w środku tego układu, a r jest odległością od środka układu do punktu (x, y, z).

Wskazówka:

$$e^0 = 1$$

Wskazówka:

$$\Psi_{210} \propto z$$

Odpowiedź:
a)

$$|\Psi_{100}(0{,}0{,}0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150\ \mathrm{nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0{,}0{,}0)|^2 = 0\ \mathrm{nm}^{-3}$$

76 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-19, id: pl-fizyka-kwantowa-0005000, diff: 1

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną x. Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \left(x - \frac{L}{4}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$$

gdzie N oraz $L = 8$ nm są stałymi. Zmienna x przyjmuje wartości od 0 do $\frac{3}{4}L$. Wypisz wszystkie wartości x w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np. $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.

Wskazówka: Prawdopodobieństwo jest najmniejsze w pobliżu miejsc zerowych funkcji falowej.

Wskazówka: $\sin(n\pi) = 0$ oraz $\cos(\pi/2 + n\pi) = 0$ dla n całkowitego.

Odpowiedź: Wartości x, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: 0, $L/4$, $L/2$, a więc 0 nm, 2 nm, 4 nm.

77 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-11, id: pl-fizyka-kwantowa-0010100, diff: 3

Cząstka o masie m jest uwięziona w sześcianie o krawędzi L. Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.
a) Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.
b) Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
c) Dla cząstki znajdującej się w stanie

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(kx) \left(1 - 2\sqrt{7}\cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky)\sin(kz)e^{-i3\omega t}$$

gdzie $k \equiv \frac{\pi}{L}$ oraz $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$, wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

d) Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

Wskazówka. Dla dodatnich liczb całkowitych p i r

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{pr}$$

Wskazówka: Spróbuj rozwiązać równanie Schrödingera, zakładając rozwiązanie postaci

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,t)\,\psi(y,t)\,\psi(z,t)$$

gdzie

$$\psi(x,t) = \eta(x)\,e^{-i\omega_x t}$$

Wskazówka: Zapisz Ψ_s jako sumę stanów o określonej energii.
Albo: Skorzystaj z tego, że $\left\langle \Psi_{n_x n_y n_z} \middle| \Psi_s \right\rangle$ jest równe współczynnikowi przy $\Psi_{n_x n_y n_z}$ w rozkładzie Ψ_s na stany o określonej energii.

Odpowiedź: a) Dla dodatnich liczb całkowitych n_x, n_y, n_z unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t)\,\psi_{n_y}(y,t)\,\psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(n_x kx)e^{-in_x^2\omega t}$$

b) Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

c) Możliwe mierzone wartości energii dla stanu Ψ_s to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów Ψ_{111} oraz Ψ_{211}.
d) Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii $6\hbar\omega$ jest równe $\frac{7}{8} \approx 0{,}875$.

78 Zadanie – Jednostki masy

Joanna Drabarz, update: 2016-05-04, id: pl-gęstość-0001000, diff: 1

Przelicz kilogramy na gramy:
3 kg to .... g
59 kg to .... g

Przelicz tony na kilogramy:
4 t to .... kg
1001000 t to .... kg

Przelicz gramy na dekagramy:
320 g to .... dag
1010 g to .... dag

Wskazówka:
1 kilogram = 1000 gramów
1 tona to 1000 kilogramów
1 dekagram to 10 gramów

Odpowiedź:
Kilogramy na gramy:
3000 g
59000 g

Tony na kilogramy:
4000 kg
1001000000 kg

Gramy na dekagramy:
32 dag
101 dag

79 Zadanie – Gęstość

Joanna Drabarz, update: 2016-07-19, id: pl-gęstość-0002000, diff: 1

Pytanie 1. Jaką masę ma sześcienny klocek o krawędzi 7 cm, jeśli gęstość materiału, z którego został wykonany, wynosi 9 g/cm^3?
Pytanie 2. Jaką gęstość ma kula o objętości 1 litra, jeśli jej masa to 4 kg?
Pytanie 3. Jaką objętość musi mieć klocek wykonany z materiału o gęstości 28 kg/m^3, który ma masę 56 kg?

Wskazówka: Jeśli nie wiesz, jak wykonać obliczenia, to zwróć uwagę na jednostki.

Odpowiedź: Sześcienny klocek o krawędzi 7 cm i gęstości 9 g/cm^3 ma masę 3087 g.
Gęstość kuli o masie 4 kg i objętości 1 litra wynosi 4 kg/dm^3.
Objętość klocka wykonanego z materiału o gęstości 28 kg/m^3, który ma masę 56 kg wynosi 2 m^3.

80 Zadanie – Gęstość na Marsie

Joanna Drabarz, update: 2017-08-22, id: pl-gęstość-0003000-dpc, diff: 2

Gęstość pewnej skały na powierzchni Marsa to 3,86 g/cm^3. Łazik marsjański pobrał próbkę tej skały o objętości 15 cm^3. Jaką masę miała pobrana próbka skały?

Wskazówka: Jeśli nie wiesz, jak wykonać obliczenia, to zwróć uwagę na jednostki.

Odpowiedź: Masa próbki to 57,9 g.

81 Zadanie – Gęstość zaludnienia

Joanna Drabarz, update: 2016-07-04, id: pl-gęstość-0004000, diff: 1

Na pewnej planecie są trzy kontynenty, każdy w kształcie innej figury geometrycznej.
Pierwszy kontynent jest w kształcie kwadratu o boku 2000 km. Mieszka tu 40000000 osób.
Drugi kontynent to prostokąt o bokach 1000 km i 7000 km. Mieszka tu 35000000 osób.
Trzeci kontynent to trapez o wysokości 2000 km i podstawach o długości 500 km i 300 km. Mieszka na nim 6400000 osób.
Oblicz gęstość zaludnienia na każdym z kontynentów.

Odpowiedź: Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 10 osób na km^2.
Gęstość zaludnienia na prostokątnym kontynencie to 5 osób na km^2.
Gęstość zaludnienia na kwadratowym kontynencie to 8 osób na km^2.

82 Zadanie – Rura z przewężeniem

Piotr Nieżurawski, update: 2019-09-20, id: pl-hydrodynamika-0001000, diff: 1

Całym wnętrzem poziomo umieszczonej rury płynie woda. Rura posiada przewężenie, przez które woda przepływa z szybkością 58 cm/s. Przed przewężeniem woda płynie z szybkością 40 cm/s. Pomiń efekty związane z lepkością i ściśliwością. Przepływ jest laminarny. Gęstość wody jest równa 1000 kg/m^3.
a) Oblicz zmianę ciśnienia między dwoma punktami znajdującymi się na osi rury, z czego pierwszy punkt znajduje się przed przewężeniem, a drugi w przewężeniu.
b) Napisz, w którym z punktów ciśnienie jest większe.

Wskazówka: Skorzystaj z równania Bernoulliego.

Wskazówka: Ciecz przemieszcza się w poziomie.

Wskazówka: Ciśnienia p_i oraz szybkości v_i przed $(i = 1)$ i w przewężeniu $(i = 2)$ spełniają równanie

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

gdzie ρ jest gęstością wody.

Odpowiedź:
a) Zmiana ciśnienia $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) \approx -88{,}2$ Pa.
b) Ciśnienie jest większe przed przewężeniem.

83 Zadanie – Startujący samolot

Piotr Nieżurawski, update: 2016-07-09, id: pl-kinematyka-0000500-dpc, diff: 1

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyśpieszeniem 6,25 m/s^2. Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 7 s?

Wskazówka: $v = at$

Odpowiedź: 43,75 m/s

84 Zadanie – Kolumna wojskowa

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-kinematyka-0000600, diff: 1

Piesza kolumna wojskowa o długości 6 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 6 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 3 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 27 km/h.
a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?

b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.
Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

Wskazówka: Jaka jest wartość prędkości żołnierza jadącego na rowerze, względem kolumny wojskowej, gdy jedzie do dowódcy, a jaka gdy wraca?

Wskazówka: Podczas gdy rowerzysta jedzie do dowódcy, wartość jego prędkości względnej to różnica szybkości żołnierza i kolumny wojskowej, a gdy wraca od dowódcy, wartość jego prędkości względnej to suma tych szybkości.

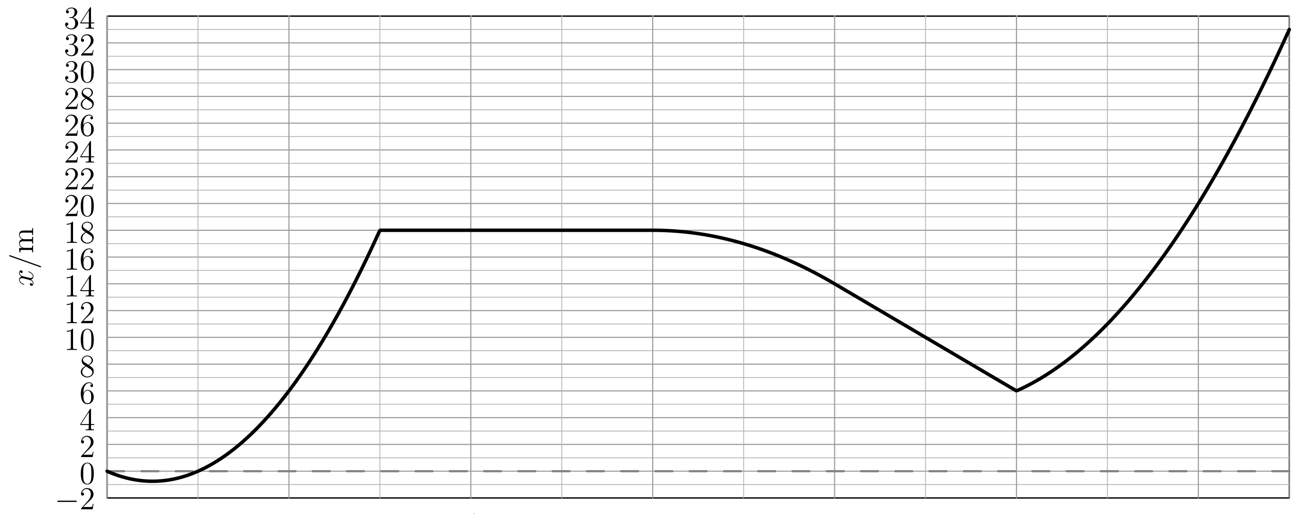
Wskazówka: Jaka jest zależność czasu od drogi w ruchu jednostajnym?

Odpowiedź:
a) Wykonanie zadania zajmie mu $t = l(\frac{1}{V_2-V_1} + \frac{1}{V_2+V_1}) + t_1 \approx 31{,}1$ min, gdzie l to długość kolumny wojskowej, V_1 to szybkość kolumny, t_1 to czas przekazywania informacji, a V_2 to szybkość żołnierza na rowerze.
b) W tym czasie pokona on drogę $s = lV_2(\frac{1}{V_2-V_1} + \frac{1}{V_1+V_2}) + t_1V_1 \approx 12{,}9$ km.

85 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-21, id: pl-kinematyka-0001000, diff: 2

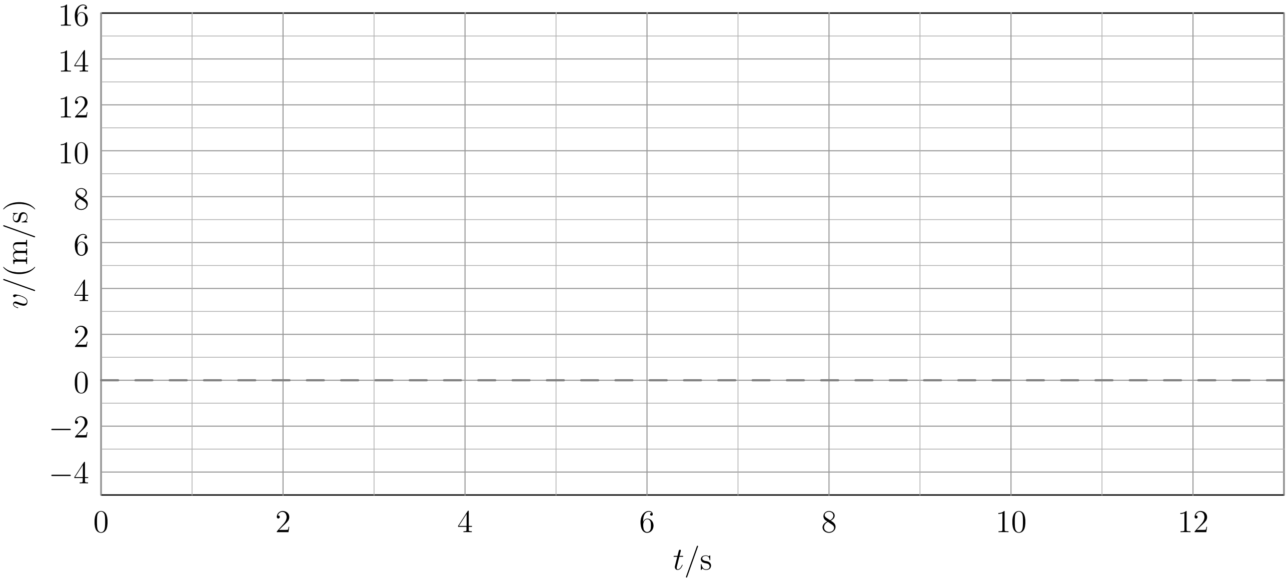
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,3[$	$]3,6[$	$]6,8[$	$]8,10[$	$]10,13]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	6	0	−2	0	4

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0,13]$ s.



Wskazówka: Jeśli v jest dodatnie, to punkt materialny porusza się zgodnie ze zwrotem osi X, a jeśli v jest ujemne, to punkt materialny porusza się w przeciwną stronę.

Wskazówka:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Wskazówka: Wygodniej będzie posłużyć się zmianami wielkości. Po danym interwale czasowym Δt mamy:

$$\Delta x = v_0\,\Delta t + \frac{1}{2}a\,\Delta t^2,$$

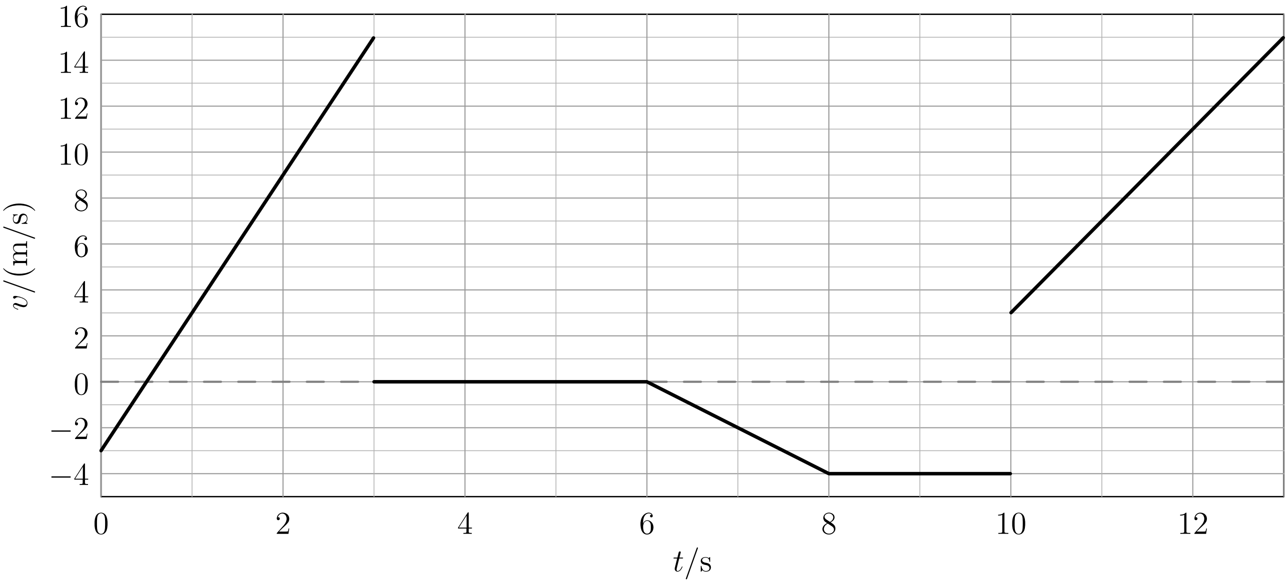
więc prędkość na początku przedziału to

$$v_0 = \Delta x/\Delta t - \frac{1}{2}a\,\Delta t$$

Wskazówka: Na końcu interwału czasowego Δt prędkość to

$$v_f = v_0 + a\,\Delta t = \Delta x/\Delta t + \frac{1}{2}a\,\Delta t$$

Odpowiedź: Poprawny wykres:



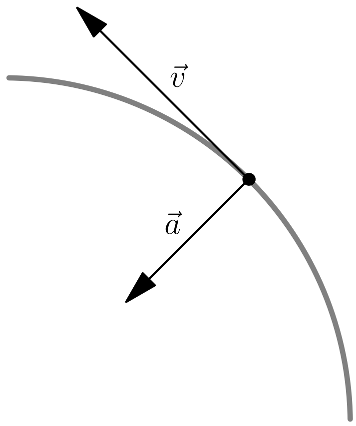
86 Zadanie – Na zakręcie

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-04, id: pl-kinematyka-0002000, diff: 2

Samochód jedzie po łuku o promieniu 55 m ze stałą wartością prędkości 79,2 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

Wskazówka: Wartość prędkości (szybkość) $v = 22$ m/s. Przyśpieszenie $a = v^2/R$.

Odpowiedź: a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.

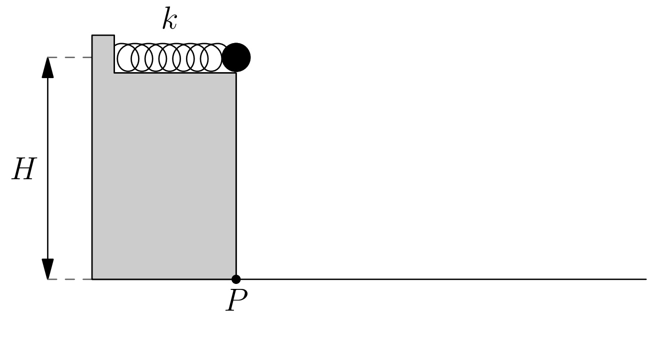


b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 8,8 m/s^2.

87 Zadanie – Rzut poziomy

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-kinematyka-0004000, diff: 2

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 15$ N/m, ściśnięto o 16 cm, naciskając ją kulką o masie równej 100 g. Jaka będzie odległość kulki od punktu P do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości $H = 3$ m nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominąć. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



Wskazówka: Energia potencjalna sprężystości sprężyny zostaje przekazana kulce o masie m w postaci energii kinetycznej

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mV^2}{2},$$

gdzie V to prędkość pozioma kulki.

Wskazówka: Czas spadania kulki

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Wskazówka: Zasięg w rzucie poziomym

$$z = Vt.$$

Odpowiedź: Zasięg rzutu kulki o masie m wyniesie $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 153$ cm, gdzie x to ściśnięcie sprężyny.

88 Zadanie – Strzelec

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-kinematyka-0004500, diff: 1

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 260 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 975 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Wskazówka: Jaką drogę w poziomie przebył pocisk?

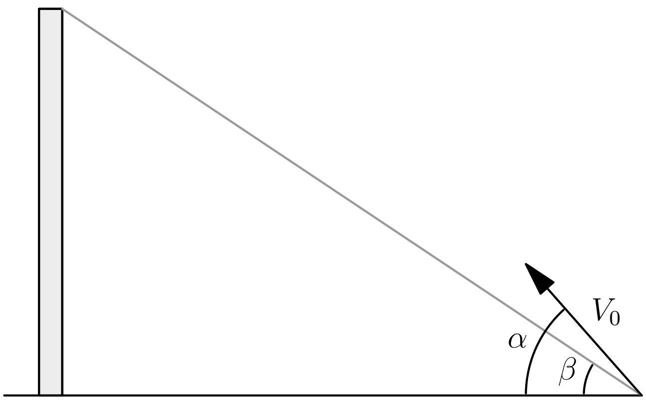
Wskazówka: Ile czasu pocisk leciał?

Odpowiedź: Pocisk opadł o około 35 cm.

89 Zadanie – Rzut ukośny

Magda Gładka, update: 2017-07-09, id: pl-kinematyka-0005000, diff: 2

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 60°$ do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 13 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem $\beta = 40°$ względem powierzchni ziemi. Jaką wartość prędkości V_0 powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.



Wskazówka: Widać, że $\operatorname{tg}\beta$ to stosunek wysokości słupa do odległości jego podstawy od miejsca wyrzutu piłki

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\beta.$$

Wskazówka: Przyjmując za początek ruchu początek kartezjańskiego układu współrzędnych, położenie ciała po czasie t określają równania (w pionie mamy do czynienia z ruchem jednostajnie opóźnionym, a w poziomie z jednostajnym)

$$y = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x = V_{0x}t,$$

gdzie V_{0y} to składowa pionowa prędkości V_0, a V_{0x} to składowa pozioma prędkości V_0

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha,$$

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha.$$

Odpowiedź: Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan\alpha - \tan\beta)\cos^2\alpha\tan\beta}} \approx 18{,}4 \text{ m/s},$$

gdzie y to wysokość słupa.

90 Zadanie – Przecięcie torów?

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-kinematyka-0009000, diff: 2

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

Wskazówka: Jaka musi być wartość prędkości v ciężarka, by poruszał się on po okręgu o promieniu l w okolicy najwyższego punktu tego okręgu?

Wskazówka: Wartość prędkości w najwyższym punkcie okręgu musi spełniać warunek $v^2/l \geq g$, czyli przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe lub równe przyśpieszeniu grawitacyjnemu. Sznurek jest wtedy rozciągnięty. Łatwo wykazać, że jeśli spełniony jest ten warunek w najwyższym punkcie, to ciężarek będzie się poruszał po okręgu. Wystarczy wykazać, że sznurek będzie zawsze napięty poniżej najwyższego punktu, a to oznacza, że przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe niż składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka. Z zasady zachowania energii wynika, że na mniejszej wysokości prędkość v' ciężarka będzie większa niż v. Z geometrii wynika, że składowa g_l przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka będzie mniejsza niż g. A więc jeśli $v^2/l \geq g$, to $v'^2/l > g_l$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań: okręgu i paraboli, po której poruszałby się cieżarek, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu.

Wskazówka: Równanie okręgu: $x^2 + y^2 = l^2$.

Wskazówka: Równanie ruchu, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu: $x = vt$ oraz $y = l - gt^2/2$.

Wskazówka: Równanie paraboli: jeśli $v \neq 0$, to $t = x/v$ i otrzymujemy równanie toru $y = l - \frac{g}{2v^2}x^2$.

Odpowiedź:
I sposób – graniczna wartość v.
Minimalna wartość prędkości v_m spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l-y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l-y) + y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l-y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości v_m, gdyż dla większych wartości prędkości v parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości v_m. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.
II sposób – równanie na y.
Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l-y)$. Z równania okręgu, $A(l-y) + y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l-y)(l+y-A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0, l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A - l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości y dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l, l]$. Stąd $A \in [0, 2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.
III sposób – równanie na x.
Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$, istnieje, jeśli $2lB - 1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

91 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-27, id: pl-kinematyka-0010000, diff: 2

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 1{,}7$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A\left(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\right)$$

gdzie $A = 5{,}7$ m, $\lambda = 0{,}6$ s^{-1} oraz $t_0 = 0{,}5$ s.

Wskazówka: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\lambda\, e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$v(t_1) \approx 1{,}67 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -A\,\lambda^2 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$a(t_1) \approx -0{,}999 \text{ m/s}^2$$

92 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 2D

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-15, id: pl-kinematyka-0010050, diff: 2

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ A e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

v_0	A	λ	ω
2 m/s	3 m	0,2 s^{-1}	4 s^{-1}

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 4$ s.

Wskazówka: $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ A e^{-\lambda t}(-\lambda \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ A e^{-\lambda t}((\lambda^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\lambda\omega \cos(\omega t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\lambda^2 + \omega^2) y - 2\lambda v_y \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 2 \\ -5{,}09 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 8{,}26 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

93 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-23, id: pl-kinematyka-0010100, diff: 2

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
$2\ \mathrm{m/s^2}$	$-2\ \mathrm{m/s}$	$16\ \mathrm{m}$	$-4\ \mathrm{m/s}$	$-19\ \mathrm{m}$	$-2\ \mathrm{m/s^3}$	$3\ \mathrm{m/s^2}$	$-5\ \mathrm{m/s}$

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 5$ s.

Wskazówka: $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}b_z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2f_x t + g_x \\ g_y \\ 3e_z t^2 + 2f_z t + g_z \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} 2f_x \\ 0 \\ 6e_z t + 2f_z \end{bmatrix}$$

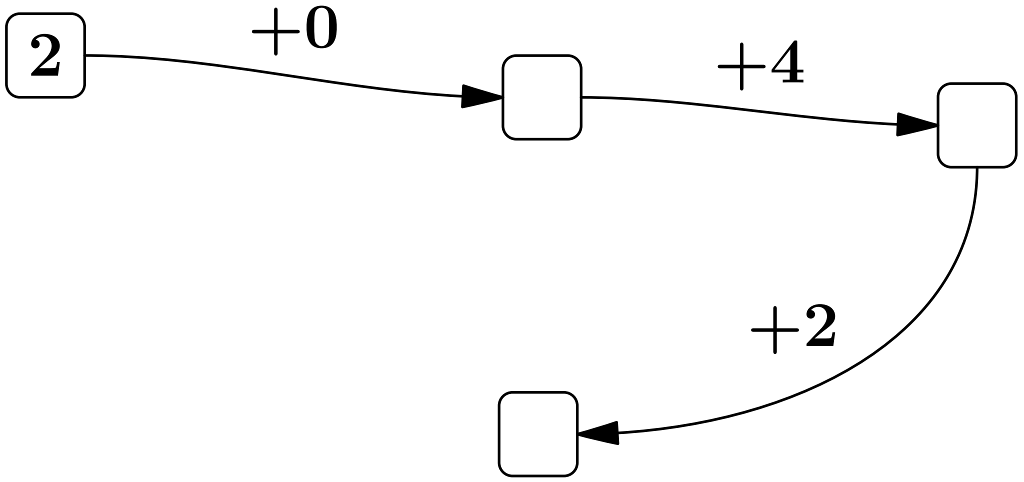
Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 \\ -125 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -54 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

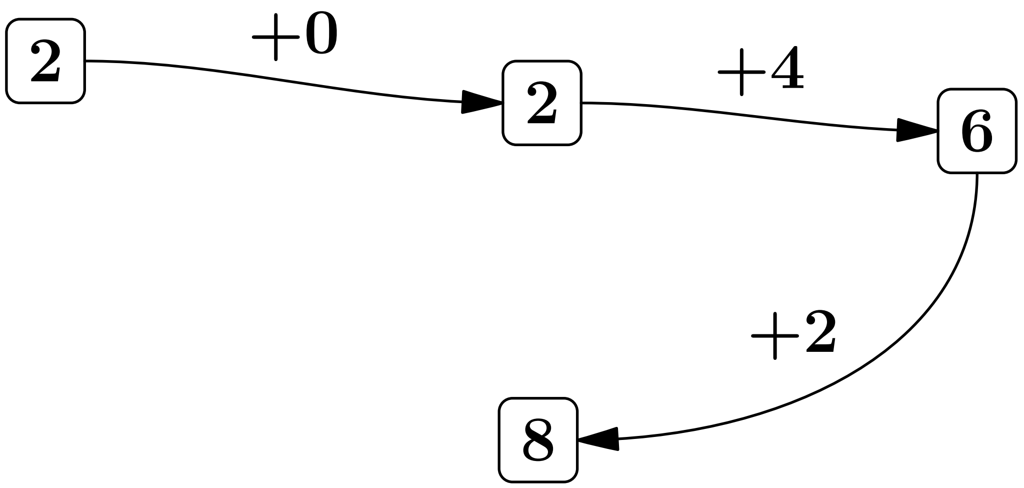
94 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie, 0–10

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-30, id: pl-liczby-0000100, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



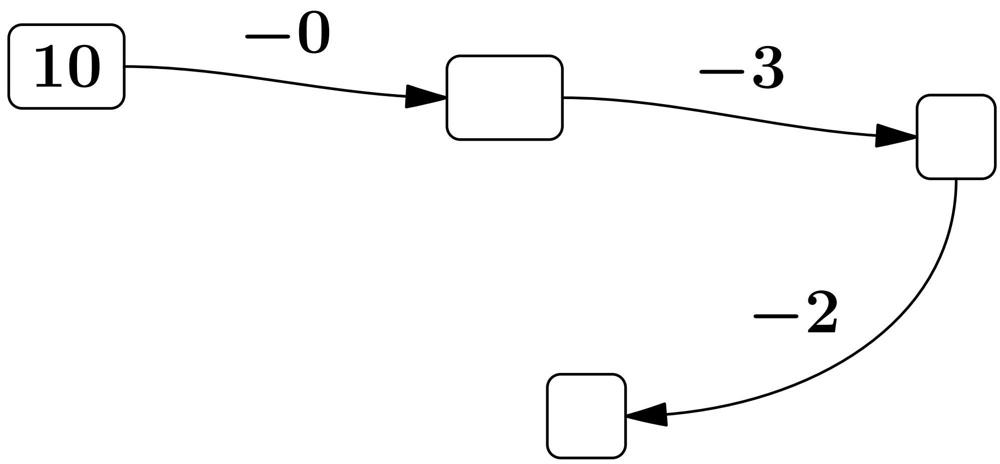
Odpowiedź:



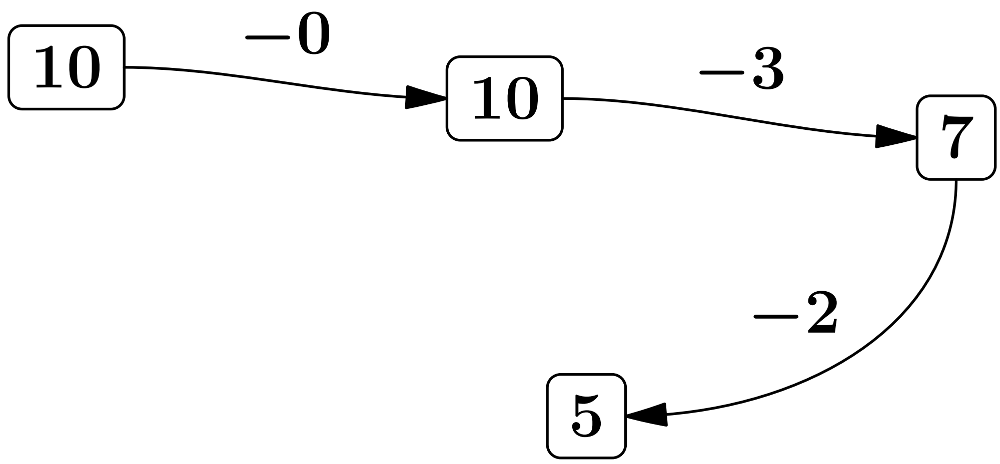
95 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie, 0–10

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000101, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



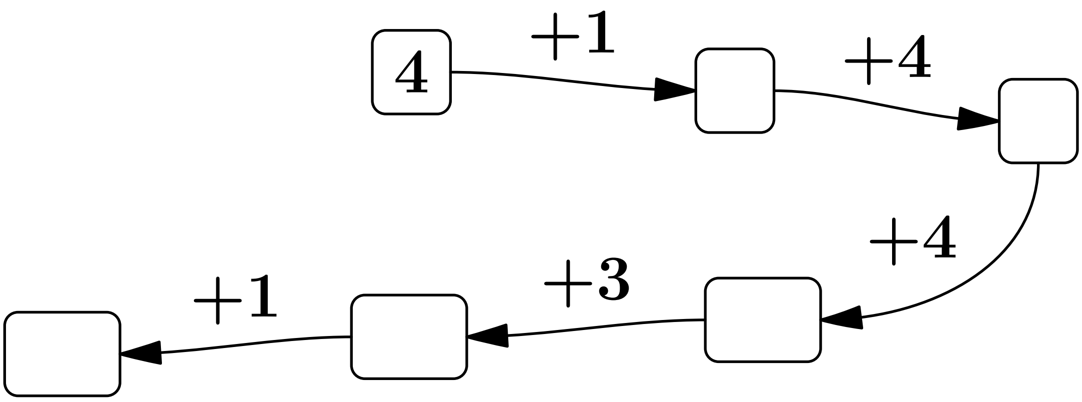
Odpowiedź:



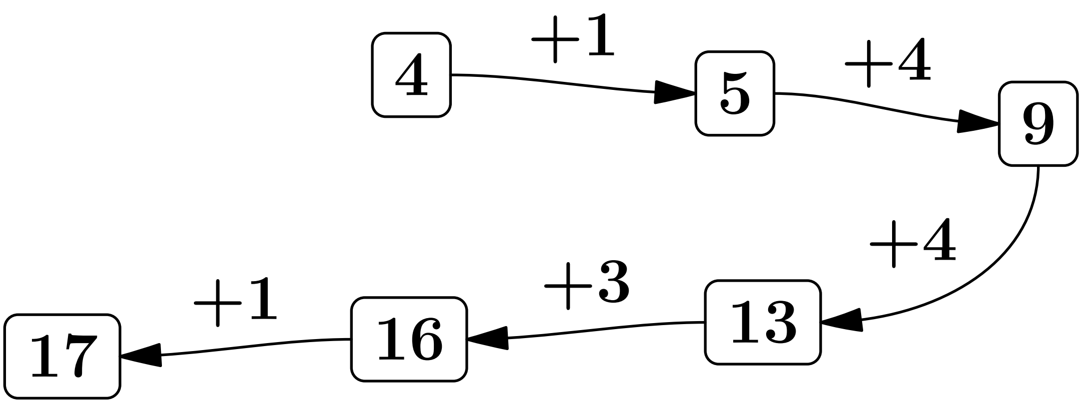
96 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 0–4, 0–20

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-31, id: pl-liczby-0000105, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



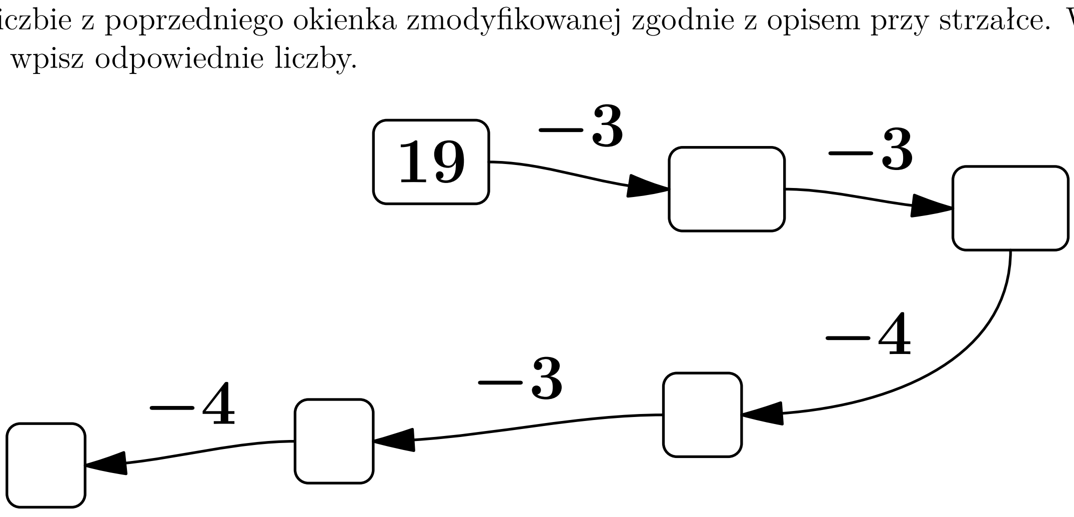
Odpowiedź:



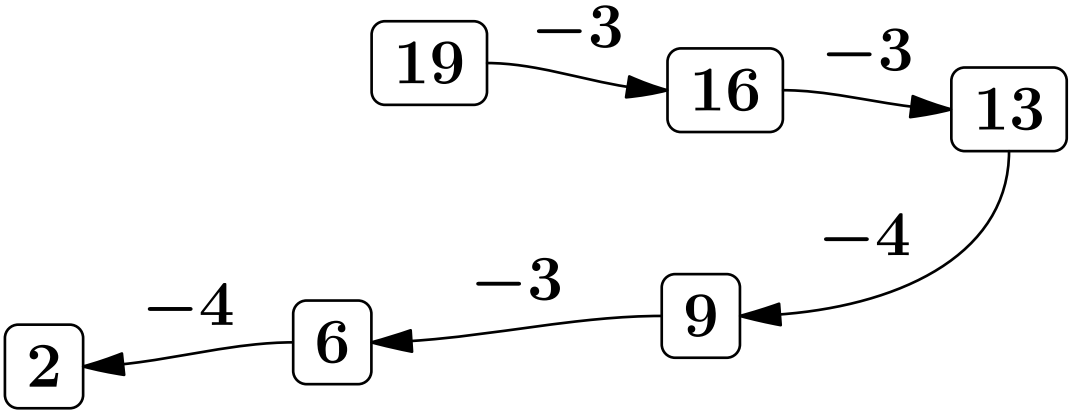
97 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 0–4, 0–20

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000106, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



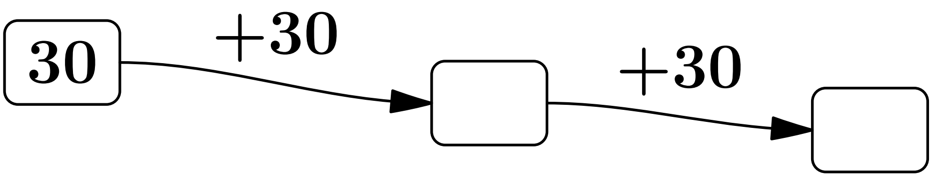
Odpowiedź:



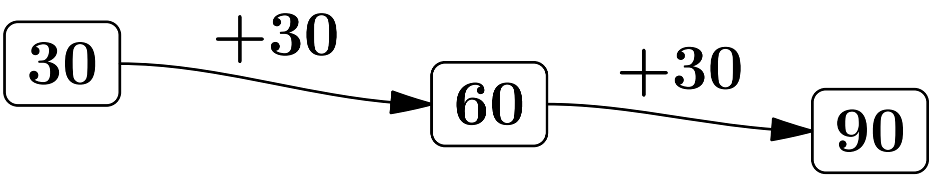
98 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie wielokrotności 10, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-31, id: pl-liczby-0000120, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



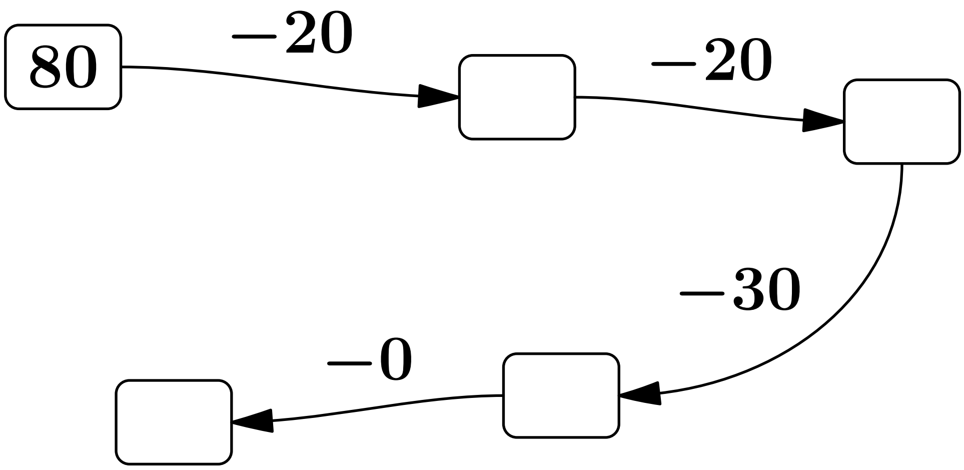
Odpowiedź:



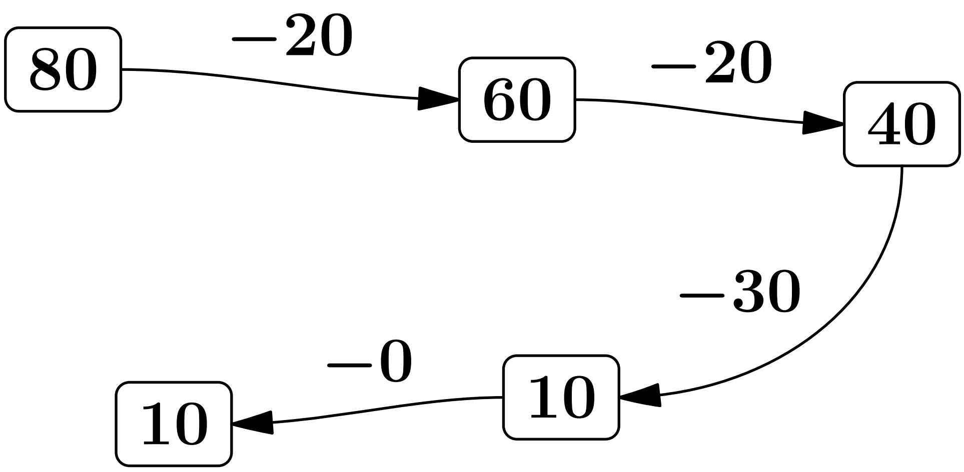
99 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie wielokrotności 10, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000121, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



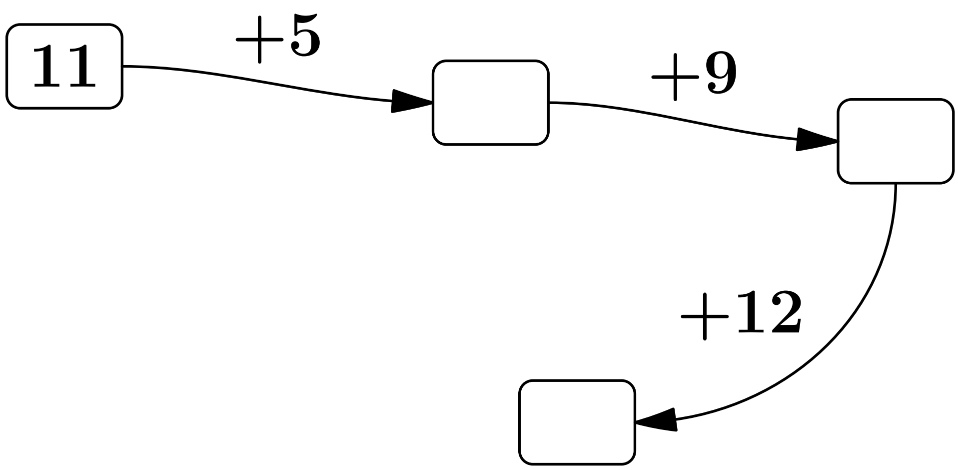
Odpowiedź:



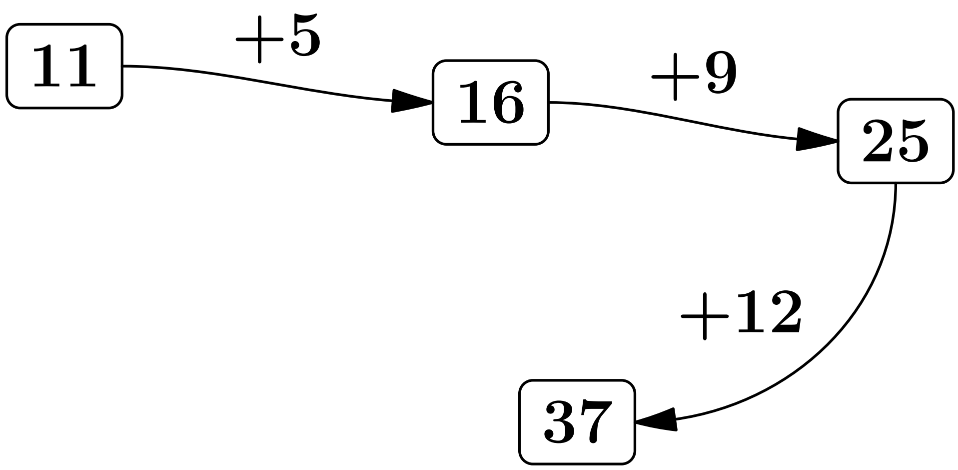
100 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–12, 0–45

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000125, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



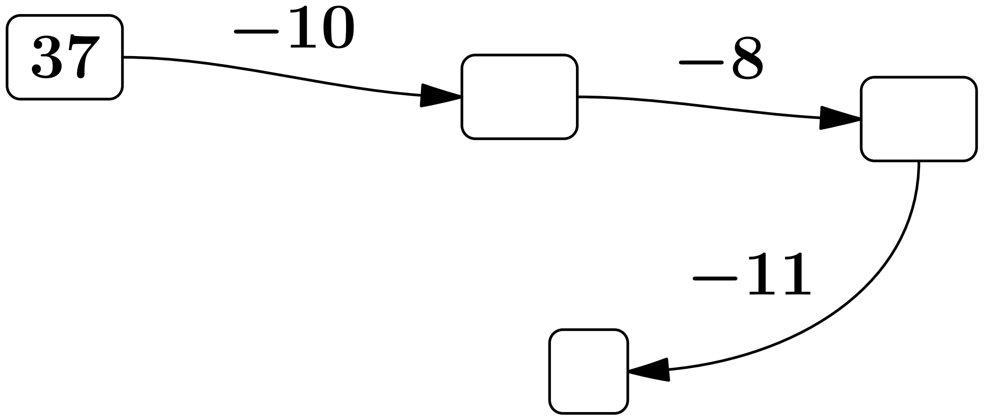
Odpowiedź:



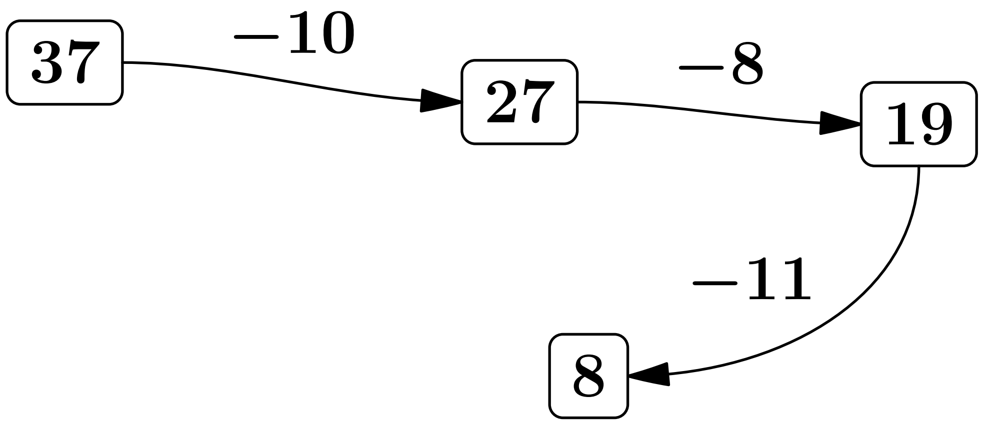
101 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–12, 0–45

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000126, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



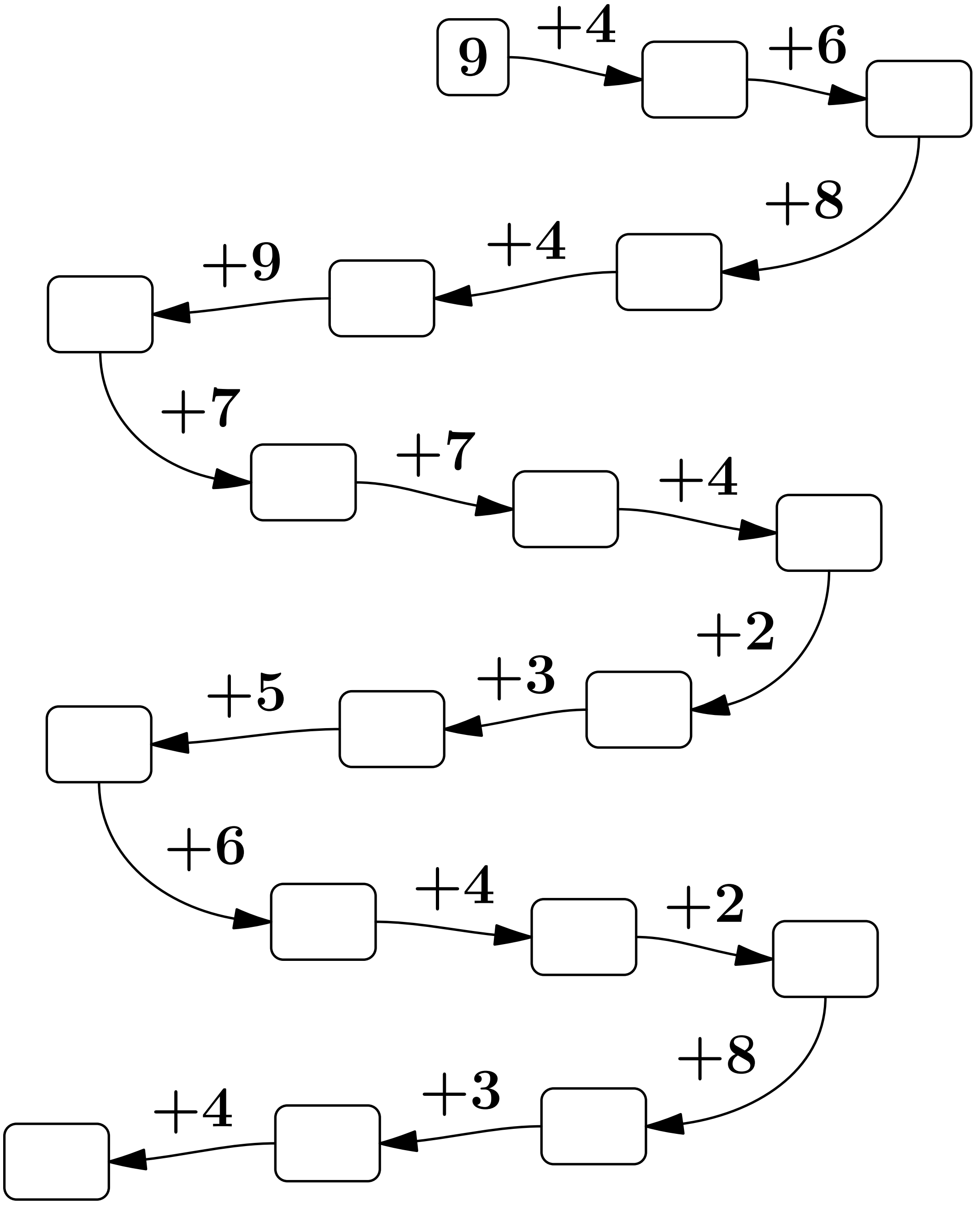
Odpowiedź:



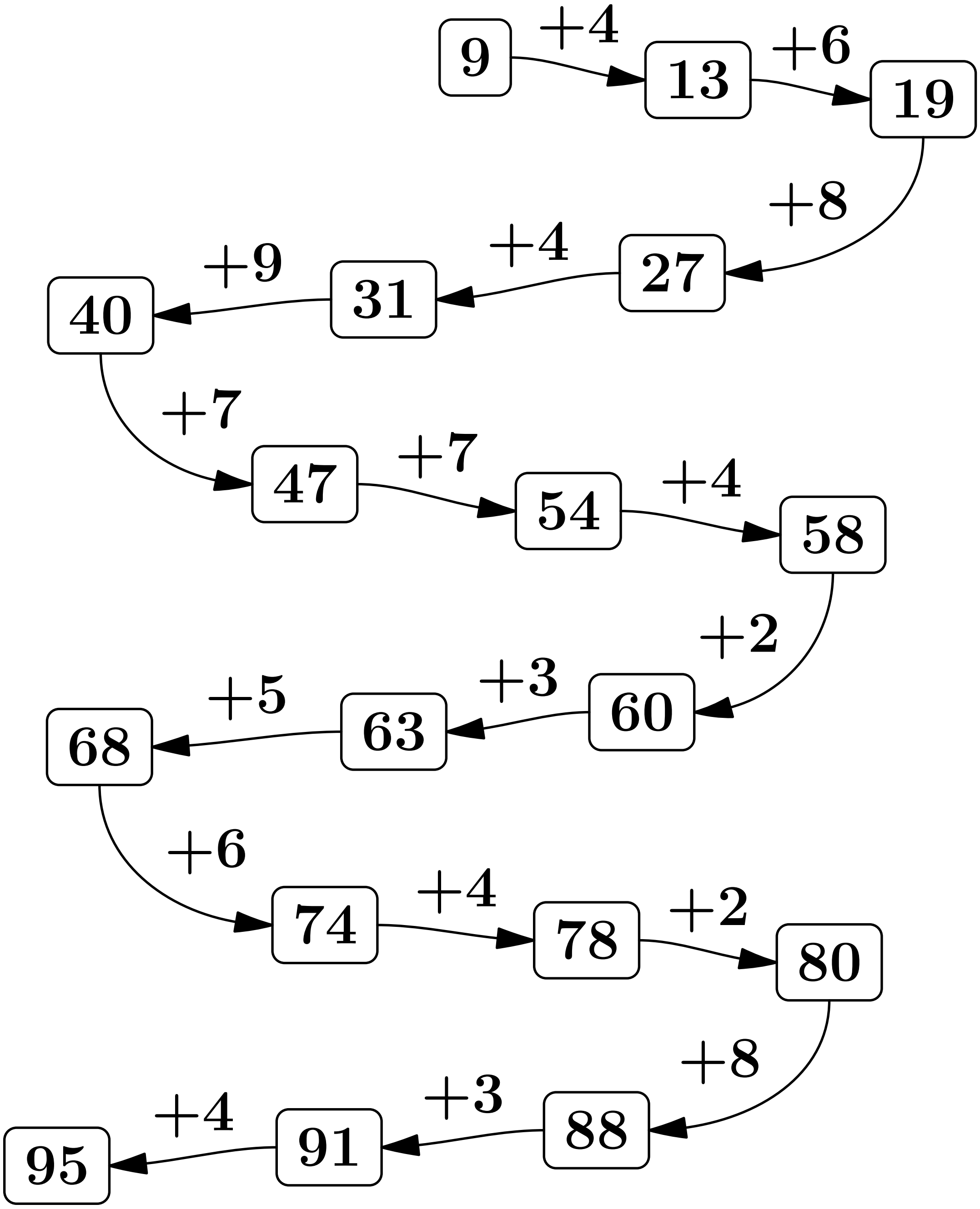
102 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 2–9, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000140, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



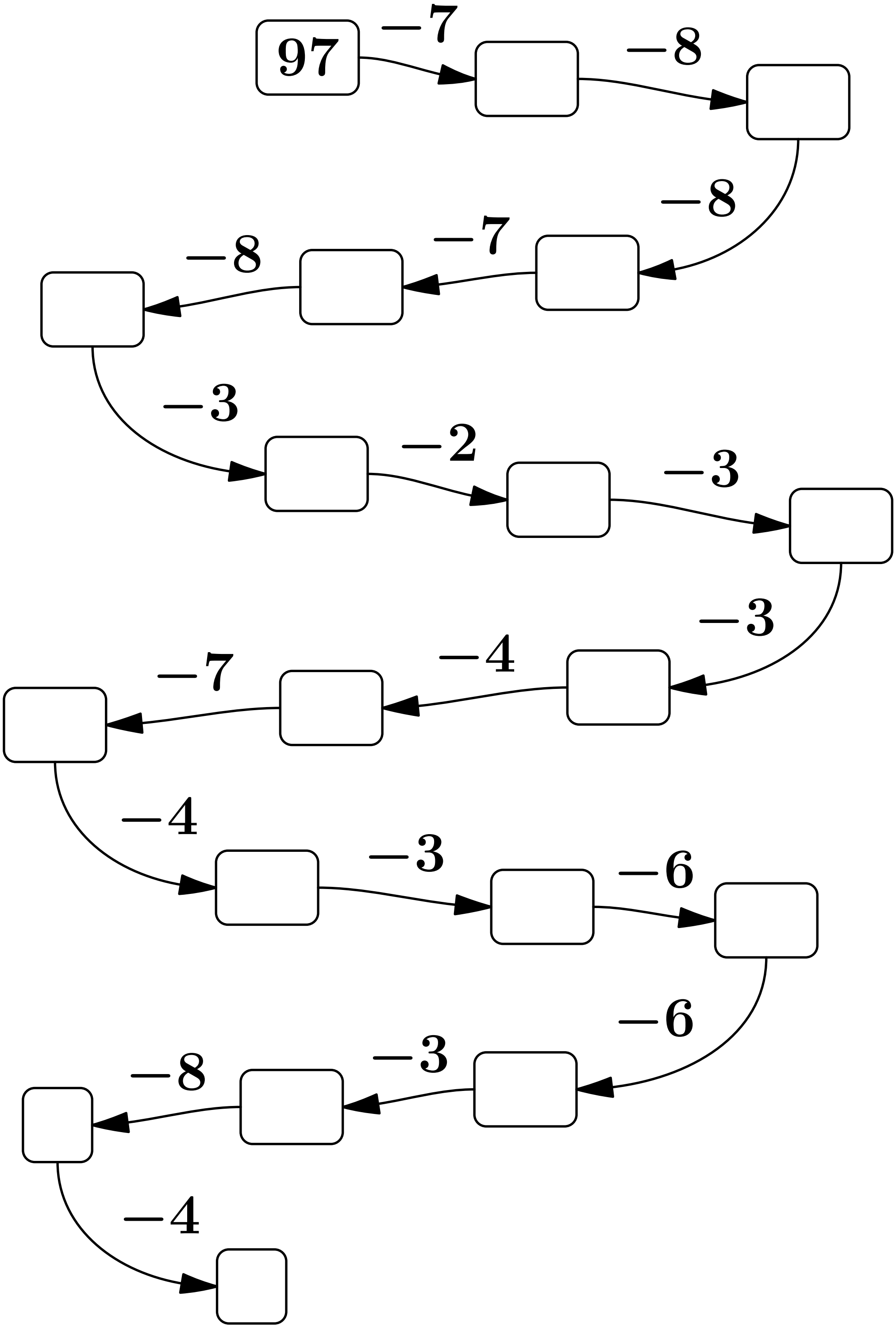
Odpowiedź:


9
+4
13
+6
19
+8
27
+4
31
+9
40
+7
47
+7
54
+4
58
+2
60
+3
63
+5
68
+6
74
+4
78
+2
80
+8
88
+3
91
+4
95

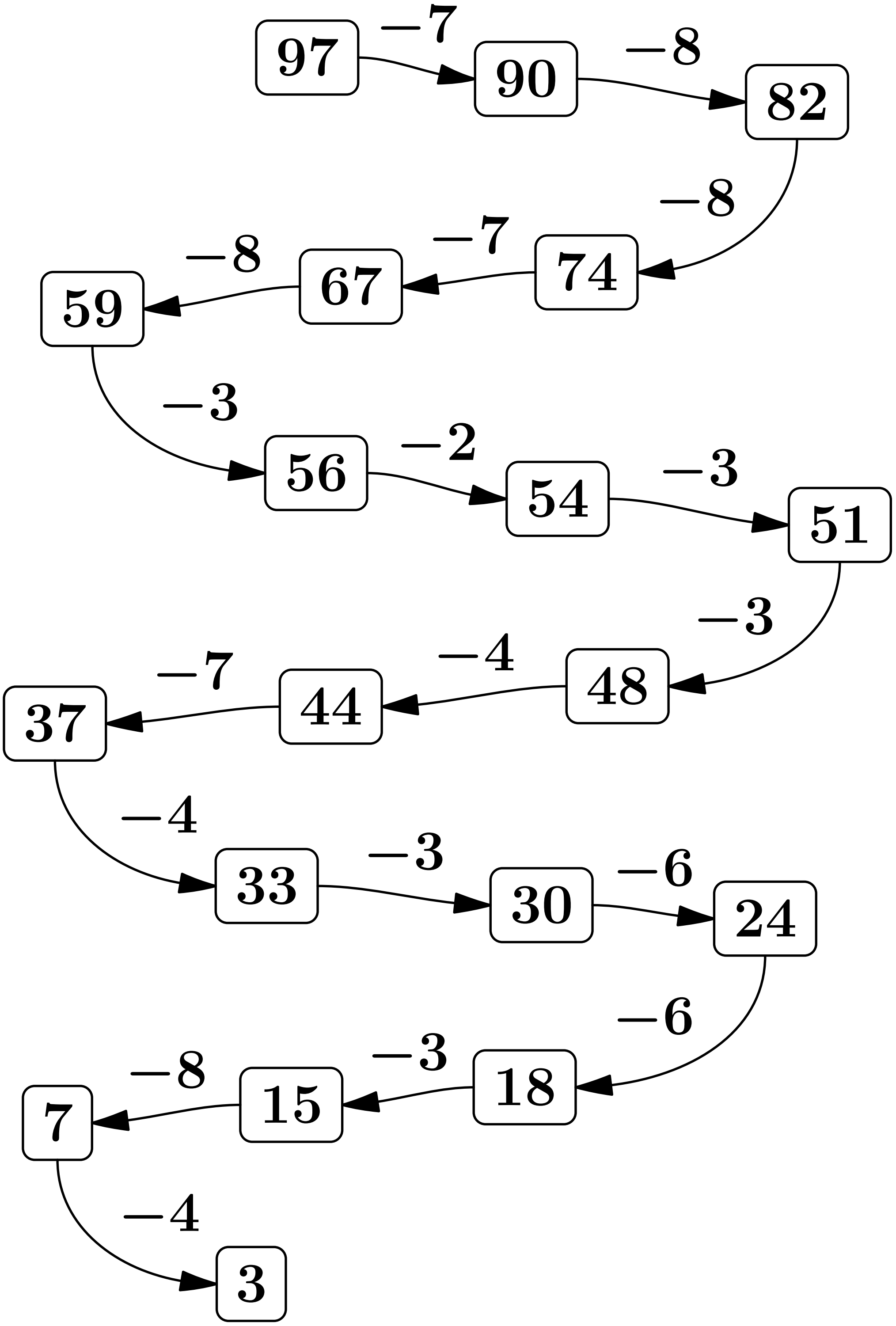
103 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 2–9, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000141, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



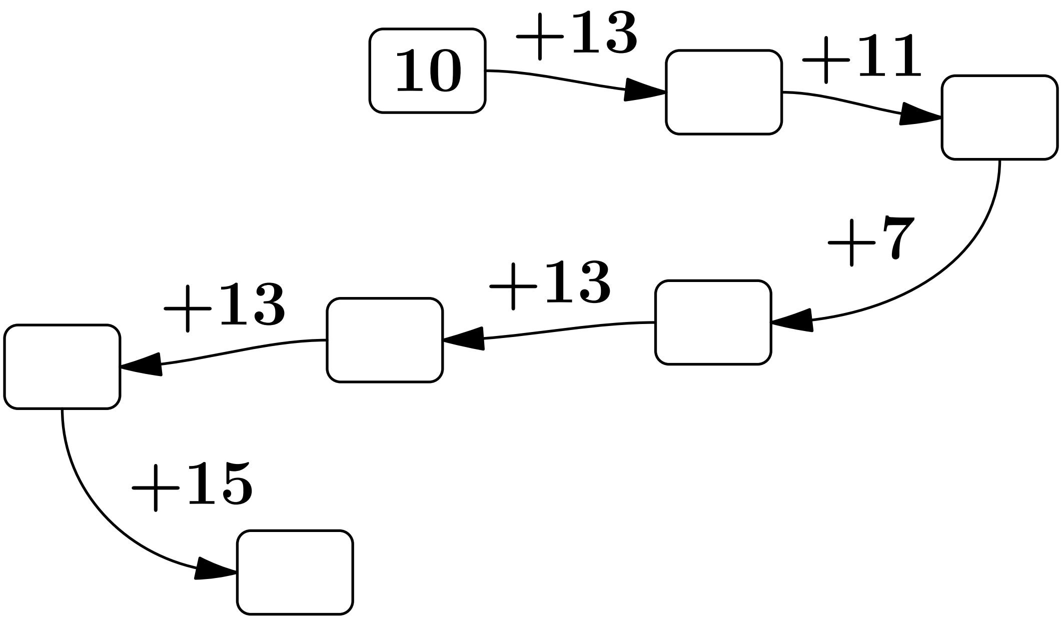
Odpowiedź:


97
−7
90
−8
82
−8
74
−7
67
−8
59
−3
56
−2
54
−3
51
−3
48
−4
44
−7
37
−4
33
−3
30
−6
24
−6
18
−3
15
−8
7
−4
3

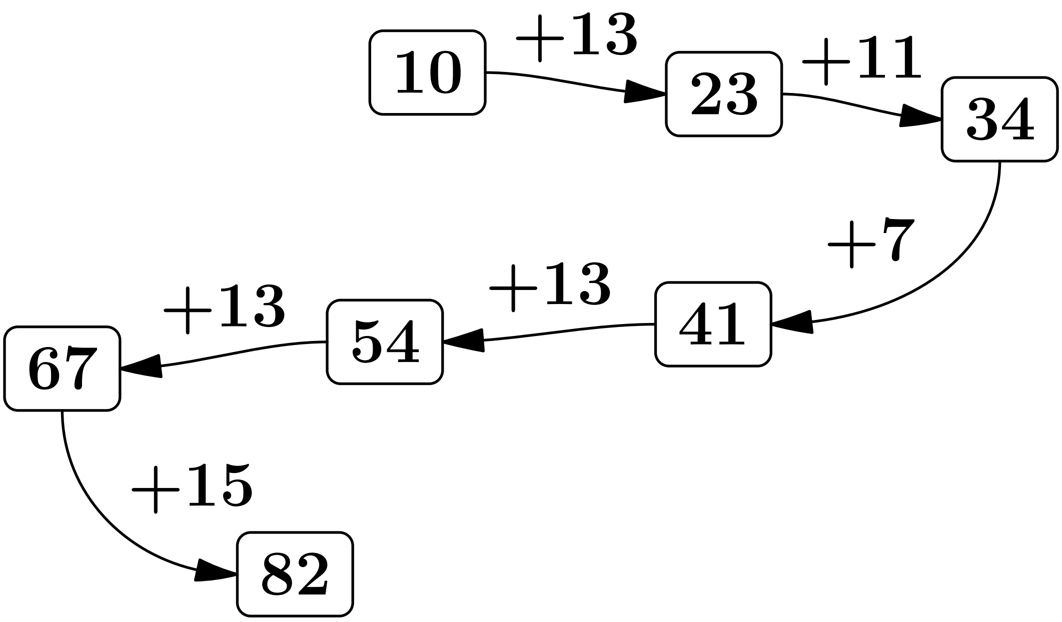
104 Zadanie – Wąż liczbowy, dodawanie 5–20, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000150, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



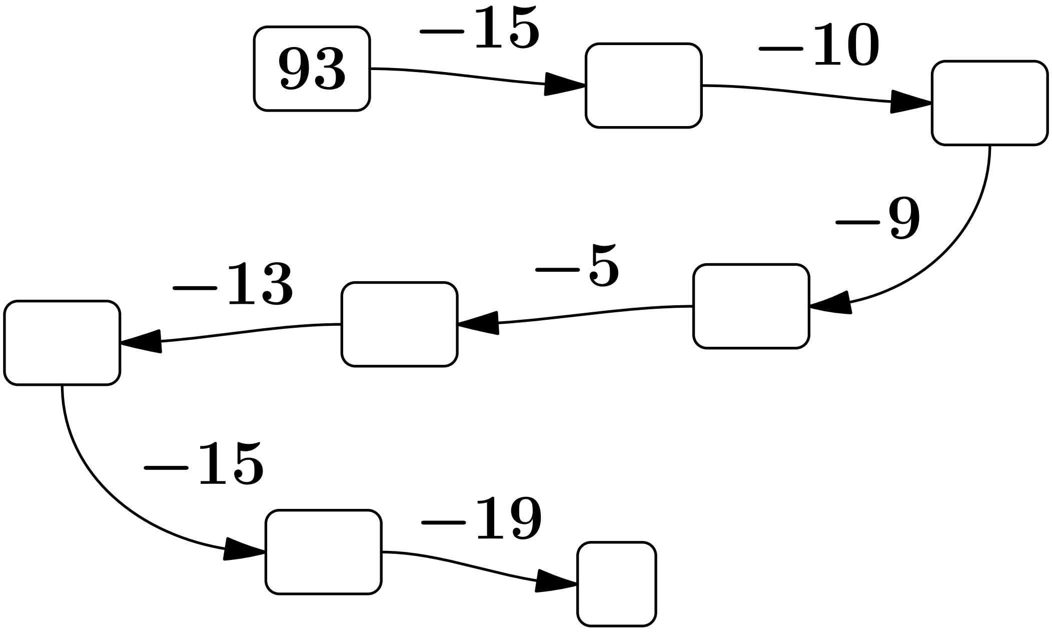
Odpowiedź:



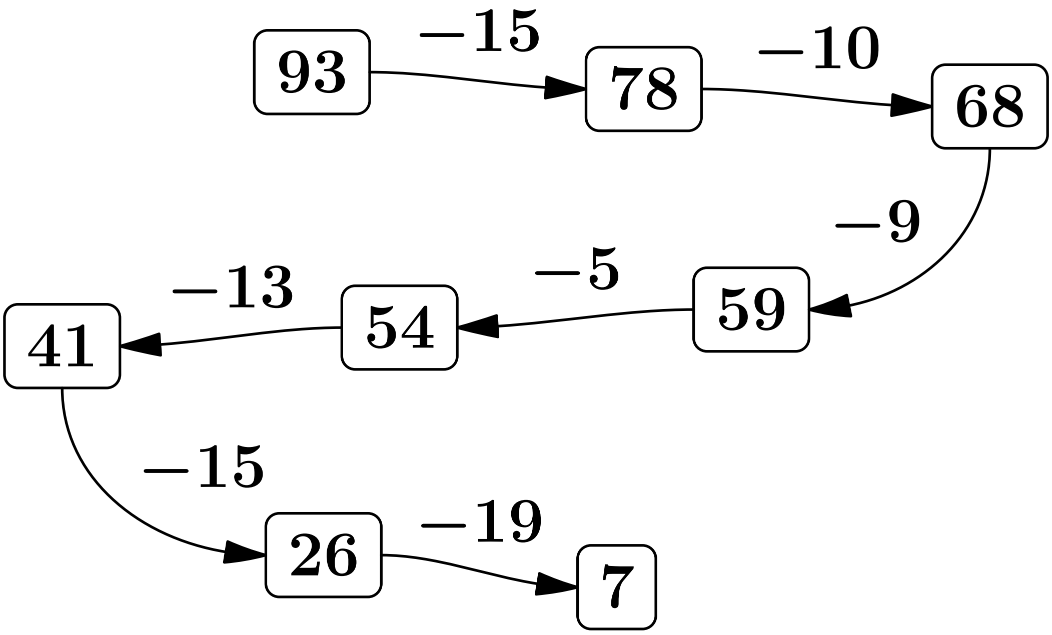
105 Zadanie – Wąż liczbowy, odejmowanie 5–20, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000151, diff: 1

W poniższym wężu liczbowym w każdym okienku poza pierwszym musi znajdować się liczba równa liczbie z poprzedniego okienka zmodyfikowanej zgodnie z opisem przy strzałce. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.



Odpowiedź:



106 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 1–10

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-28, id: pl-liczby-0000200, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

4		
1		1

Odpowiedź:

	8	
4	4	
1	3	1

107 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 1–10

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000201, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

6	2	
	3	

Odpowiedź:

	4	
6	2	
9	3	1

108 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–10

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-28, id: pl-liczby-0000205, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

1	3		
0			1

Odpowiedź:

10			
4	6		
1	3	3	
0	1	2	1

109 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–10

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000206, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

9	4	1

Odpowiedź:

2		
5	3	
9	4	1

110 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–20

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-28, id: pl-liczby-0000210, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

4	3	4	
2			

Odpowiedź:

14			
7	7		
4	3	4	
2	2	1	3

111 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–20

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000211, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

	4	1	
20	11		

Odpowiedź:

2			
5	3		
9	4	1	
20	11	7	6

112 Zadanie – Trójkąt liczbowy, dodawanie, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000220, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca sumą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

22	8	1		13	
14				5	

Odpowiedź:

97					
55	42				
39	16	26			
30	9	7	19		
22	8	1	6	13	
14	8	0	1	5	8

113 Zadanie – Trójkąt liczbowy, odejmowanie, 0–100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-01, id: pl-liczby-0000221, diff: 1

W poniższym trójkącie liczbowym w każdym prostokącie poza najniższym wierszem musi znajdować się liczba będąca różnicą liczb z dwóch najbliższych prostokątów z niższego wiersza: od liczby w lewym prostokącie odejmowana jest liczba w prawym prostokącie. W puste prostokąty wpisz odpowiednie liczby.

53		8	1	
	44	27		

Odpowiedź:

25				
27	2			
36	9	7		
53	17	8	1	
97	44	27	19	18

114 Zadanie – Dodawanie pisemne, 35

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-26, id: pl-liczby-0000300, diff: 1

Oblicz poniższe sumy.

a)

	1	6
+		8

b)

	1	5
+	1	7

Odpowiedź:

a)

	1	6
+		8
	2	4

b)

	1	5
+	1	7
	3	2

115 Zadanie – Dodawanie pisemne, 55

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-26, id: pl-liczby-0000305, diff: 1

Oblicz poniższe sumy.

a)

	2	9
+	1	8

b)

	3	4
+	1	9

Odpowiedź:

a)

	2	9
+	1	8
	4	7

b)

	3	4
+	1	9
	5	3

116 Zadanie – Dodawanie pisemne, 100

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-05, id: pl-liczby-0000310, diff: 1

Oblicz poniższe sumy.

a)

	5	3
+	3	4

b)

	6	9
+	2	9

Odpowiedź:

a)

	5	3
+	3	4
	8	7

b)

	6	9
+	2	9
	9	8

117 Zadanie – Dodawanie pisemne, 150

Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-05, id: pl-liczby-0000315, diff: 1

Oblicz poniższe sumy.

a)

	8	2
+	3	4

b)

	7	1
+	7	9

Odpowiedź:

a)

	8	2
+	3	4
1	1	6

b)

	7	1
+	7	9
1	5	0

118 Zadanie – Dodawanie pisemne, 1500

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-03, id: pl-liczby-0000320, diff: 1

Oblicz poniższe sumy.

a)

	5	3	0
+	4	3	1

b)

	6	9	8
+	7	6	1

Odpowiedź:

a)

	5	3	0
+	4	3	1
	9	6	1

b)

	6	9	8
+	7	6	1
1	4	5	9

119 Zadanie – Liczba stron

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-01, id: pl-liczby-0000500, diff: 1

Wanda rozpoczęła czytanie książki od początku 27 strony, a po dwóch godzinach skończyła czytać na końcu 96 strony.
a) Ile stron przeczytała Wanda?
b) Ile średnio stron czytała Wanda przez jedną godzinę?

Wskazówka: Jeśli Wanda zaczęłaby czytać na początku 1 strony, a skończyła na końcu 2, to ile stron by przeczytała?

Odpowiedź: Wanda przeczytała 70 stron, a czytała średnio 35 stron na godzinę.

120 Zadanie – Śliwki

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-01, id: pl-liczby-0001000, diff: 1

Jaś miał 18 śliwek. Następnie zjadł jedną trzecią śliwek. Ile śliwek zostało Jasiowi?

Wskazówka: Ile jest równe 18:3? Odpowiedź: 6.

Odpowiedź: Jasiowi zostało 12 śliwek.

121 Zadanie – Jabłka

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-01, id: pl-liczby-0002000, diff: 1

Jaś policzył posiadane przez Maćka jabłka – było ich 30 – a następnie wziął połowę posiadanych przez Maćka jabłek i dodał je do swoich zapasów jabłek. Wtedy okazało się, że Jaś posiada 3 razy tyle jabłek, co Maciek. Ile jabłek posiadają razem Jaś i Maciek?

Wskazówka: Ile jabłek zostało Maćkowi? Odpowiedź: 15.

Wskazówka: Ile jabłek ma Jaś? Odpowiedź: 45.

Odpowiedź: Jaś i Maciek mają razem 60 jabłek.

122 Zadanie – Kamyki

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-08, id: pl-liczby-0003000, diff: 3

Daria i Nela zebrały na plaży kamyki. Jeśli Daria dałaby Neli 3 kamyki, to miałyby po tyle samo kamyków. A jeśli Nela dałaby Darii 6 kamyków, to Daria miałaby 4 razy tyle kamyków, co Nela. Ile kamyków ma każda z dziewczynek?

Wskazówka: $D - 3 = N + 3$ oraz $D + 6 = 4(N - 6)$

Odpowiedź: Daria miała 18 kamyków, a Nela 12 kamyków.

123 Zadanie – Działania na liczbach ujemnych

Joanna Drabarz, update: 2016-06-15, id: pl-liczby-całkowite-0001000, diff: 2

Oblicz:
a) $-18 + (-19) =$
b) $-15 - (-186) =$
c) $26 + (-40) =$
d) $-43 - 11 + 19 =$

Odpowiedź:
a) -37
b) 171
c) -14
d) -35

124 Zadanie – Winda

Joanna Drabarz, update: 2016-06-15, id: pl-liczby-całkowite-0002000, diff: 1

W wysokim bloku z wielopoziomowym parkingiem podziemnym jest winda, która porusza się między piętrami. Winda ruszyła z parteru (piętro 0) 15 pięter do góry, a następnie 8 pięter w dół. Po chwili zjechała 7 pięter w dół, a następnie pojechała 19 pięter w górę. Na którym piętrze jest teraz winda, jeśli przed chwilą zjechała 6 pięter w dół?

Odpowiedź: Winda znajduje się na 13 piętrze.

125 Zadanie – Ślimak

Joanna Drabarz, Piotr Nieżurawski, update: 2016-06-29, id: pl-liczby-całkowite-0004000, diff: 3

Ślimak, aby wspiąć się na szczyt wieży, musi jeszcze przebyć w pionie odległość 1536 cm. Za każdym razem przez 8 godz. ślimak sunie do góry, a następnie odpoczywa przez 4 godz. Wspinając się pokonuje 8 mm na minutę w górę muru, a odpoczywając zsuwa się o 4 mm na minutę w dół. Po ilu godzinach ślimak dotrze na szczyt wieży, jeśli właśnie zaczął się wspinać?

Wskazówka: Jaką drogę pokonuje ślimak, wspinając się przez 8 godz.? Odpowiedź: 384 cm.

Wskazówka: O ile ślimak opada, odpoczywając przez 4 godz.? Odpowiedź: 96 cm.

Wskazówka: O ile ślimak przesuwa się do góry w jednym cyklu *wspianie-odpoczynek*? Odpowiedź: 288 cm.

Wskazówka: Czy ślimak będzie tyle samo razy wspinał się, co zsuwał w dół? Odpowiedź: Nie. *Dlaczego?*

Wskazówka: Ile razy ślimak będzie się wspinał? Odpowiedź: 5

Odpowiedź: Ślimak dotrze na szczyt wieży po 56 godz.

126 Zadanie – Rodzaje magnetyków

Piotr Nieżurawski, update: 2018-02-05, id: pl-magnetyzm-0004000, diff: 1

Zaobserwowano, że próbka materiału umieszczona w pobliżu cewki, przez którą płynął prąd elektryczny, była przyciągana do cewki. Po wyłączeniu prądu płynącego przez cewkę magnetyzacja próbki zmniejszyła się do zera. Podkreśl nazwę opisującą rodzaj magnetyka, z którego wykonana jest próbka: diamagnetyk, paramagnetyk.

Odpowiedź: Próbkę wykonano z paramagnetyka.

127 Zadanie – Jednostki objętości

Joanna Drabarz, update: 2016-07-19, id: pl-objętość-0001000, diff: 1

Przelicz m^3 na km^3:
110000000 m^3 to .... km^3
6400000 m^3 to .... km^3

Przelicz m^3 na cm^3:
7 m^3 to .... cm^3
14 m^3 to .... cm^3

Przelicz mm^3 na cm^3:
26000 mm^3 to .... cm^3
300200 mm^3 to .... cm^3

Wskazówka:
1 km^3 = 1000000000 m^3
1 m^3 to 1000000 cm^3
1 cm^3 to 1000 mm^3

Odpowiedź:
m^3 na km^3:
0,11 km^3
0,0064 km^3

m^3 na cm^3:
7000000 cm^3
14000000 cm^3

mm^3 na cm^3:
26 cm^3
300,2 cm^3

128 Zadanie – Rozładowanie akumulatora

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-04, id: pl-obwody-elektryczne-0000500, diff: 1

Przez 39 godzin rozładowywano akumulator, mierząc płynący prąd amperomierzem. Średnie natężenie prądu podczas rozładowania było równe 32 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez amperomierz. Wynik podaj w kulombach.

Wskazówka: $I = Q/t$

Wskazówka: 1 C = 1 A · 1 s

Odpowiedź: Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 4490$ C.

129 Zadanie – Alarm samochodowy

Piotr Nieżurawski, Andrzej Twardowski, update: 2018-01-31, id: pl-obwody-elektryczne-0000510, diff: 1

Przez pewien alarm samochodowy w trybie czuwania przepływa prąd o średnim natężeniu 10 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez ten układ w trakcie 11 dób. Wynik podaj w kulombach i amperogodzinach.

Wskazówka: $I = Q/t$

Wskazówka: 1 Ah = 1 A · 1 h

Wskazówka: 1 C = 1 A · 1 s

Odpowiedź: Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 2{,}64$ Ah ≈ 9500 C.

130 Zadanie – Opornik

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-obwody-elektryczne-0001000, diff: 1

Gdy przez opornik płynął stały prąd o natężeniu 15 mA, napięcie mierzone między końcówkami opornika było równe 0,93 V.
a) Oblicz opór opornika.
b) Zakładając, że opornik spełnia prawo Ohma, oblicz natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy napięcie mierzone między jego końcówkami jest równe 7,44 V.

Wskazówka: $U = RI$

Wskazówka: $I_1/U_1 = I_2/U_2$

Odpowiedź:
a) Opór $R = U_1/I_1 = 62\ \Omega$.
b) Natężenie prądu $I_2 = U_2/R = I_1U_2/U_1 = 120$ mA.

131 Zadanie – Odległość do diody

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-11, id: pl-optyka-0002000, diff: 1

Cienka soczewka o ogniskowej 6 cm musi być odsunięta na odległość 7 cm od ekranu, aby uzyskać na nim ostry obraz świecącej diody znajdującej się na osi optycznej soczewki.
a) Oblicz odległość od soczewki do diody.
b) Oblicz stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu.

Wskazówka:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

f – ogniskowa; x – odległość od soczewki do diody; y – odległość od soczewki do obrazu (ekranu).

Wskazówka:

$$h_o/h_i = x/y$$

h_o – wysokość diody (*object*); h_i – wysokość obrazu (*image*)

Odpowiedź:
a) Odległość od soczewki do diody to 42 cm.
b) Stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu to 6.

132 Zadanie – Polaryzacja odbitego światła

Piotr Nieżurawski, update: 2018-02-24, id: pl-optyka-0008000, diff: 1

Studenci powinni określić materiał, z którego została wykonana sześcienna bryła. Mają tego dokonać tylko na podstawie badania polaryzacji odbitego od jej ściany światła. Dysponują wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskali, gdy kąt między normalną do ściany a odbitą wiązką był równy 67,6°. Na podstawie odpowiednich obliczeń wskaż, z którego z następujących materiałów najprawdopodobniej wykonano bryłę (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): diament (2,42), szkło kwarcowe (1,46), fluorek sodu (1,33). Bryła znajduje się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Wskazówka: Kąt między wiązką odbitą a załamaną musi być kątem prostym.

Wskazówka: Kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Wskazówka:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = n_2 \sin(90^\circ - \alpha_1)$$

n_1 oraz n_2 – bezwzględny współczynnik załamania światła odpowiednio dla powietrza oraz materiału; α_1 oraz α_2 – kąt padania oraz załamania światła.

Wskazówka: $\sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$

Odpowiedź: Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 2{,}43$. A więc materiałem jest najprawdopodobniej diament.

133 Zadanie – Polaryzacja i geolog

Andrzej Twardowski, Piotr Nieżurawski, update: 2018-02-24, id: pl-optyka-0008005, diff: 1

Młoda geolog podczas wycieczki w Sudetach znalazła fragment kryształu. W celu jego identyfikacji badała polaryzację odbitego od ściany kryształu światła. Dysponowała wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskała, gdy kąt między normalną do ściany kryształu a odbitą wiązką był równy 67,6°. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ najbardziej prawdopodobny minerał, którego fragment był badany. Wybierz spośród (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): diament (2,42), korund (1,77), szkło kwarcowe (1,46). Kryształ znajdował się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Wskazówka: Kąt między wiązką odbitą a załamaną musi być kątem prostym.

Wskazówka: Kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Wskazówka:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = n_2 \sin(90° - \alpha_1)$$

n_1 oraz n_2 – bezwzględny współczynnik załamania światła odpowiednio dla powietrza oraz minerału; α_1 oraz α_2 – kąt padania oraz załamania światła.

Wskazówka: $\sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$

Odpowiedź: Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 2{,}43$. A więc minerałem jest najprawdopodobniej diament.

134 Zadanie – Jednostki powierzchni

Joanna Drabarz, update: 2016-06-04, id: pl-powierzchnia-0001000, diff: 1

Przelicz km^2 na m^2:
127 km^2 to .... m^2
312 km^2 to .... m^2

Przelicz m^2 na cm^2:
15 m^2 to .... cm^2
101 m^2 to .... cm^2

Przelicz mm^2 na cm^2
1600 mm^2 to .... cm^2
2005 mm^2 to .... cm^2

Wskazówka:
1 km^2 = 1000000 m^2
1 m^2 to 10000 cm^2
1 cm^2 to 100 mm^2

Odpowiedź:
km^2 na m^2:
127000000 m^2
312000000 m^2

m^2 na cm^2:
150000 cm^2
1010000 cm^2

mm^2 na cm^2:
16 cm^2
20,05 cm^2

135 Zadanie – Prostokąty

Joanna Drabarz, update: 2016-06-16, id: pl-powierzchnia-0002000, diff: 1

O ile zmieni się pole prostokąta o bokach 14 cm i 12 cm, jeśli pierwszy bok zwiększymy 8 razy, a drugi bok zmniejszymy 6 razy?

Wskazówka: Oblicz pole pierwszego prostokąta.
168 cm^2.
Oblicz nowe długości boków.
112 cm
2 cm
Oblicz pole nowego prostokąta: 224 cm^2

Odpowiedź: Różnica powierzchni tych prostokątów wynosi 56 cm^2

136 Zadanie – Boki prostokątów

Piotr Nieżurawski, update: 2016-07-07, id: pl-prostokąty-0001000, diff: 1

Oblicz długość:
a) boku kwardatu o polu powierzchni 100 m^2.
b) boku prostokąta o polu powierzchni 60 m^2, którego drugi z boków jest równy 10 m.
c) boku kwadratu o obwodzie 24 m.
d) boku prostokąta o obwodzie 48 m, którego drugi z boków jest równy 6 m.

Wskazówka:
a) $A = aa = a^2$
b) $A = ab$
c) $L = 4a$
d) $L = 2(a + b)$

Odpowiedź:
a) 10 m.
b) 6 m.
c) 6 m.
d) 18 m.

137 Zadanie – Jednostki długości

Joanna Drabarz, update: 2016-05-04, id: pl-prędkość-droga-czas-0001000, diff: 1

Przelicz kilometry na metry:
156 km to .... m
627 km to .... m

Przelicz metry na centymetry:
12 m to .... cm
100100 m to .... cm

Przelicz milimetry na centymetry:
370 mm to .... cm
4005 mm to .... cm

Wskazówka:
1 kilometr = 1000 metrów
1 metr to 100 centymetrów
1 centymetr to 10 milimetrów

Odpowiedź:
kilometry na metry:
156000 m
627000 m

metry na centymetry:
1200 cm
10010000 cm

milimetry na centymetry:
37 cm
400,5 cm

138 Zadanie – Jednostki czasu

Joanna Drabarz, update: 2016-05-04, id: pl-prędkość-droga-czas-0002000, diff: 1

Przelicz minuty na sekundy:
25 min. to .... s
115 min. to .... s

Przelicz godziny na minuty:
10 godz. to .... min.
17 godz. to .... min.

Przelicz sekundy na godziny:
39600 s to .... godz.
86400 s to .... godz.

Wskazówka:
1 godzina = 60 minut
1 minuta = 60 sekund
1 godzina = 3600 sekund

Odpowiedź:
minuty na sekundy:
1500 s
6900 s

godziny na minuty:
600 min.
1020 min.

sekundy na godziny:
11 godz.
24 godz.

139 Zadanie – Prędkość człowieka

Joanna Drabarz, update: 2016-07-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0003000, diff: 2

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 15300 metrów w ciągu 45 minut?

Wskazówka: Ile metrów pokonuje w ciągu minuty? Odpowiedź: 340 m.

Wskazówka: Ile metrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 20400 m.

Wskazówka: Ile kilometrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 20,4 km.

Odpowiedź: Człowiek porusza się z prędkością 20,4 km/h.

140 Zadanie – Echo

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0003500, diff: 1

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 340 m/s.

Wskazówka: Jaką drogę przebędzie dźwięk?

Odpowiedź: Minimalna odległości od ściany to około 13,6 m.

141 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Piotr Nieżurawski, update: 2016-07-30, id: pl-prędkość-droga-czas-0004000-dpc, diff: 3

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 6,1 m/s. Maciek, który wyruszył 7 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 28 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 427 s?

Wskazówka: Ile czasu jechał Jaś? Odpowiedź: 462 s.

Wskazówka: Jaka była długość trasy? (Jaś...) Odpowiedź: 2818,2 m.

Odpowiedź: Maciek jechał z prędkością 6,6 m/s.

142 Zadanie – Sztafeta żółwi

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0004500, diff: 1

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 210 cm/s przez 14 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 220 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 190 cm/s przez 6,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Ile czasu poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Jaką drogę przebył trzeci żółw?

Odpowiedź: Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 234 cm/s.

143 Zadanie – Samochód

Joanna Drabarz, update: 2016-07-09, id: pl-prędkość-droga-czas-0005000, diff: 2

Samochód pana Krzysztofa spala 4 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 8 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 4 zł?

Wskazówka: Na ile litrów benzyny wystarczy równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej? Odpowiedź: 0,5 litra.

Odpowiedź: Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 12 pełnych km.

144 Zadanie – Koło ratunkowe

Piotr Nieżurawski, update: 2016-08-06, id: pl-prędkość-droga-czas-0006000-dpc, diff: 2

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 17,1 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 1824 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

Wskazówka: Rozważ całe zdarzenie w układzie związanym z wodą.

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki to 3,2 km/h.

145 Zadanie – Wąż ogrodowy

Piotr Nieżurawski, update: 2016-08-29, id: pl-prędkość-droga-czas-0007000, diff: 1

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 15 mm zakończony jest otworem o średnicy 3 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 70 cm/s?

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że wodę w tym przypadku można uznać za ciecz nieściśliwą.

Wskazówka: $v_1 t A_1 = v_2 t A_2$, gdzie $A_i \propto d_i^2$

Odpowiedź: Szybkość wody w otworze to ok. 1750 cm/s.

146 Zadanie – Odcinki

Joanna Drabarz, update: 2016-05-11, id: pl-skala-0002000, diff: 1

Odcinek w skali 1:10 ma 34 cm długości. Jaką długość ma ten odcinek w skali 10:1?

Wskazówka: Jaką długość ma ten odcinek w skali 1:1?

34 trzeba pomnożyć przez 10

Zastanów się, ile razy powiększono ten odcinek i jaka będzie jego długość?

Odpowiedź: Odcinek ma długość 3400 cm.

147 Zadanie – Fotografia

Joanna Drabarz, update: 2016-07-07, id: pl-skala-0003000-dpc, diff: 2

Łazik marsjański przesłał zdjęcie znalezionego obiektu do analizy. Na zdjęciu w skali 1:10 obiekt miał 6,5 mm. Aby go dokładniej zbadać, powiększono zdjęcie. Jaką wielkość będzie miał ten obiekt w skali 9:1?

Wskazówka: 6,5 mm na fotografii to ile milimetrów w rzeczywistości (w skali 1:1)? Odpowiedź: 65 mm.

Wskazówka: 65 mm to ile mm w skali 9:1? Odpowiedź: 585 mm.

Odpowiedź: Na powiększonym zdjęciu obiekt będzie miał długość 585 mm.

148 Zadanie – Sonda

Joanna Drabarz, Piotr Nieżurawski, update: 2017-08-22, id: pl-skala-0004000-dpc, diff: 2

Sonda wykonała zdjęcia powierzchni Marsa. Po analizie obrazów stwierdzono, że na zdjęciach krater wulkanu miał średnicę 3,6 cm, a wysokość wulkanu była równa 0,4 cm. Jakie były rzeczywiste rozmiary tego wulkanu w kilometrach, jeśli zdjęcia zostały wykonane w skali 1:35000?

Wskazówka: 3,6 cm na mapie to ile centymetrów w rzeczywistości? Odpowiedź: 126000 cm.

Wskazówka: 0,4 cm na mapie to ile centymetrów w rzeczywistości? Odpowiedź: 14000 cm.

Wskazówka: Ile centymetrów to 1 km? 100000 cm to 1 km.

Odpowiedź: Wysokość wulkanu jest równa 0,14 km, a średnica krateru ma 1,26 km.

149 Zadanie – Przyssawka

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-28, id: pl-statyka-0001000, diff: 1

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 23 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 990 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Wskazówka: $F = p\,A$

Wskazówka: $A = \pi(d/2)^2$

Wskazówka: $F \approx 4110$ N.

Wskazówka: $m = F/g$

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 420 kg.

150 Zadanie – Pod wodą

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-21, id: pl-statyka-0002000, diff: 1

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 25 m. Przyjmij gęstość wody 1012 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Wskazówka: $p = dgh$

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 248 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

151 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-28, id: pl-statyka-0003000, diff: 1

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 2 cm, a duży średnicę 46 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 1600 kg leżącą na dużym tłoku?

Wskazówka: $p = mg/S$, gdzie $S = \pi r^2$

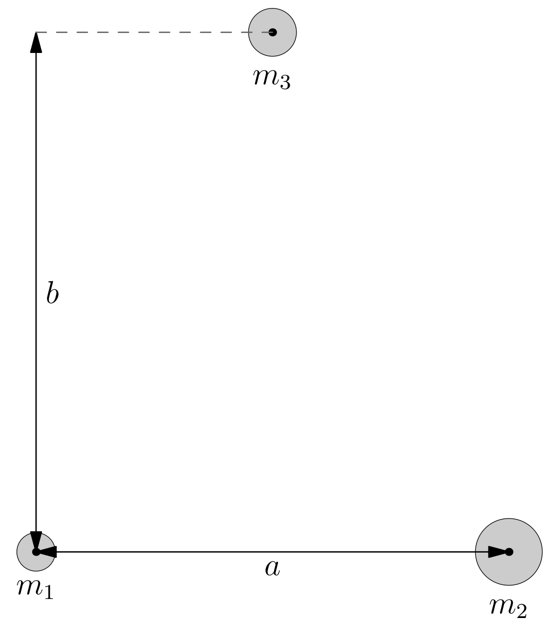
Wskazówka: $p_1 = p_2$

Odpowiedź: Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 3,03 kg.

152 Zadanie – Środek masy

Magda Gładka, update: 2017-05-18, id: pl-statyka-0004000, diff: 2

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0{,}2$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg, $m_3 = 0{,}4$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 4$ cm, a wysokość to $b = 6$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy m_1.



Wskazówka: Współrzędne środka masy to

$$x_c = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i},$$

$$y_c = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{\sum\limits_i m_i},$$

gdzie x_c to współrzędna pozioma, a y_c to współrzędna pionowa środka masy.

Odpowiedź: Środek masy znajduje się w punkcie $S = (x_c, y_c)$, gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 3{,}11 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 1{,}33 \text{ cm}.$$

153 Zadanie – Lot mionu

Piotr Nieżurawski, update: 2019-09-23, id: pl-szczególna-teoria-względności-0001000, diff: 1

Mion leci ze stałą prędkością $1{,}1 \cdot 10^8$ m/s względem laboratorium. W układzie związanym z mionem rozpadł się on po czasie $1{,}5\ \mu$s od początku lotu. Ile czasu trwał lot mionu w układzie związanym z laboratorium? Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

Wskazówka: Czas lotu zmierzony w układzie związanym z laboratorium, t, będzie dłuższy niż czas zmierzony w układzie związanym z mionem, t_0.

Odpowiedź: W układzie związanym z laboratorium czas lotu mionu

$$t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t_0 \approx 1{,}61\ \mu\text{s}$$

gdzie $\beta = v/c$, v jest prędkością mionu, a c prędkością światła w próżni.

154 Zadanie – Jednostki temperatury

Joanna Drabarz, update: 2016-07-09, id: pl-temperatura-0001000, diff: 2

Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Celsjusza na skalę Kelwina:
$-14°$C to ..... K.
$-12°$C to ..... K.
Przelicz temperatury wyrażone w stopniach Fahrenheita na skalę Kelwina:
32°F to ...... K.
41°F to ...... K.

Odpowiedź: Temperatury w Kelwinach:
259,15 K
261,15 K

273,15 K
278,15 K

155 Zadanie – Temperatury

Joanna Drabarz, update: 2015-12-15, id: pl-temperatura-0002000, diff: 2

W różnych krajach stosuje się inne skale temperatur, np. w Polsce temperaturę podaje się w skali Celsjusza, a w USA w skali Fahrenheita. Naukowcy używają najczęściej skali Kelwina. Aby dowiedzieć się, jak przeliczyć temperatury, zapoznaj się z poniższymi wzorami, w których T_K oznacza temperaturę podaną w skali Kelwina, T_C oznacza temperaturę podaną w stopniach Celsjusza, a T_F oznacza temperaturę podaną w stopniach Fahrenheita.

$$T_K = 273{,}15 + T_C \qquad\qquad T_C = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

Dwaj chłopcy, Adaś z Polski i John z USA, mierzyli codziennie temperaturę przed domem, otrzymując następujące wyniki:
Adaś: -14°C, -11°C, -12°C, -8°C.
John: 23°F, 14°F, -4°F, 32°F.
Obaj chłopcy biorą udział w konkursie badawczym i muszą przesłać wyniki swoich pomiarów w skali Kelwina.
Pytanie 1. Jakie będą wartości uzyskanych przez nich temperatur w skali Kelwina?
Pytanie 2. Ile wynosi średnia temperatura u każdego z chłopców? Odpowiedź podaj w skali Kelwina.

Odpowiedź: Temperatury Adasia (w Kelwinach): 259,15 K, 262,15 K, 261,15 K, 265,15 K.
Temperatury Johna: 268,15 K, 263,15 K, 253,15 K, 273,15 K.
Średnia temperatura Adasia (w Kelwinach): 261,9 K.
Średnia temperatura Johna (w Kelwinach): 264,4 K.

156 Zadanie – Średnia temperatura

Joanna Drabarz, update: 2016-06-15, id: pl-temperatura-0003000, diff: 2

Stacja meteorologiczna prowadziła przez tydzień pomiary średniej dobowej temperatury, uzyskując następujące wyniki: 1°C, 4°C, -2°C, 0°C, -1°C, 1°C, 4°C.
Ile wynosi średnia temperatura w tym tygodniu?

Wskazówka: Aby obliczyć średnią temperaturę, należy dodać wszystkie pomiary i podzielić przez liczbę pomiarów.

Odpowiedź: Średnia temperatura wynosi: 1°C

157 Zadanie – Zmiana energii wewnętrznej układu

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-30, id: pl-termodynamika-0003000, diff: 1

W pewnym procesie dostarczyliśmy do układu ciepło o wartości 280 J, wykonaliśmy pracę nad tym układem (np. sprężając go) o wartości 140 J oraz odebraliśmy od układu ciepło o wartości 200 J, a układ wykonał pracę o wartości 120 J. Oblicz zmianę energii wewnętrznej tego układu wskutek opisanego procesu.

Wskazówka: $\Delta U = Q + W$, gdzie Q jest ciepłem dostarczanym do układu, a W jest pracą wykonywaną nad układem.

Odpowiedź: Zmiana energii wewnętrznej układu: $\Delta U = Q_1 + W_1 + Q_2 + W_2 = 100$ J. Zauważ, że $Q_2 < 0$ oraz $W_2 < 0$.

158 Zadanie – Szybkość średnia atomu

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-22, id: pl-termodynamika-0004000, diff: 2

W pewnym ośrodku o temperaturze 27°C, poruszają się atomy argonu. Oblicz szybkość średnią kwadratową, z jaką poruszają się cząsteczki tego gazu, wiedząc, że jego masa molowa wynosi 40 g/mol.

Wskazówka: Wyraź temperaturę w kelwinach.

Wskazówka: Energia kinetyczna cząsteczki jest równa

$$\frac{3}{2}nRT$$

R - uniwersalna stała gazowa, T - temperatura.

Wskazówka: Uniwersalna stała gazowa wynosi 8,31 J/(mol·K).

Wskazówka: Szybkość średnia kwadratowa cząsteczki wynosi

$$\sqrt{3TR/\mu}$$

μ - masa molowa.

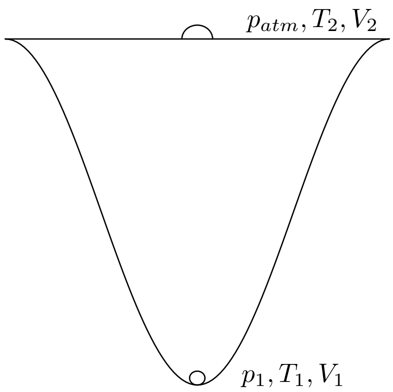
Odpowiedź: Szybkość średnia kwadratowa argonu jest równa w przybliżeniu 13,7 m/s.

159 Zadanie – Pęcherzyk powietrza

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-22, id: pl-termodynamika-0006000, diff: 2

Z dna jeziora o głębokości 22,3 m odrywa się pęcherzyk powietrza o promieniu 5,1 mm. Temperatura na dnie jeziora wynosi 4,2°C. Pęcherzyk po dotarciu na powierzchnię jeziora zmienił się w półsferyczną bańkę o promieniu 10,2 mm. Jaka temperatura panuje na powierzchni jeziora, jeśli ciśnienie atmosferyczne wynosi 100 kPa? Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1000 kg/m^3, a gęstość powietrza w warunkach normalnych 1,29 kg/m^3. Pomiń wpływ napięcia powierzchniowego na ciśnienie w pęcherzyku. Załóż, że temperatura powietrza w pęcherzyku jest zawsze równa temperaturze otoczenia.

Wskazówka:



Wskazówka: Do znalezienia ciśnienia na dnie jeziora skorzystaj z równania

$$p = p_a + \rho_w \cdot g \cdot h$$

p - całkowite ciśnienie, p_a - ciśnienie atmosferyczne, ρ - gęstość wody, g - przyspieszenie ziemskie, h - głębokość jeziora.

Wskazówka: Ułóż równania gazu doskonałego w pęcherzyku na dnie i na powierzchni jeziora

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$$

$$p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2$$

p_1 - całkowite ciśnienie na dnie jeziora, V_1 - objętość pęcherzyka na dnie jeziora, n - liczba moli, R - uniwersalna stała gazowa, T_1 - temperatura na dnie jeziora, p_2 - całkowite ciśnienie na powierzchni jeziora, V_2 - objętość pęcherzyka na powierzchni jeziora, T_2 - temperatura na powierzchni jeziora.

Wskazówka:

$$T_2 = \frac{p_a \cdot T_1}{p_a + h \cdot g \cdot \rho_w} \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

r_2 - promień pęcherzyka na powierzchni jeziora, r_1 - promień pęcherzyka na dnie jeziora.

Odpowiedź: Temperatura na powierzchni jeziora wynosi około 5,3°C.

160 Zadanie – Entropia i porcja wody

Piotr Nieżurawski, update: 2018-02-05, id: pl-termodynamika-0010000, diff: 1

Oblicz zmianę entropii wody o masie 54 g podczas przemiany jej stanu z ciekłego (płyn) w stan gazowy (para) w temperaturze wrzenia pod ciśnieniem 1 atm. Przyjmij ciepło parowania równe 2257 kJ/kg.

Wskazówka: Zmiana entropii $\Delta S = Q/T$, gdzie Q – ciepło, T – temperatura (w K).

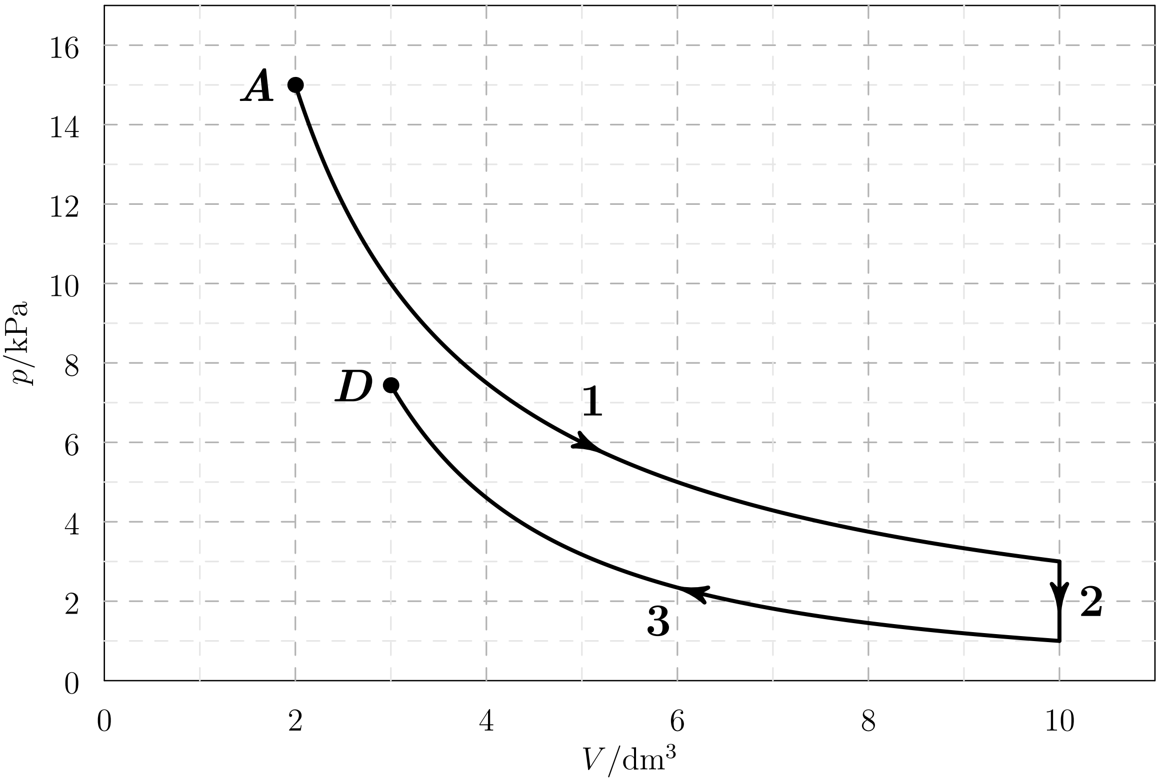
Wskazówka: $Q = mL$, gdzie m – masa wody, L – ciepło przemiany.

Odpowiedź: Zmiana entropii: $\Delta S \approx 121878$ J / 373 K ≈ 327 J/K.

161 Zadanie – Przemiany gazowe

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-03, id: pl-termodynamika-0020000, diff: 1

Ustalona porcja gazowego neonu przeszła przemiany 1, 2 i 3 przedstawione na poniższym wykresie, gdzie p oznacza ciśnienie gazu, a V jego objętość. Początkowo parametry gazu opisywał punkt A. Wiadomo, że przemiana 3 była adiabatyczna.
a) Podaj nazwy przemian 1 i 2. W przypadku przemiany 1 swoją hipotezę dotyczącą rodzaju przemiany sprawdź w 3 różnych punktach.
b) Dla każdej z przemian wskaż wielkości, które są zawsze równe 0 w trakcie tej przemiany.
c) Czy gaz w punkcie D ma większą temperaturę niż w punkcie A?
d) Czy z punktu D może ta porcja gazu dotrzeć do punktu A w przemianie izobarycznej?



Wskazówka: W przemianie 1 iloczyn pV jest stały.

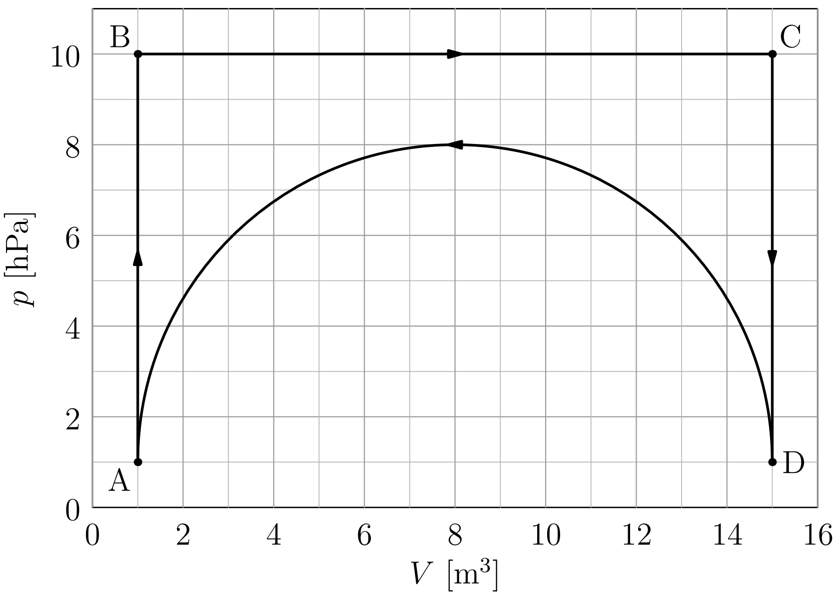
Wskazówka: Dla gazu doskonałego $T \propto pV$.

Odpowiedź:
a) Przemiana 1 to przemiana izotermiczna, gdyż pV ma zawsze tę samą wartość, np. $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ (w jednostkach kPa·dm^3). Przemiana 2 jest przemianą izochoryczną.
b) W trakcie przemiany 1 zmiana temperatury oraz zmiana energii wewnętrznej są równe 0, w trakcie przemiany 2 zmiana objętości oraz praca (wykonana nad gazem lub wykonana przez gaz), a w trakcie przemiany 3 wymienione z otoczeniem ciepło.
c) Nie. Iloczyn pV w punkcie A jest równy $2 \cdot 15 = 30$, a w punkcie D jest mniejszy niż $8 \cdot 3 = 24$ (w jednostkach kPa·dm^3).
d) Nie, gdyż ciśnienia w tych punktach są różne.

162 Zadanie – Praca wykonana przez gaz

Małgorzata Berajter, update: 2017-10-01, id: pl-termodynamika-0020100, diff: 2

Oblicz pracę wykonaną przez gaz podczas jednego cyklu przedstawionego na wykresie poniżej. Fragment DA ma kształt półokręgu.



Wskazówka: Praca wykonana przez gaz jest równa polu pod wykresem $p(V)$.

Wskazówka: Dolny fragment wykresu ma kształt półokręgu

$$W = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} - \frac{\pi}{2} r^2$$

Odpowiedź: Praca wykonana przez gaz wynosi około 4910 J.

163 Zadanie – Przemiany gazu doskonałego

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-termodynamika-0020200, diff: 2

W szczelnym naczyniu, zamkniętym tłokiem, znajduje się argon. Masa gazu jest równa 2 kg, a początkowa temperatura 19°C. Gaz poddano przemianie izobarycznej, dostarczając mu 940 J ciepła. Jaką pracę wykonał argon podczas rozprężania? Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 40 g/mol.

Wskazówka: Skorzystaj z równania gazu doskonałego.

Wskazówka: Zauważ, że w przemianie izobarycznej istnieje związek między zmianą objętości a zmianą temperatury.

Wskazówka:

$$C_p = \frac{Q}{n \cdot \Delta T}$$

C_p - molowe ciepło właściwe, Q - przekazane ciepło, n - liczba moli, ΔT - zmiana temperatury.

Wskazówka:

$$W = \frac{2}{5}Q$$

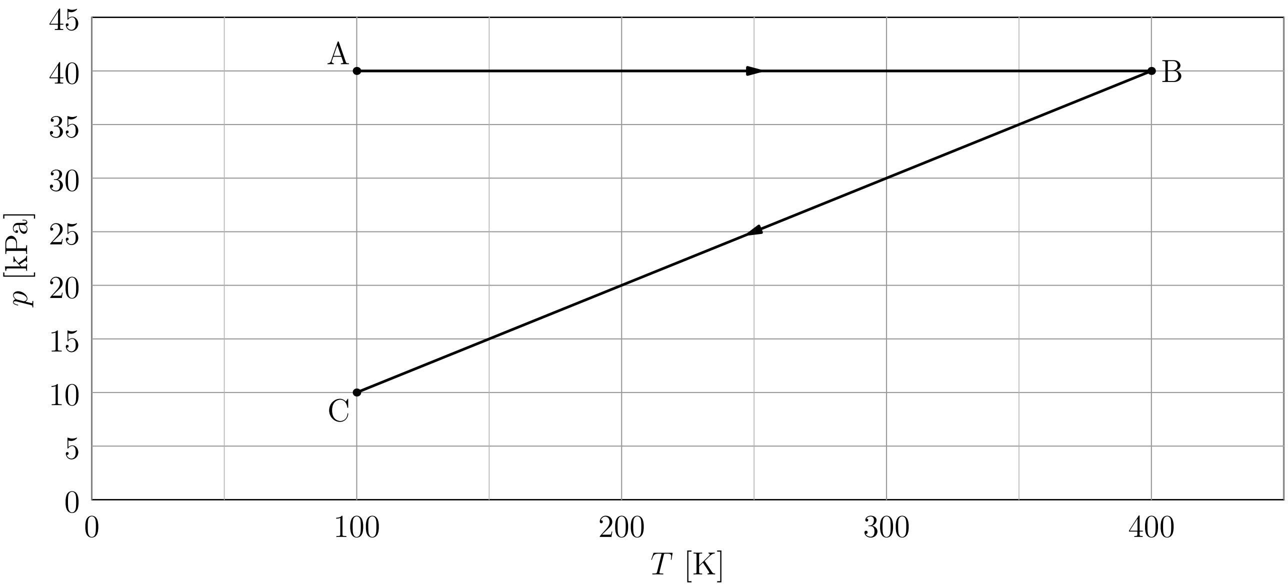
W - praca gazu.

Odpowiedź: Gaz wykonał pracę około 376 J.

164 Zadanie – Ciepło, energia wewnętrzna i praca w przemianach gazowych

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-termodynamika-0020300, diff: 2

Oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu doskonałego, pracę wykonaną przez gaz oraz ciepło wymienione z otoczeniem podczas przemiany przedstawionej na wykresie poniżej. Przyjmij, że zmiana objętości wyniosła 0,24 m^3.



Wskazówka: Energia wewnętrzna zależy od temperatury.

Wskazówka: Praca wykonana przez gaz w przemianie izobarycznej (A-B)

$$W = p \cdot \Delta V$$

p - ciśnienie gazu, ΔV - zmiana objętości gazu.

Wskazówka:

$$\Delta U = W + Q$$

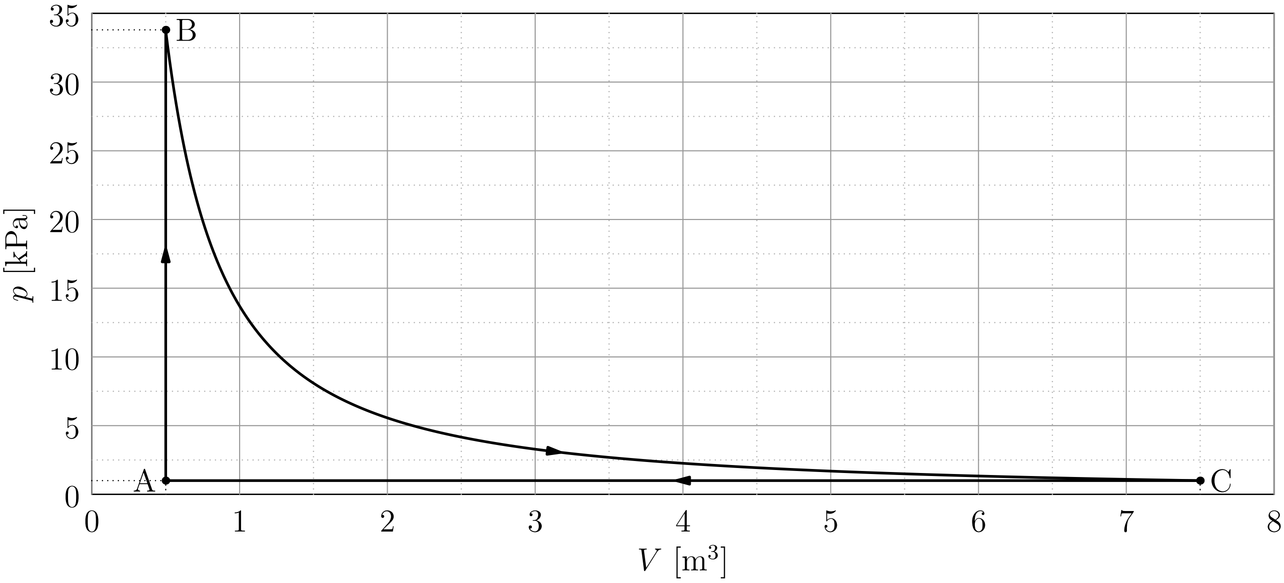
ΔU - zmiana energii wewnętrznej, W - praca wykonana nad gazem, Q - ciepło wymienione z otoczeniem.

Odpowiedź: Podczas przemiany energia wewnętrzna gazu nie zmieniła się. Praca jaką wykonał gaz wynosi 9600 J, z otoczenia pobrał 9600 J ciepła.

165 Zadanie – Ciepło oddane i pobrane

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-termodynamika-0020400, diff: 2

Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest poddawany przemianom przedstawionym na wykresie poniżej. Wiedząc, że przemiana B-C jest przemianą adiabatyczną oraz że ciśnienie w punkcie A jest równe 1 kPa, a w punkcie B ciśnienie wynosi 33,8 kPa, oblicz:
a) energię pobraną przez gaz z grzejnika;
b) energię oddaną chłodnicy;
c) wypadkową pracę w jednym cyklu silnika cieplnego, w którym gaz poddawany jest opisanym przemianom;
d) sprawność tego silnika.



Wskazówka: W przemianie A-B gaz pobiera ciepło

$$Q_{AB} = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

C_v - ciepło molowe przy stałej objętości.

Wskazówka: Korzystając z równania gazu idealnego dla stanów A, B

$$p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A$$

$$p_B \cdot V_B = n \cdot R \cdot T_B$$

odejmując równania stronami i upraszczając równanie otrzymujemy związek między zmianą temperatury a zmianą ciśnienia

$$T_B - T_A = \frac{p_B \cdot V_B - p_A \cdot V_A}{n \cdot R}$$

T_B - temperatura w stanie B, T_A - temperatura w stanie A, p_B - ciśnienie w stanie B, p_A - ciśnienie w stanie A, V_B - objętość w stanie B, V_A - objętość w stanie A.

Wskazówka: Ciepło molowe przy stałej objętości dla gazu jednoatomowego jest równe $\frac{3}{2}R$.

Wskazówka: W przemianie C-A gaz oddaje ciepło

$$Q_{CA} = n \cdot C_p \cdot \Delta T$$

n - liczba moli, C_p - ciepło molowe przy stałym ciśnieniu, ΔT - zmiana temperatury gazu.

Wskazówka: Ciepło molowe przy stałym ciśnieniu dla gazu jednoatomowego jest równe $\frac{5}{2}R$.

Wskazówka: Praca wykonana przez gaz jest równa różnicy między ciepłem otrzymanym a oddanym

$$W = Q_{AB} + Q_{CA}$$
$$W = Q_{AB} - |Q_{CA}|$$

Wskazówka:

$$\eta = \left|\frac{W}{Q}\right|$$

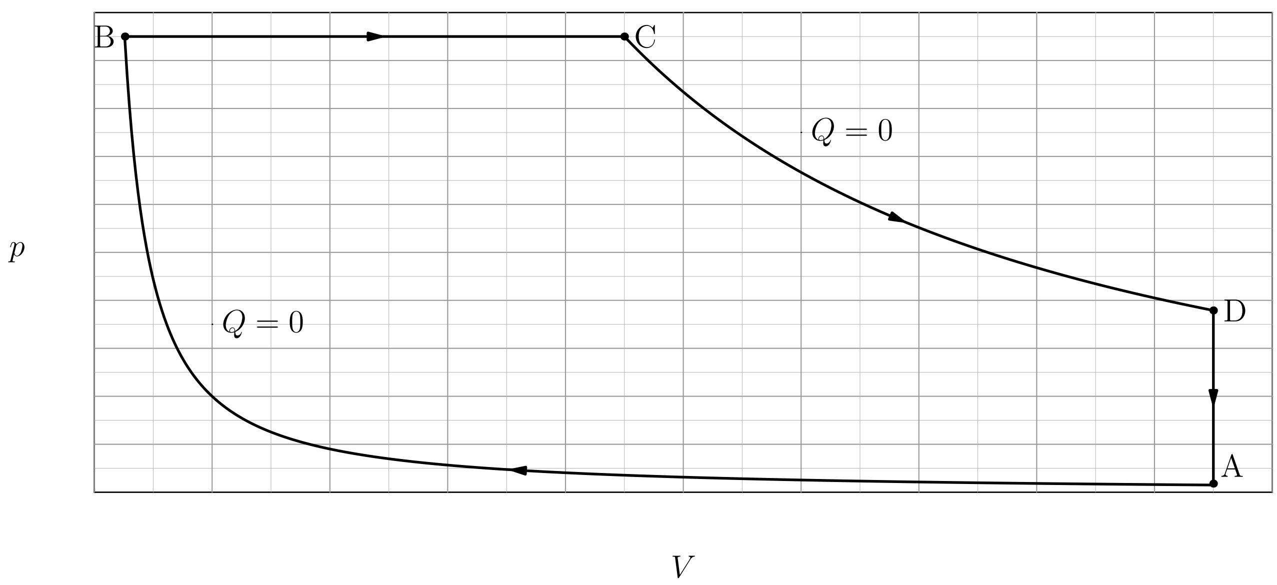
η - sprawność silnika, W - praca wykonana przez gaz, Q - przekazane ciepło.

Odpowiedź: Gaz pobrał z grzejnicy 24,6 kJ ciepła, a do chłodnicy oddał 17,5 kJ ciepła. Praca wykonana przez gaz wynosi 7,1 kJ, sprawność silnika jest równa 29%.

166 Zadanie – Cykl przemian gazu

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-termodynamika-0020700, diff: 3

Wyznacz sprawność cyklu dla ustalonej porcji gazu doskonałego przedstawionego na rysunku poniżej. Wynik przedstaw tylko w zależności od temperatur oraz stosunku ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej. Przemiany A-B oraz C-D są adiabatyczne. Dane są temperatury w punktach A, B, C, D.



Wskazówka:

$$\eta = \left|\frac{W}{Q}\right| = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

η - sprawność cieplna, W - praca wykonana przez gaz, Q - przekazane ciepło.

Wskazówka: Pobrane ciepło w przemianie izbarycznej

$$Q_{BC} = C_p \cdot n \cdot \Delta T = C_p \cdot n \cdot (T_C - T_B)$$

C_p - ciepło molowe w przemianie izobarycznej, ΔT - zmiana temperatury.

Wskazówka: Oddane ciepło w przemianie izochorycznej

$$Q_{DA} = C_v \cdot n \cdot \Delta T = C_v \cdot n \cdot (T_A - T_D)$$

C_v - ciepło molowe w przemianie izochorycznej.

Odpowiedź: Sprawność przedstawionego cyklu w zależności od temperatur:

$$\eta = 1 + \frac{1}{\kappa}\frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

κ - stosunek ciepła właściwego w przemianie izobarycznej do ciepła właściwego w przemianie izochorycznej, wykładnik adiabaty.

167 Zadanie – Przemiana adiabatyczna i izotermiczna

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-termodynamika-0020800, diff: 3

Porcję 2 kg dwutlenku węgla o temperaturze 754,5 K i ciśnieniu $3 \cdot 10^5$ Pa sprężono adiabatycznie, a następnie rozprężono izotermicznie. Ilość ciepła pobrana w procesie izotermicznym jest równa przyrostowi energii wewnętrznej gazu w procesie adiabatycznym i wynosi 238 kJ. Oblicz objętość i ciśnienie gazu po przemianie
a) adiabatycznej
b) izotermicznej.
Przyjmij, że masa molowa gazu wynosi 44 g/mol, a wykładnik adiabaty 1,3.

Wskazówka: Wyznacz początkową objętość gazu z równania gazu doskonałego.

Wskazówka: W przemianie adiabatycznej praca jest równa:

$$W = \int_1^2 p \cdot dV = \frac{p_1 \cdot {V_1}^\chi}{1-\chi}\left({V_2}^{1-\chi} - {V_1}^{1-\chi}\right)$$

a w przemianie izotermicznej:

$$W = \int_2^3 p \cdot dV = n \cdot R \cdot T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$$

W - praca gazu, p - ciśnienie gazu, V - objętość gazu, χ - wykładnik adiabaty, p_1 - początkowe ciśnienie, V_1 - początkowa objętość, V_2 - objętość po przemianie adiabatycznej, V_3 - objętość po przemianie izotermicznej, T_2 - temperatura po przemianie izotermicznej.

Wskazówka: Objętość gazu po przemianie adiabatycznej obliczysz, korzystając ze wzoru na pracę w przemianie adiabatycznej.

Wskazówka: Korzystając z równań Poissona, oblicz ciśnienie oraz temperaturę po przemianie adiabatycznej:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\chi}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\chi-1}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

Wskazówka: Objętość gazu po przemianie izotermicznej obliczysz, korzystając ze wzoru na pracę w przemianie izotermicznej

$$V_3 = V_2 \exp\left(\frac{W}{n \cdot R \cdot T_2}\right)$$

Wskazówka: Wyznacz końcowe ciśnienie gazu z równania gazu doskonałego.

Odpowiedź: Po przemianie adiabatycznej parametry gazu wynoszą 0,49 m^3, $7{,}17 \cdot 10^5$ Pa. Po przemianie izotermicznej parametry gazu wynoszą 0,96 m^3, $3{,}62 \cdot 10^5$ Pa.

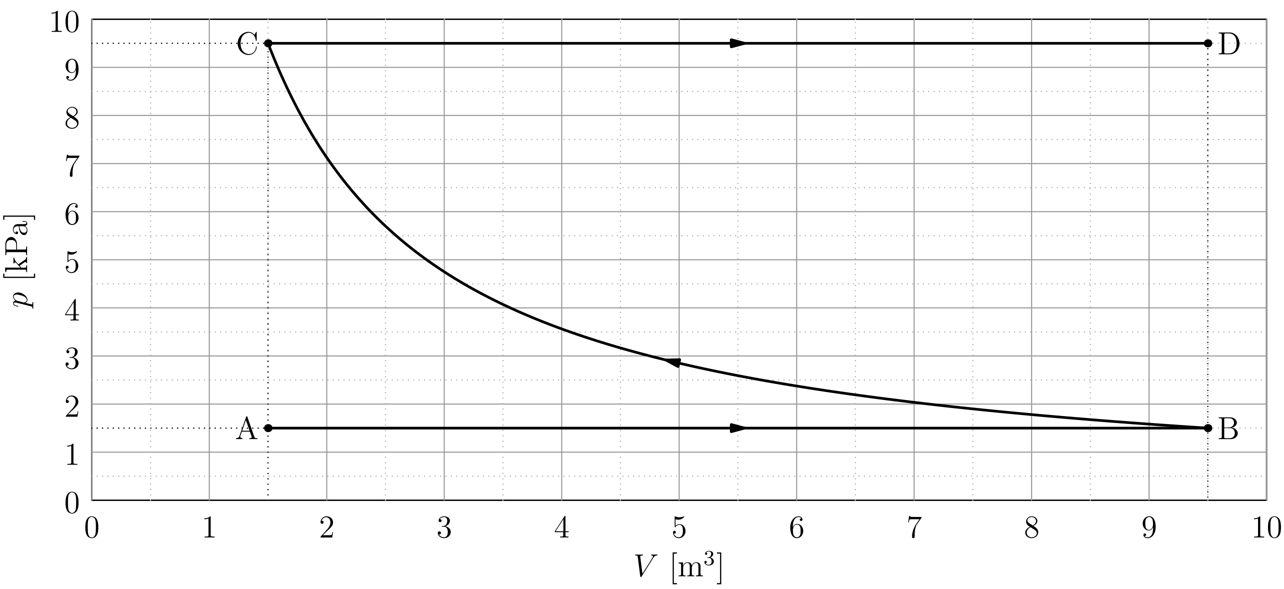
168 Zadanie – Entropia gazu

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-termodynamika-0021000, diff: 3

Zmianę entropii gazu doskonałego wyraża uniwersalny dla każdej przemiany wzór.

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_p} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{T_k}{T_p}$$

n - liczba moli, R - uniwersalna stała gazowa, V_k - objętość końcowa, V_p - objętość początkowa, C_v - ciepło molowe przy stałej objętości, T_k - temperatura końcowa, T_p - temperatura początkowa.
Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego został poddany przemianie izotermicznej i dwóm przemianom izobarycznym. Końcowe ciśnienie gazu jest równe 9,5 kPa. Korzystając z przedstawionego wzoru oraz wykresu poniżej, oblicz zmianę entropii dla każdego z trzech procesów. Zinterpretuj otrzymane wyniki.



Wskazówka: Zmianę entropii w przemianie izobarycznej można zapisać

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta S = n \cdot C_p \ln \frac{V_B}{V_A}$$

ΔS - zmiana entropii, n - liczba moli, R - uniwersalna stała gazowa, V_B - ciśnienie w stanie B, V_A - ciśnienie w stanie A, T_A - temperatura w stanie A, T_B - temperatura w stanie B, C_v - ciepło molowe przy stałej objętości, C_p - ciepło molowe przy stałym ciśnieniu.

Wskazówka: Dla przemiany izotermicznej zmianę entropii można zapisać

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_C}{V_B} + n \cdot C_v \cdot \ln \frac{T_C}{T_B}$$

ponieważ temperatura jest stała, ostatni człon równania wynosi zero,

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_C}{V_B}$$

Odpowiedź: Zmiana entropii w procesie A-B jest równa 38,3 J/K, o tyle samo entropia zmienia się w procesie C-D. Można zauważyć, że zmiana entropii w procesie izobarycznym zależy tylko od zmiany objętości gazu i ciepła molowego przy stałym ciśnieniu. W procesie B-C zmiana entropii wynosi $-15{,}3$ J/K. Przemiany przedstawione na wykresie odpowiadają sytuacji, w której gaz jest zamknięty w pojemniku z ruchomym tłokiem. Przemiany A-B i C-D przedstawiają izobaryczne rozprężanie gazu, przemiana B-C izotermiczne sprężanie gazu. Czasami entropia jest określana jako miara nieuporządkowania gazu. W stanie A cząsteczki mogą zajmować mniejszą objętość pojemnika niż w stanie B. Są bardziej ściśnięte i „uporządkowane" niż w stanie B. Także temperatura w stanie A jest niższa - można powiedzieć, że ruch cząsteczek jest bardziej „uporządkowany". Gaz, rozprężając się, zwiększa zajmowaną objętość pojemnika, cząsteczki są bardziej „nieuporządkowane". Również temperatura rośnie. W przemianie A-B entropia wzrasta. W przemianie izotermicznej B-C ściskając gaz, zmniejszamy zajmowaną przez niego objętość. Cząsteczki w stanie C są bardziej „uporządkowane" przestrzennie niż w stanie B. W przemianie B-C entropia gazu maleje. W przemianie C-D gaz zachowuje się tak samo, jak w przemianie A-B, rozpręża się. Entropia gazu rośnie.

169 Zadanie – Równanie van der Waalsa

Małgorzata Berajter, update: 2017-07-15, id: pl-termodynamika-0022000, diff: 3

Porcję 1,7 kg etanu ogrzano od temperatury 330 K do temperatury 390 K. Podczas przemiany objętość gazu wzrosła od 4 m^3 do 8 m^3. Zakładając, że gaz spełnia równanie van der Waalsa, oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu. Załóż, że masa molowa użytego gazu to 30 g/mol, ciepło molowe przy stałej objętości 44,2 J/(K·mol), a stałe występujące w równaniu van der Waalsa $a = 0{,}549$ J·m^3/(mol)^2, $b = 0{,}064 \cdot 10^{-3}$ m^3/mol.

Wskazówka: Równanie van der Waalsa dla dowolnej masy gazu ma postać:

$$(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2})(V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

p - ciśnienie gazu, n - liczba moli, a - stała uwzględniająca oddziaływania między cząsteczkami, V - objętość gazu, b - stała uwzględniająca rozmiary gazu, R - uniwersalna stała gazowa, T - temperatura gazu.

Wskazówka:

$$U(T,V)$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$dU = C_v \cdot dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right] dV$$

dU - zmiana energii wewnętrznej gazu, C_v - ciepło molowe przy stałym ciśnieniu.

Wskazówka: Ciśnienie wyznaczone z równania van der Waalsa jest równe

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V - n \cdot b} - \frac{n^2 \cdot a}{V^2}$$

Wskazówka:

$$\Delta U = n \cdot C_v(T_2 - T_1) - n^2 \cdot a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

Odpowiedź: Zmiana energii wewnętrznej gazu wynosi 151 kJ.

170 Zadanie – Wzory redukcyjne 1

Magda Gładka, update: 2017-05-10, id: pl-trygonometria-0001000, diff: 1

Oblicz:
a) $(-2\sin 240^\circ + 6\,\mathrm{tg}\,60^\circ) \cdot 2\cos 180^\circ =$
b) $-2\sin 60^\circ + 3\cos 60^\circ =$
c) $(3\sin 210^\circ - \cos 240^\circ)\cdot(\ 3\sin 210^\circ + \cos 240^\circ) =$

Odpowiedź: a) $-24{,}2$
b) $-0{,}232$
c) 2

171 Zadanie – Wzory redukcyjne 2

Magda Gładka, update: 2017-05-10, id: pl-trygonometria-0002000, diff: 2

Oblicz:
a) $(-4\sin(-315^\circ) + 6\,\mathrm{tg}\,540^\circ) \cdot 3\cos 930^\circ =$
b) $6\sin 930^\circ + 2\cos(-225^\circ) =$
c) $(2\sin 540^\circ - \cos(-315^\circ))\cdot(\ 2\sin(-225^\circ) + \cos(-225^\circ)) =$
d) $\mathrm{tg}\,930^\circ \cdot \sin 540^\circ + \sin 930^\circ \cdot \cos(-315^\circ) - \sin(-225^\circ) =$
e) $(\mathrm{tg}\,780^\circ)^2 - 3(\mathrm{ctg}\,420^\circ)^2 =$
f) $\sin^2(-315^\circ) + \cos^2(-315^\circ) =$

Odpowiedź: a) 7,35
b) $-4{,}41$
c) $-0{,}5$
d) $-1{,}06$
e) 2
f) 1

172 Zadanie – Wzory redukcyjne 3

Magda Gładka, update: 2017-05-10, id: pl-trygonometria-0003000, diff: 2

Oblicz:
a) $(\sin(-378°)+4\cos(-378°))^2-2\cdot4\cos(-378°)\sin(-378°)=$
b) $4\sin769°+2\cos(-153°)=$
c) $(2\sin185°-\cos(-378°))\cdot(2\sin(-153°)+\cos(-153°))=$
d) $\operatorname{tg}769°\cdot\sin185°+\sin769°\cdot\cos(-378°)-\sin(-153°)=$
e) $(\operatorname{tg}780°)^2-3(\operatorname{ctg}420°)^2=$
f) $\sin^2(-378°)-\cos^2(-378°)=$

Odpowiedź: a) 14,57
b) 1,24
c) 2,025
d) 1,07
e) 2
f) $-0{,}809$

173 Zadanie – Zbiory liczb naturalnych

Piotr Nieżurawski, update: 2018-02-05, id: pl-zbiory-0001000, diff: 1

Zbiory A, B i C składają się z następujących elementów:

$A=\{2,6,7,9,16,18\}$

$B=\{2,6,8,13,16\}$

$C=\{2,6,7,9,10,11,18,21,24,25\}$

Określ:
a) sumę $A\cup B$,
b) sumę $B\cup C$,
c) sumę $A\cup B\cup C$,
d) różnicę $A\setminus B$,
e) różnicę $B\setminus C$,
f) różnicę $A\setminus C$,
g) iloczyn (część wspólną) $A\cap B$,
h) iloczyn $B\cap C$,
i) iloczyn $A\cap C$,
j) iloczyn $A\cap B\cap C$.

Odpowiedź:
a) $A\cup B=\{2,6,7,8,9,13,16,18\}$
b) $B\cup C=\{2,6,7,8,9,10,11,13,16,18,21,24,25\}$
c) $A\cup B\cup C=\{2,6,7,8,9,10,11,13,16,18,21,24,25\}$
d) $A\setminus B=\{7,9,18\}$
e) $B\setminus C=\{8,13,16\}$
f) $A\setminus C=\{16\}$
g) $A\cap B=\{2,6,16\}$
h) $B\cap C=\{2,6\}$
i) $A\cap C=\{2,6,7,9,18\}$
j) $A\cap B\cap C=\{2,6\}$

174 Zadanie – Działania na zbiorach

Piotr Nieżurawski, update: 2016-07-30, id: pl-zbiory-0003000, diff: 2

Uprość poniższe wyrażenia, w których występują zbiory A i B:
a) $(A \cup B) \setminus B$
b) $A \cup (B \setminus A)$
c) $(A \cap B) \setminus B$
d) $A \cap (B \setminus A)$

Odpowiedź:
a) $A \setminus B$
b) $A \cup B$
c) $\{\}$
d) $\{\}$