

Drgania

O. Harmoniczny

Dobrej fazy!

1 Zadanie – Zegar

Pewien zegar, posiadający wahadło ze srebra, odmierza dokładnie czas w temperaturze 19°C . Temperatura spadła do 4°C . O ile więcej wahań w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej srebra wynosi $18 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$. Jeden koniec pręta ze srebra zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt ze srebra jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

Odpowiedź: Zegar wykona o 11,7 więcej wahań na dobę.

2 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,5 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 0,8 cm.

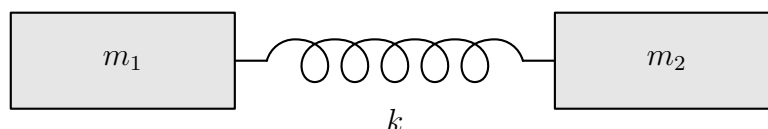
- Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszanej kulki o masie 1,5 kg.
- Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 2,25 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0,311 \text{ s}$, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.

b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0,269 \text{ s}$, gdzie m_3 to masa klocka.

3 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k . Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 39 \text{ N/m}$, $m_1 = 3 \text{ kg}$ oraz $m_2 = 4 \text{ kg}$.



Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

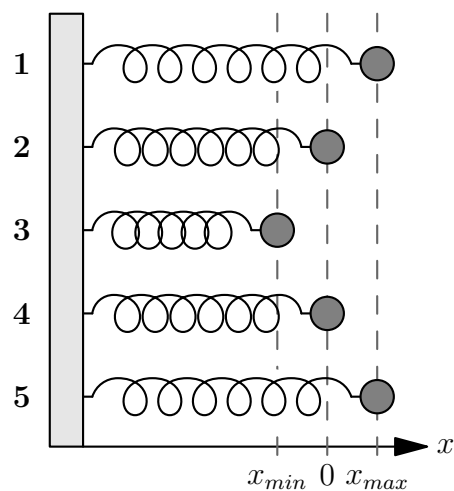
Wynik liczbowy $T \approx 1,32 \text{ s}$.

4 Zadanie – Oscylator harmoniczny

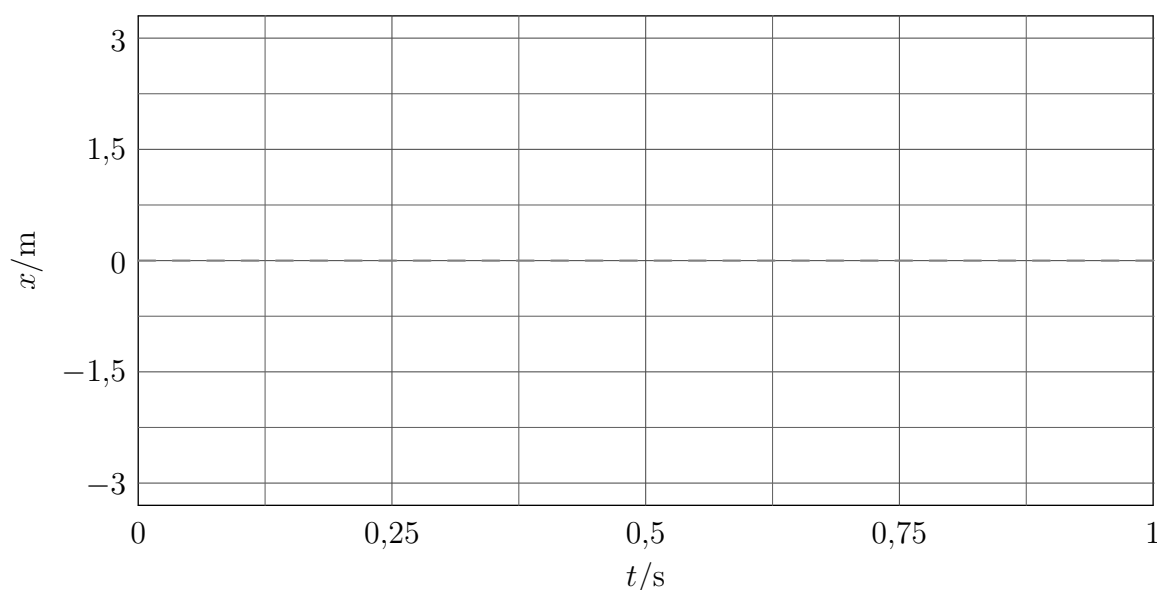
Przyjrzyjmy się prostemu układowi drgającemu, którego równanie ruchu ma postać:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

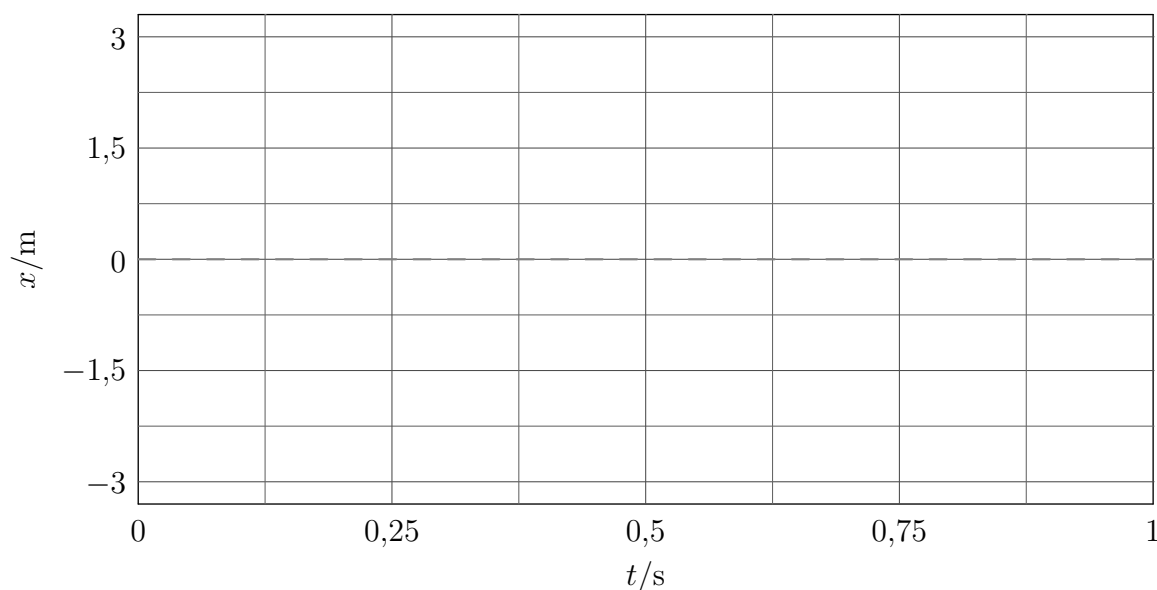
gdzie x_m , ω i ϕ są stałymi. Na rysunku można dostrzec ekstremalne momenty ruchu kulki: 1 i 5 odpowiadają maksymalnemu wychyleniu kulki, 3 minimalnemu. W momentach 2 i 4 kulka przechodzi przez położenie równowagi.



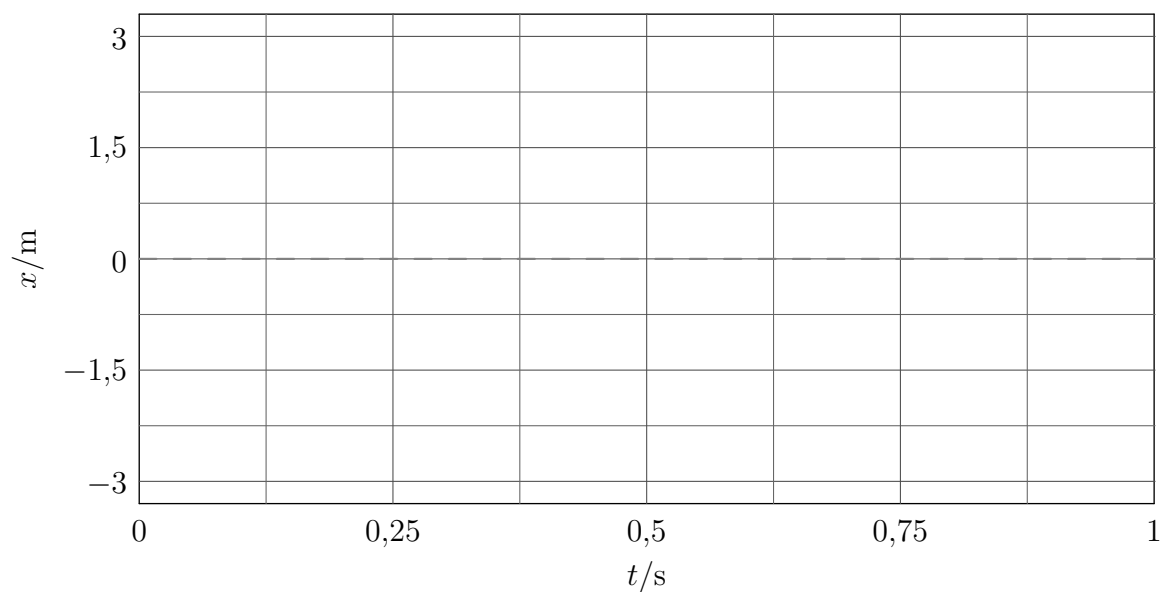
a) Narysuj wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu od momentu 1 do 5.



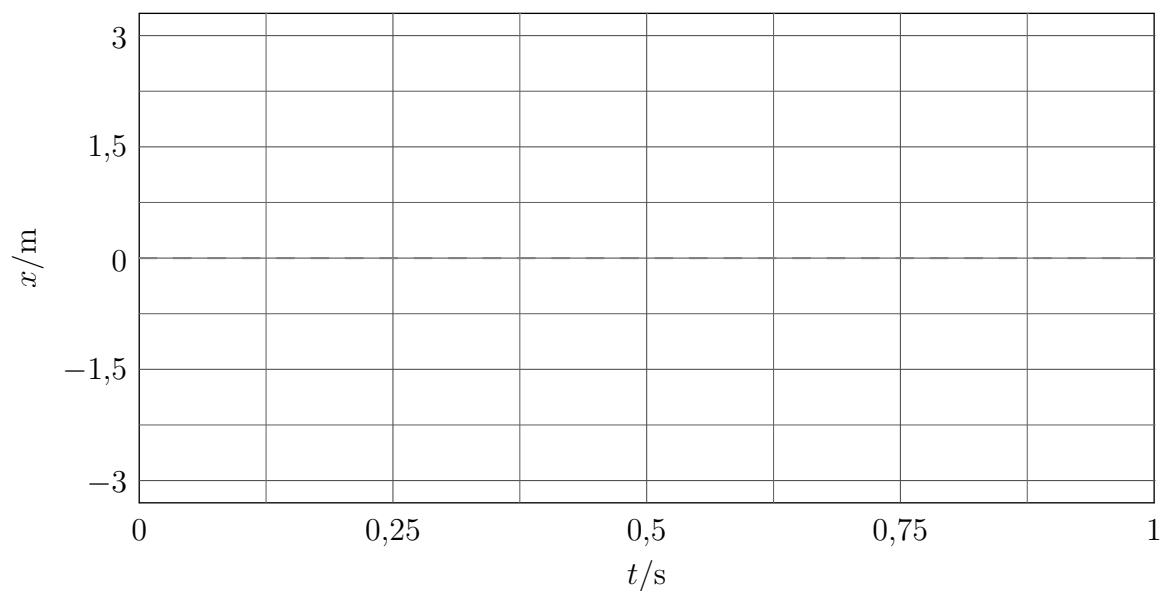
b) Narysuj wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Narysuj wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

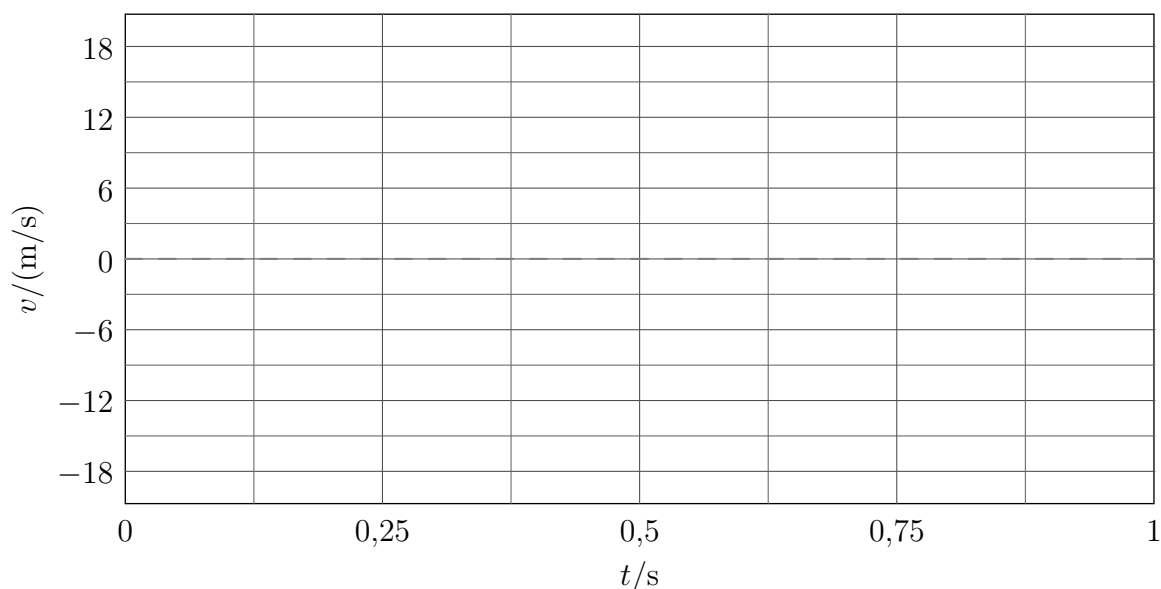


d) Narysuj wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



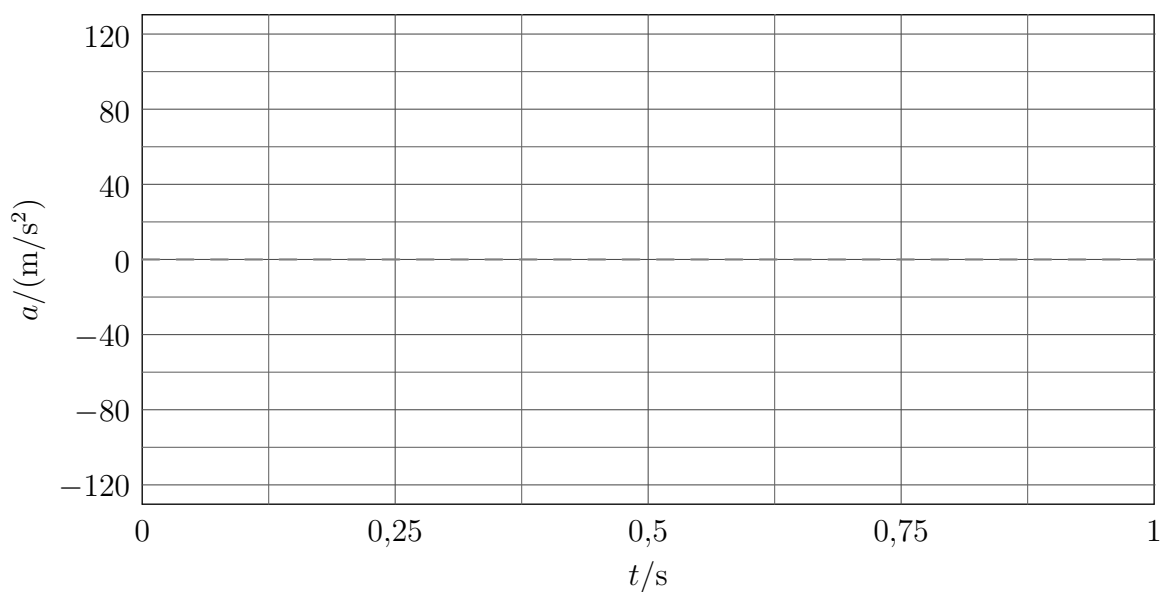
e) Jaką postać ma równanie opisujące prędkość kulki?

Narysuj wykres zależności prędkości kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



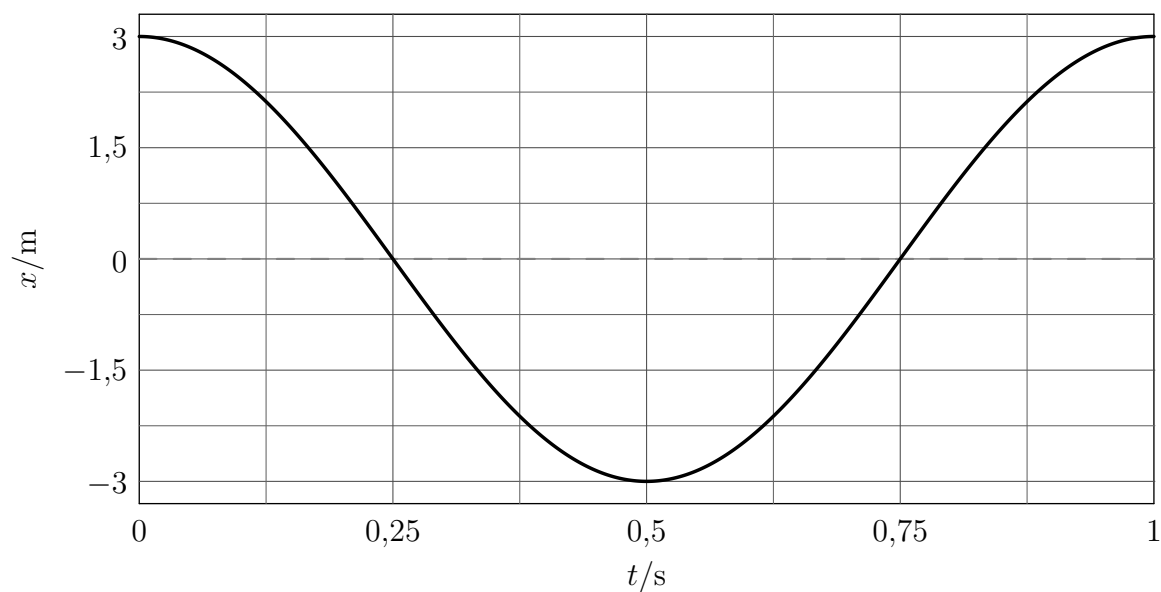
f) Jaką postać ma równanie opisujące przyspieszenie kulki?

Narysuj wykres zależności przyspieszenia kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).

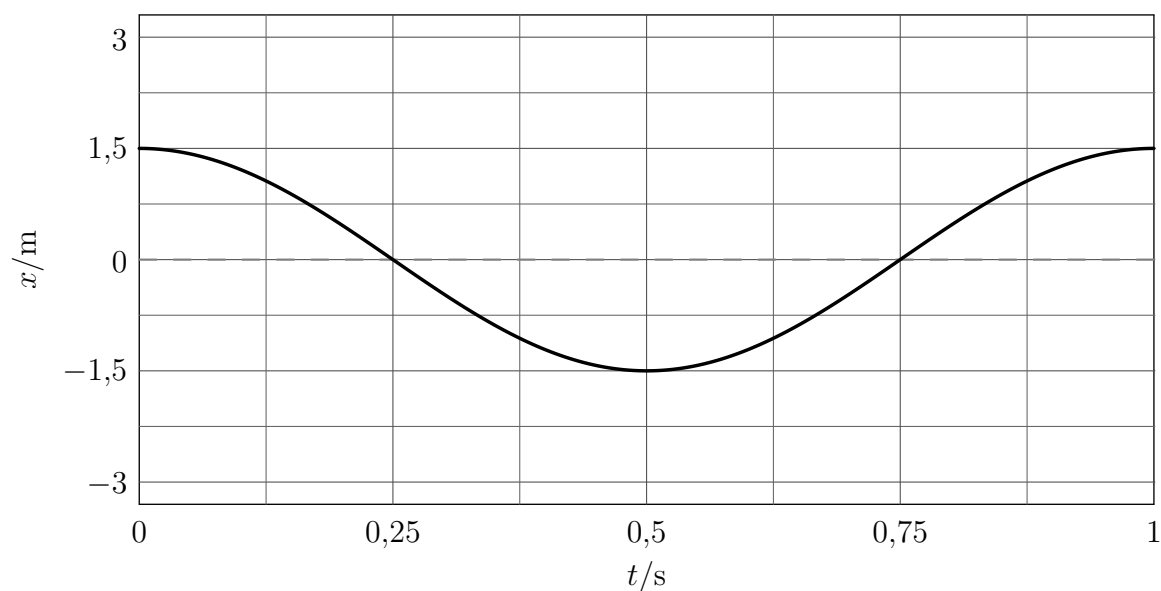


Odpowiedź:

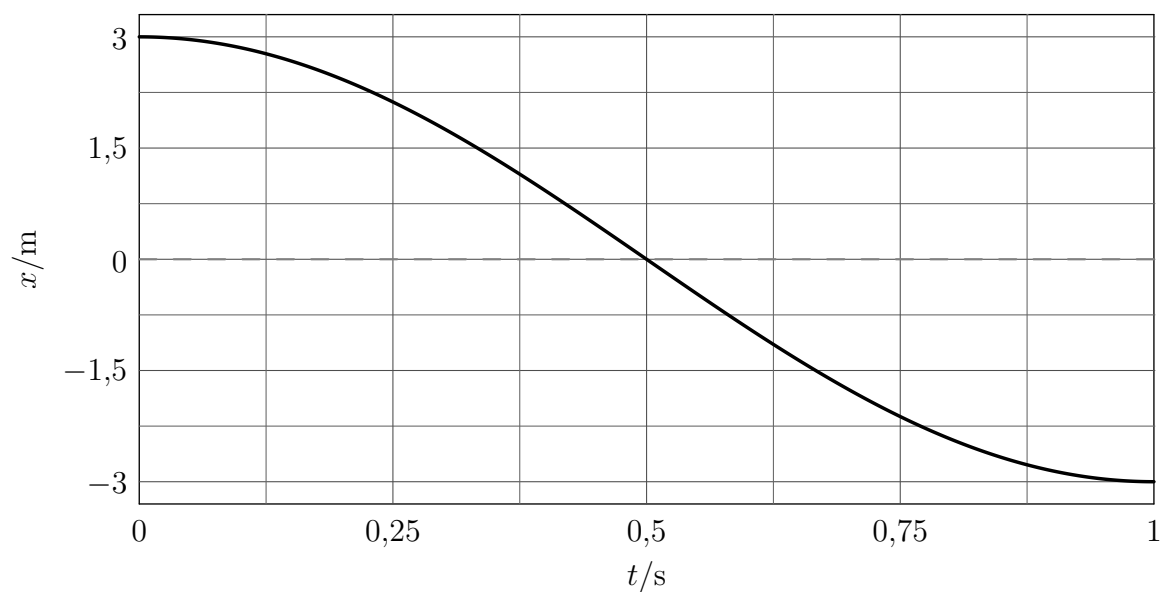
a) Wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu.



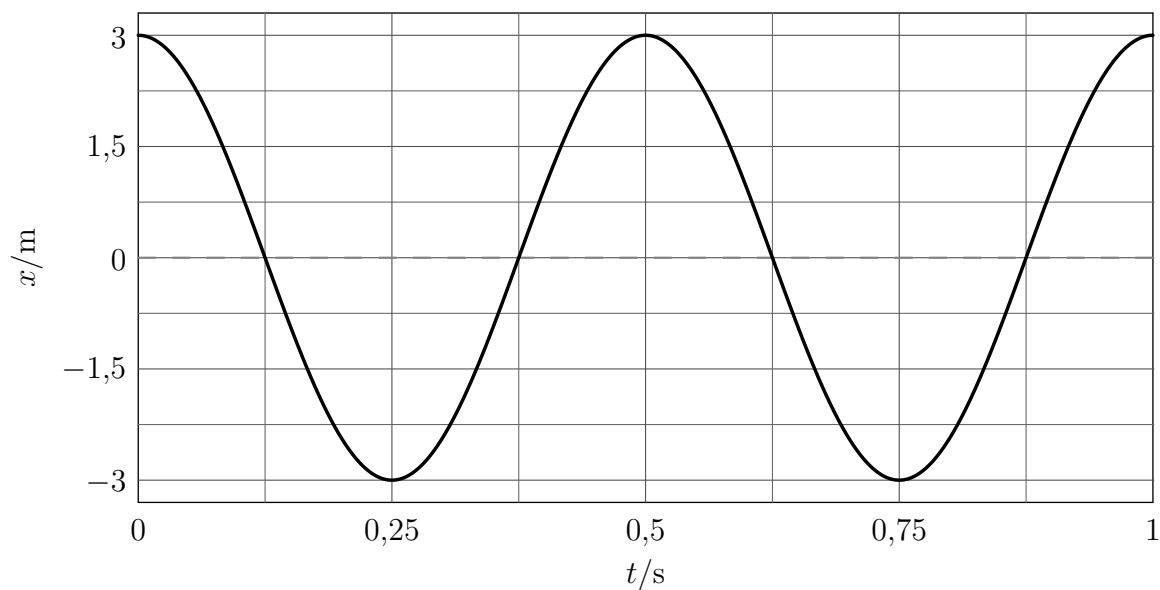
b) Wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).



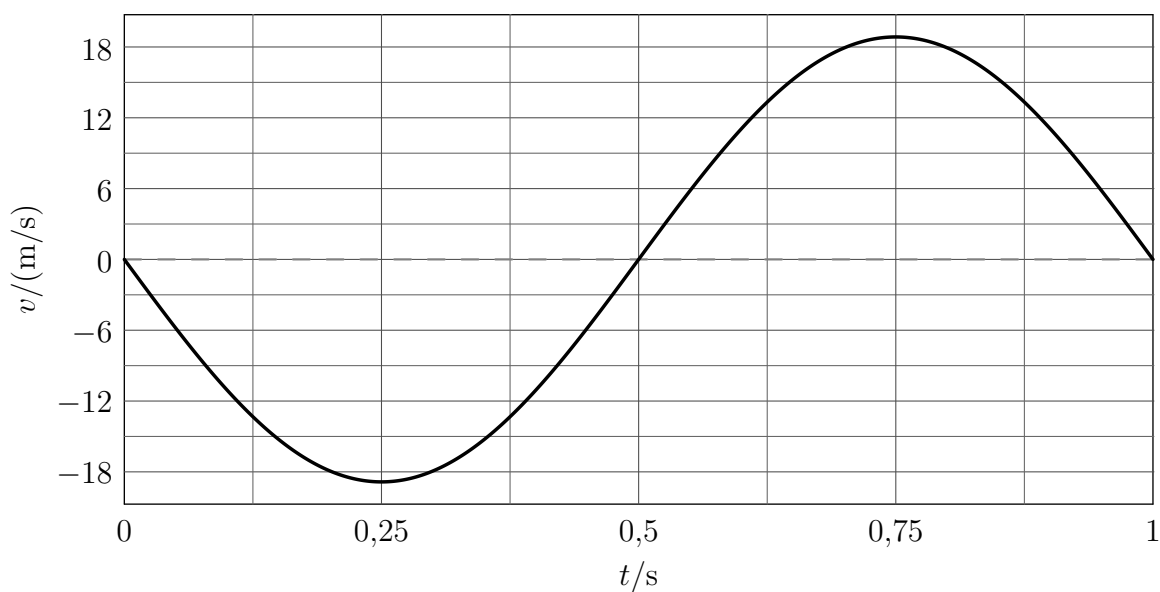
d) Wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



e) Wykres przedstawiający zależność prędkości kulki od czasu.

Równanie:

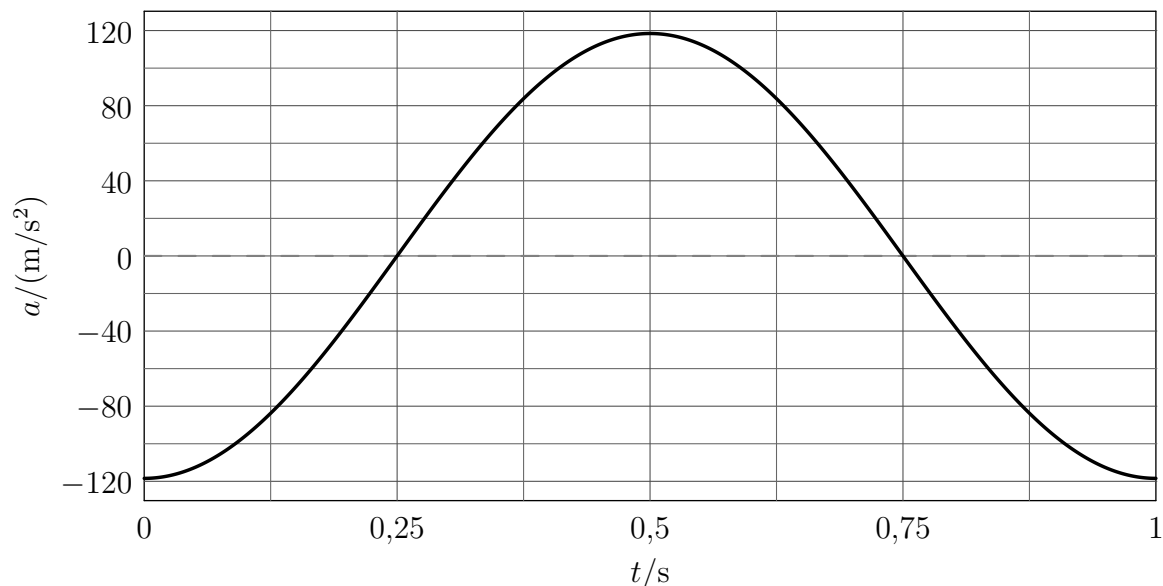
$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$



f) Wykres przedstawiający zależność przyspieszenia kulki od czasu.

Równanie:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



5 Zadanie – Kulka na sprężynie

Po idealnie gładkim stole porusza się kulka o masie 680 g, która umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości $63 \frac{N}{m}$. Kulkę odciągnięto na odległość 10 cm od położenia równowagi, a następnie puszczo swobodnie. Pomiń opory ruchu.

- Wyznacz amplitudę.
- Wyznacz okres drgań.
- Wyznacz częstotliwość
- Wyznacz częstość kołową.
- Wyznacz maksymalną prędkość kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
- Wyznacz maksymalne przyspieszenie kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięte.
- Wyznacz maksymalną energię potencjalną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
- Wyznacz maksymalną energię kinetyczną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

Odpowiedź:

- Amplituda wynosi: $x_m = 10$ cm.
- Okres drgań wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,653$ s, gdzie m to masa kulki, a k to stała sprężystości.
- Częstotliwość wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 1,53$ Hz.
- Częstość kołowa wynosi: $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 9,63 \frac{1}{s}$.
- Maksymalna prędkość kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
 $v_{max} = \omega x_m \approx 0,963 \frac{m}{s}$.
- Maksymalne przyspieszenie kulki zostaje osiągnięte na krańcach toru i wynosi:
 $a_{max} = \omega^2 x_m \approx 9,26 \frac{m}{s^2}$.
- Maksymalna energia potencjalna kulki zostaje osiągnięta na krańcach toru i wynosi:
 $E_{pot} = \frac{kx_m^2}{2} \approx 0,315$ J.
- Maksymalna energia kinetyczna kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
 $E_{kin} = \frac{mv_m^2}{2} \approx 0,315$ J.

6 Zadanie – Drgająca ciecz

Jaś nalał pewną ciecz o objętości 13 cm^3 do pionowo ustawionej U-rurki, której przekrój poprzeczny wynosił $0,6 \text{ cm}^2$. Następnie dmuchnął do jednego z ramion tak mocno, że poziom wody podniósł się w drugim ramieniu. Zmiany poziomu cieczy zachodzą jedynie w prostych fragmentach ramion rurki. Pomiń opory ruchu cieczy.

- Wykaż, że siła, która dąży do przywrócenia stanu równowagi, to siła harmoniczna.
- Oblicz częstotliwość, z jaką będzie drgała ciecz.

Odpowiedź:

a) Siła, która powoduje ruch to siła ciężkości: $Q = mg$, gdzie m to masa części cieczy, g to przyspieszenie ziemskie. Masę możemy wyrazić jako: $m = \rho V_{nad}$, gdzie ρ to gęstość cieczy, V_{nad} to objętość części cieczy. Objętość natomiast to: $V_{nad} = 2xS$, gdzie x to wychylenie cieczy ponad poziom równowagi, a S to przekrój poprzeczny. Zbierając wszystko razem otrzymujemy: $Q = 2Sg\rho x = kx$. Wartość siły ciężkości jest więc proporcjonalna do wychylenia cieczy z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi, zatem spełnia cechy siły harmoniczej.

b) Ciecz będzie drgała z częstotliwością: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2Sg}{V}} \approx 1,52 \text{ Hz}$.

7 Zadanie – Wahadło na planecie

Na pewnej planecie mała kulka o masie 50 g została zawieszona na nitce o długości 18 cm . Kulka waha się z okresem wynoszącym $0,6 \text{ s}$ oraz amplitudą znacznie mniejszą od długości nici. Opory ruchu można pominąć.

- Czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne tej planety? Jeśli tak, to ile ono wynosi?
- Jak zmieni się okres wahań kulki, jeżeli zwiększymy jej masę trzykrotnie?
- Jaka musi być długość nici, aby ta sama kulka wahała się z okresem równym $1,2 \text{ s}$?

Odpowiedź:

a) Tak, przyspieszenie grawitacyjne wynosi: $g = \frac{4\pi^2}{T^2}l \approx 19,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, gdzie l to długość nici, a T to okres drgań.

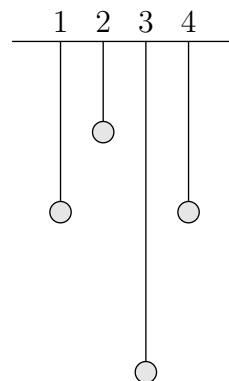
b) Okres wahań nie zależy od masy kulki, więc okres wahań się nie zmieni.

c) Długość nici musi wynosić: $L = 4l = 72 \text{ cm}$.

8 Zadanie – Rezonans mechaniczny

Na rozciągniętej poziomo lince zawieszamy cztery wahadła. W poniższej tabeli zestawiono wartości ich długości oraz mas zawieszonych ciężarków, gdzie l i m są jednostkami odpowiednio długości i masy.

numer wahadła	1	2	3	4
długość	l	$0,5l$	$2l$	l
masa	m	$2m$	m	$3m$



Pierwsze wahadło wprowadzono w ruch. Po pewnym czasie zaobserwowano ruch pozostałych

wahadeł. Które z nich miało największe wychylenie? Drugie, ponieważ znajduje się najbliżej? Trzecie, ponieważ ma taką samą masę? Czy może czwarte, ponieważ ma taką samą długość nici?

Odpowiedź: Najbardziej w ruch zostanie wprowadzone wahadło czwarte, ponieważ jego okres drgań jest równy okresowi drgań wahadła pierwszego.