Położenie równowagi, 5 lipca 2018 r.

Drgania

O. Harmoniczny

Dobrej fazy!

1 Zadanie – Zegar

Pewien zegar, posiadający wahadło z mosiądzu, odmierza dokładnie czas w temperaturze 25°C. Temperatura spadła do 2°C. O ile więcej wahnięć w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej mosiądzu wynosi $19 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Jeden koniec pręta z mosiądzu zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt z mosiądzu jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

Odpowiedź: Zegar wykona o 18,9 więcej wahnięć na dobę.

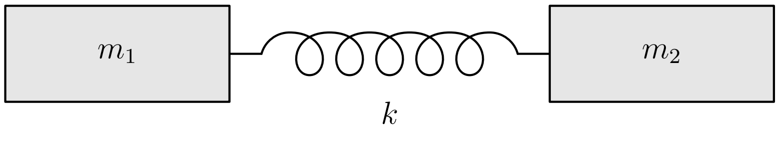
2 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,5 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 0,9 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 1,5 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 2,25 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}33$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2 m_1 g}} = 0{,}285$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

3 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 49$ N/m, $m_1 = 3$ kg oraz $m_2 = 6$ kg.



Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

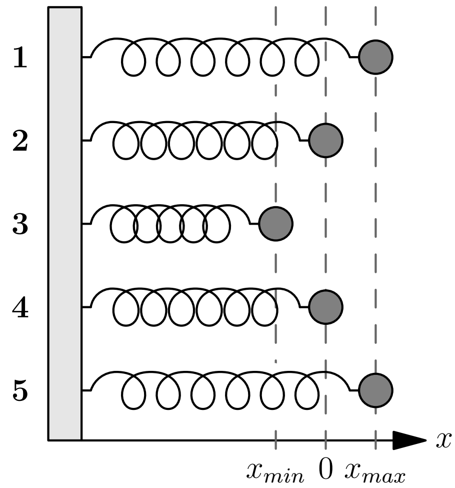
Wynik liczbowy $T \approx 1{,}27$ s.

4 Zadanie – Oscylator harmoniczny

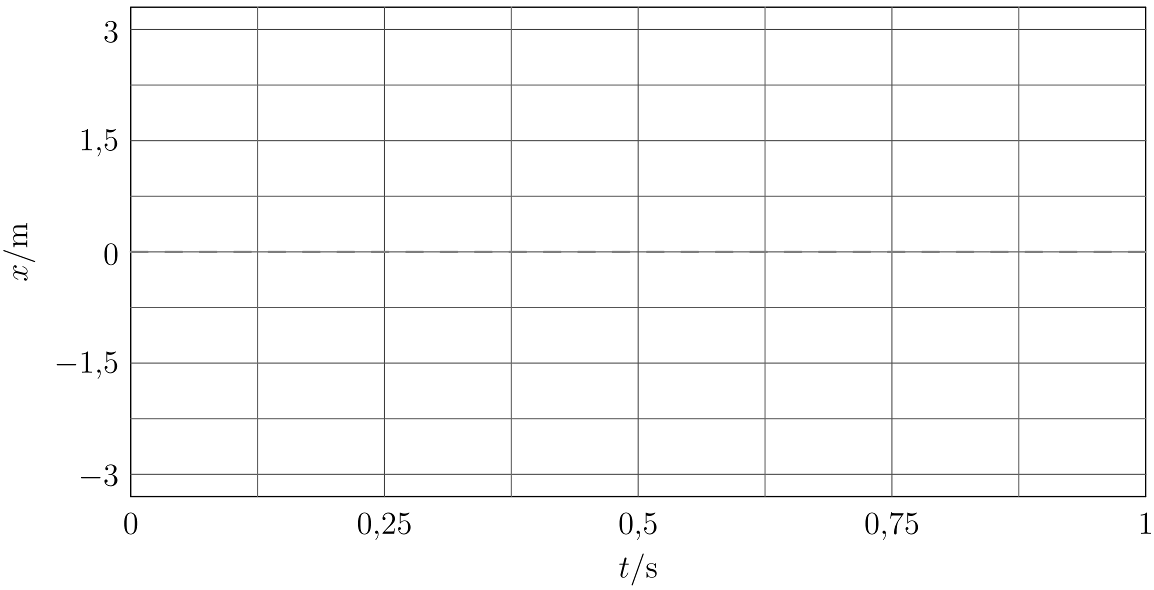
Przyjrzyjmy się prostemu układowi drgającemu, którego równanie ruchu ma postać:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

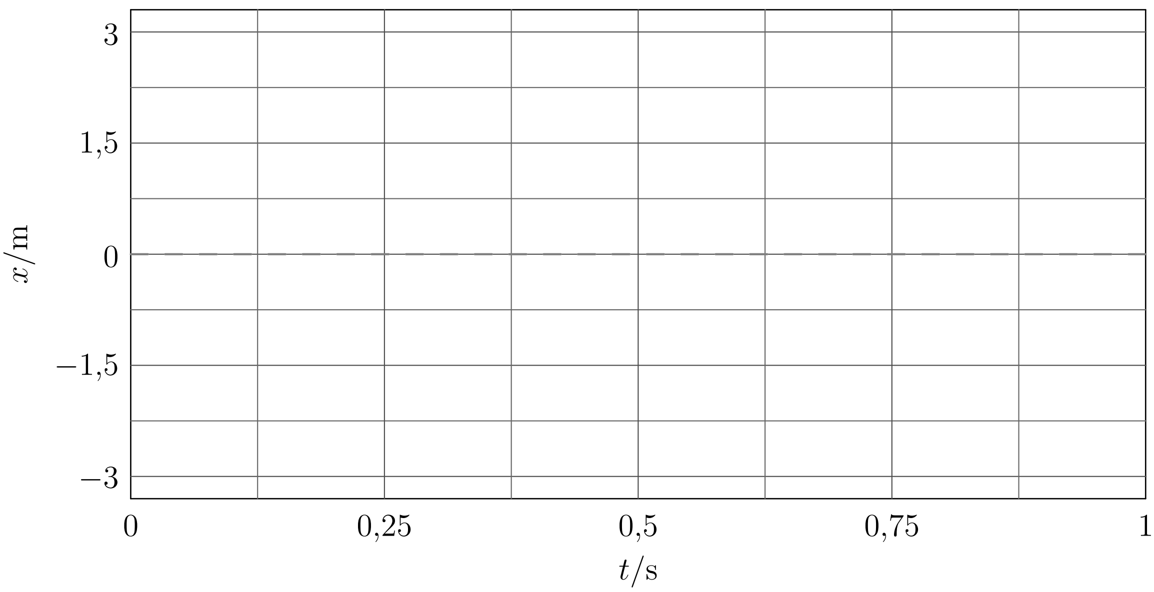
gdzie x_m, ω i ϕ są stałymi. Na rysunku można dostrzec ekstremalne momenty ruchu kulki: 1 i 5 odpowiadają maksymalnemu wychyleniu kulki, 3 minimalnemu. W momentach 2 i 4 kulka przechodzi przez położenie równowagi.



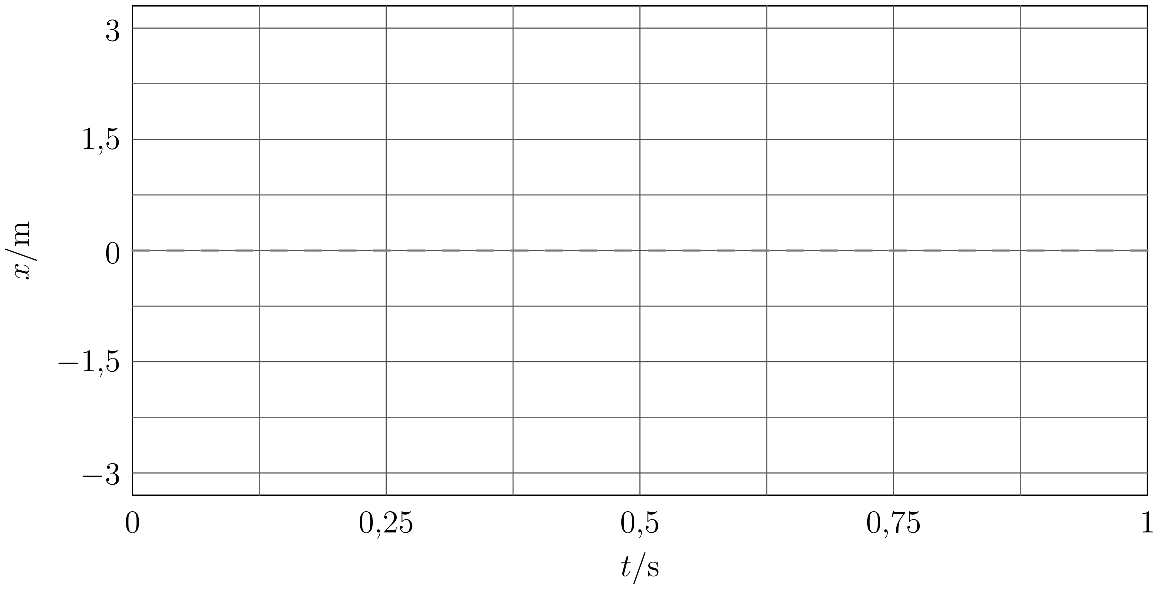
a) Narysuj wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu od momentu 1 do 5.



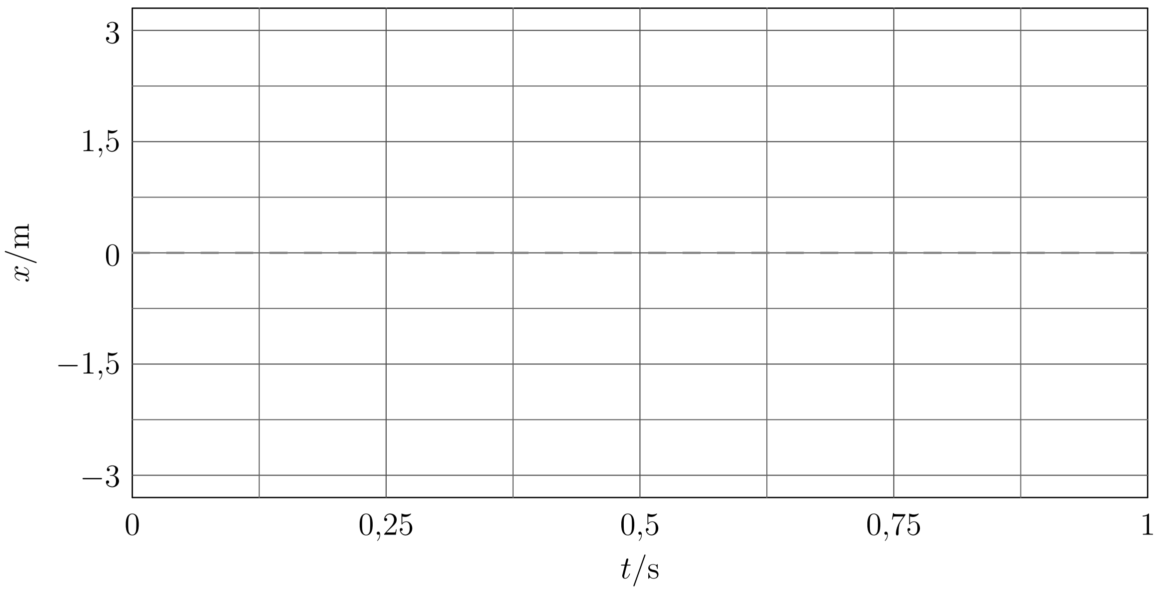
b) Narysuj wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Narysuj wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

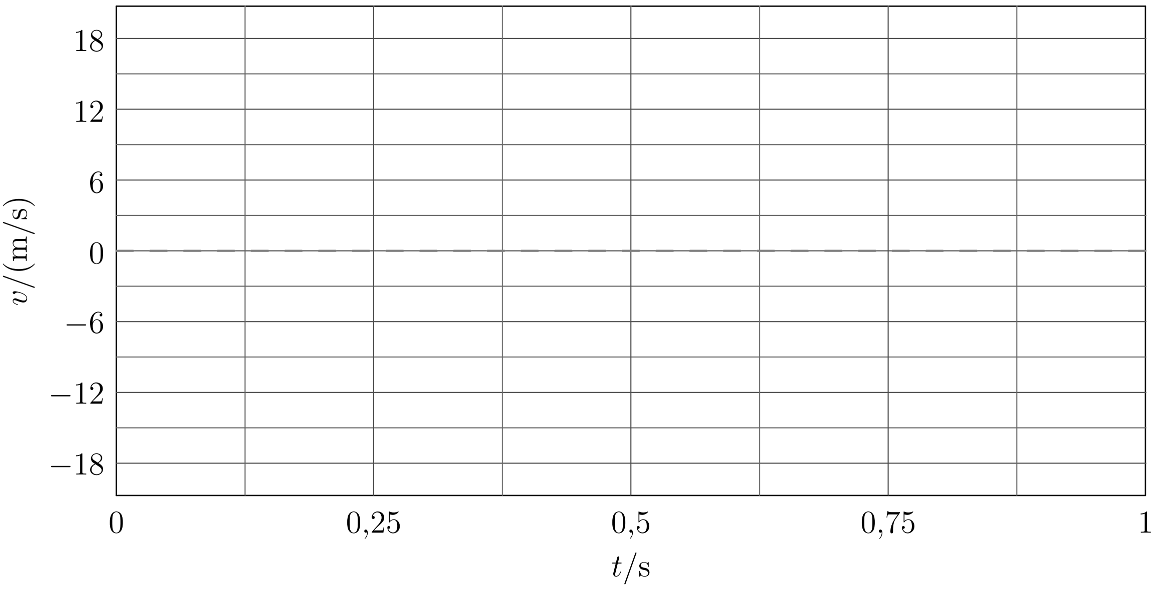


d) Narysuj wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



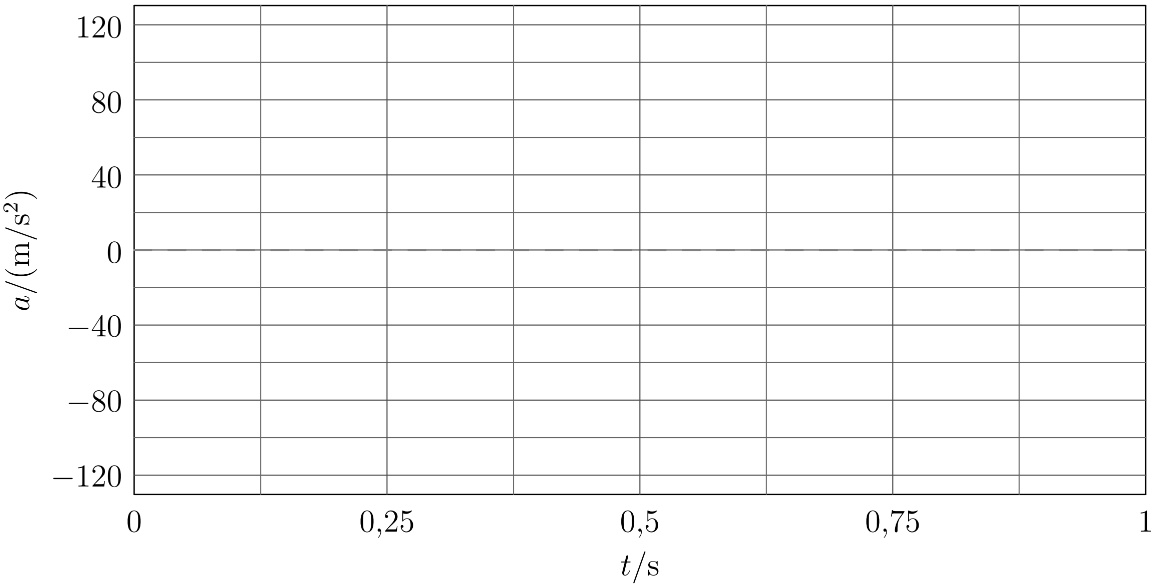
e) Jaką postać ma równanie opisujące prędkość kulki?

Narysuj wykres zależności prędkości kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



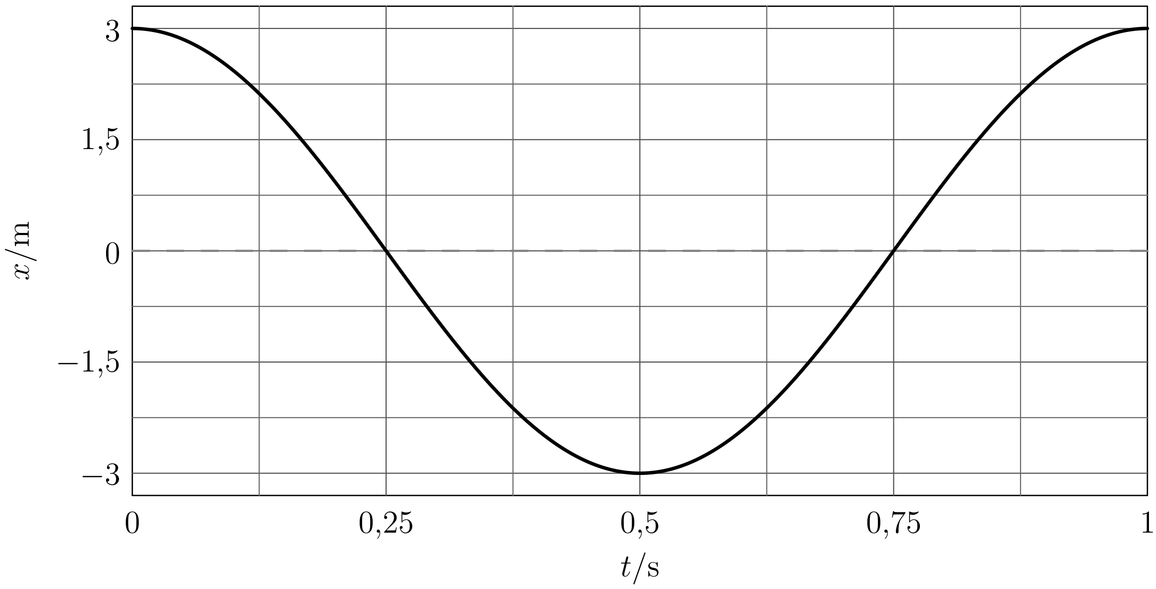
f) Jaką postać ma równanie opisujące przyspieszenie kulki?

Narysuj wykres zależności przyspieszenia kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).

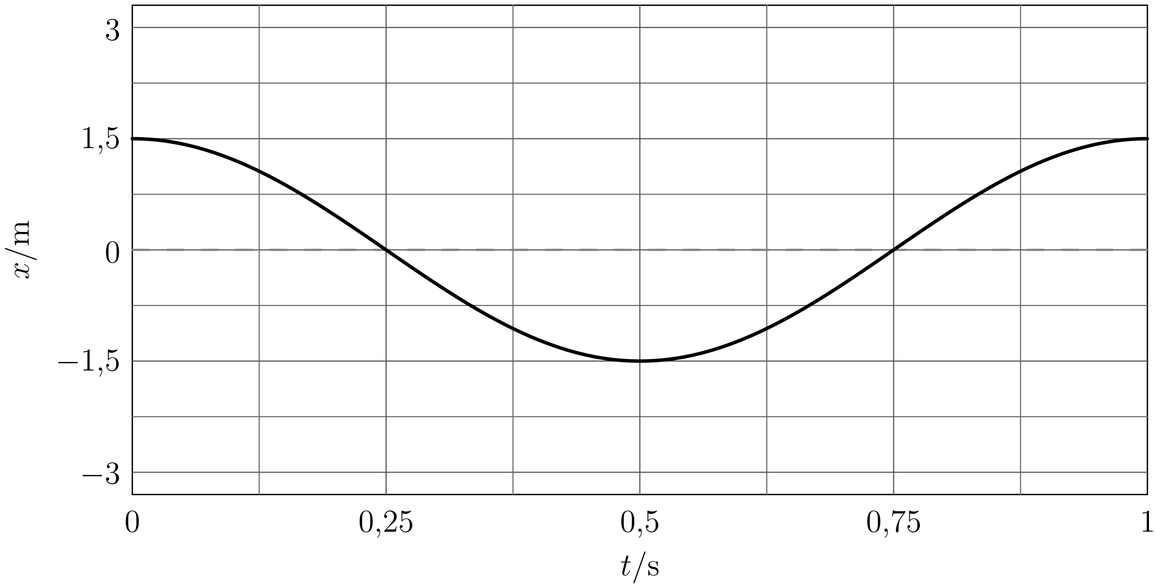


Odpowiedź:

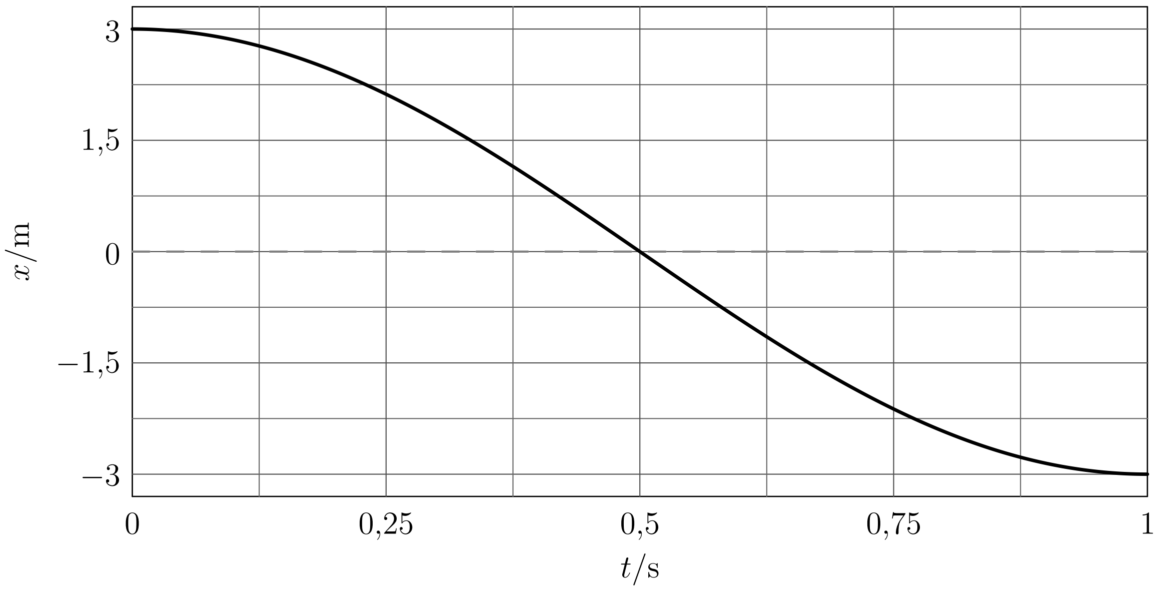
a) Wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu.



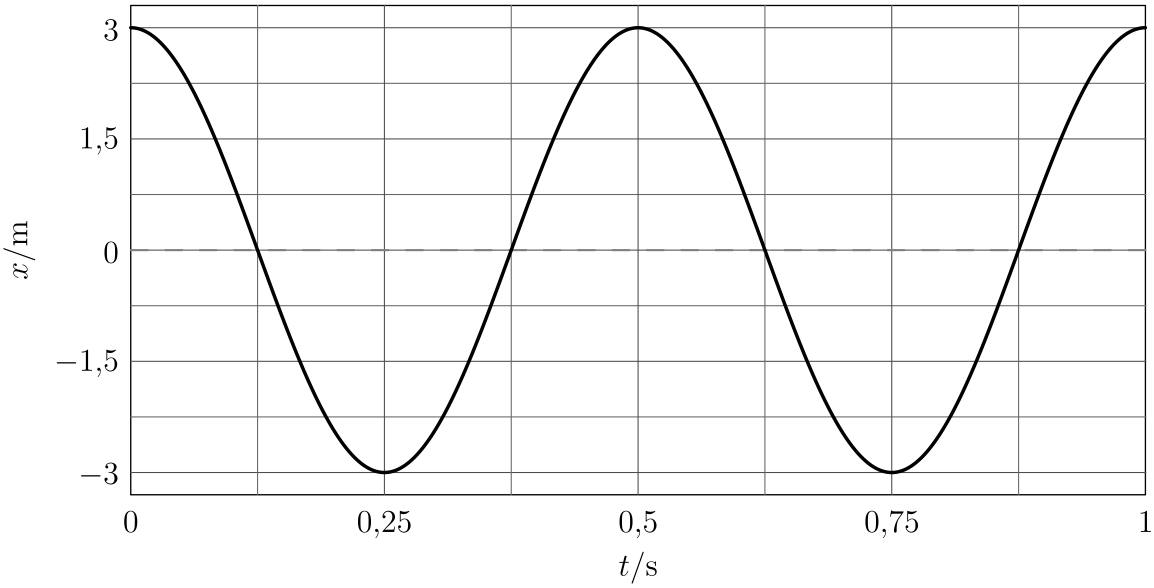
b) Wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

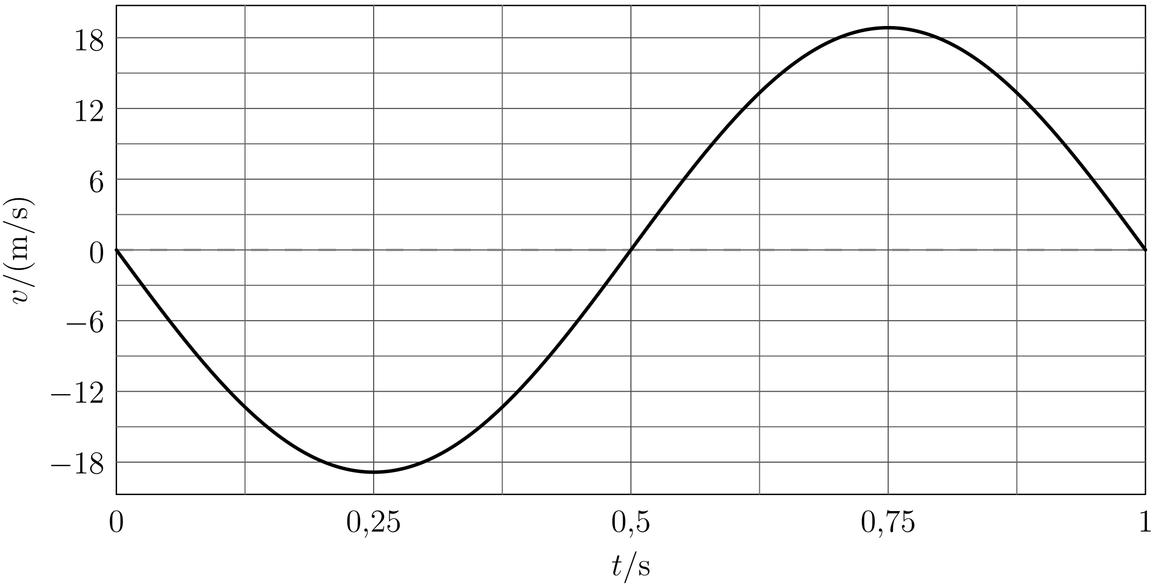


d) Wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



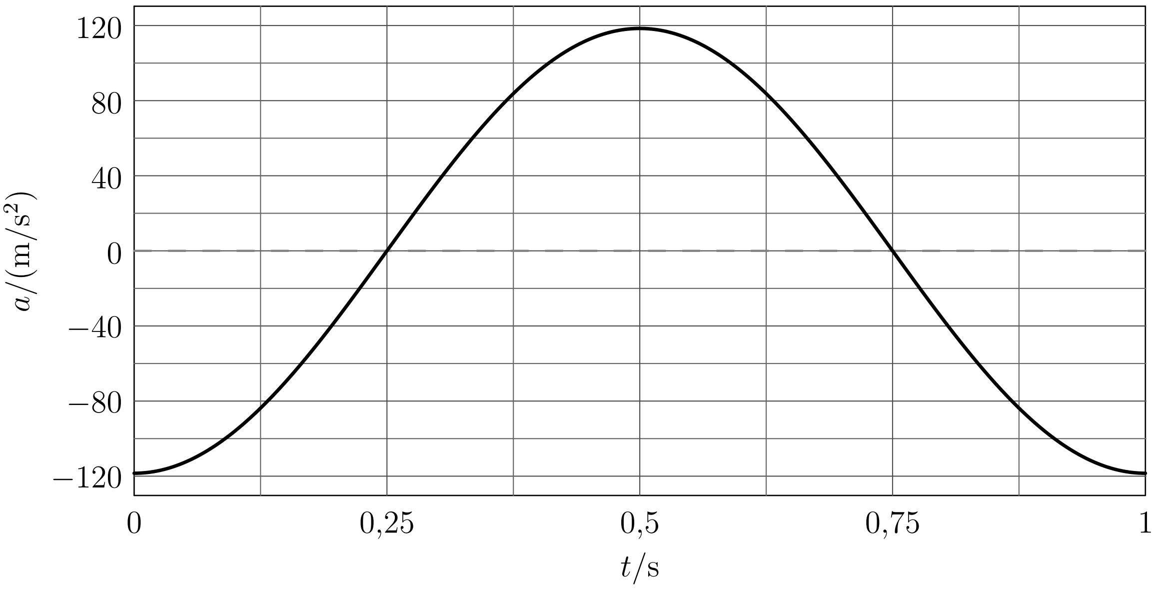
e) Wykres przedstawiający zależność prędkości kulki od czasu.
Równanie:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$



f) Wykres przedstawiający zależność przyspieszenia kulki od czasu.
Równanie:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



5 Zadanie – Kulka na sprężynie

Po idealnie gładkim stole porusza się kulka o masie 680 g, która umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości 65 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Kulkę odciągnięto na odległość 12 cm od położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie. Pomiń opory ruchu.
a) Wyznacz amplitudę.
b) Wyznacz okres drgań.
c) Wyznacz częstotliwość
d) Wyznacz częstość kołową.
e) Wyznacz maksymalną prędkość kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
f) Wyznacz maksymalne przyspieszenie kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięte.
g) Wyznacz maksymalną energię potencjalną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
h) Wyznacz maksymalną energię kinetyczną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

Odpowiedź:
a) Amplituda wynosi: $x_m = 12$ cm.
b) Okres drgań wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}643$ s, gdzie m to masa kulki, a k to stała sprężystości.
c) Częstotliwość wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 1{,}56$ Hz.
d) Częstość kołowa wynosi: $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 9{,}78\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
e) Maksymalna prędkość kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$v_{max} = \omega x_m \approx 1{,}17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
f) Maksymalne przyspieszenie kulki zostaje osiągnięte na krańcach toru i wynosi:
$a_{max} = \omega^2 x_m \approx 11{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
g) Maksymalna energia potencjalna kulki zostaje osiągnięta na krańcach toru i wynosi:
$E_{pot} = \frac{k{x_m}^2}{2} \approx 0{,}468$ J.
h) Maksymalna energia kinetyczna kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$E_{kin} = \frac{m{v_m}^2}{2} \approx 0{,}468$ J.

6 Zadanie – Drgająca ciecz

Jaś nalał pewną ciecz o objętości 12 cm^3 do pionowo ustawionej U-rurki, której przekrój poprzeczny wynosił 0,5 cm^2. Następnie dmuchnął do jednego z ramion tak mocno, że poziom wody podniósł się w drugim ramieniu. Zmiany poziomu cieczy zachodzą jedynie w prostych fragmentach ramion rurki. Pomiń opory ruchu cieczy.
a) Wykaż, że siła, która dąży do przywrócenia stanu równowagi, to siła harmoniczna.
b) Oblicz częstotliwość, z jaką będzie drgała ciecz.

Odpowiedź:
a) Siła, która powoduje ruch to siła ciężkości: $Q = mg$, gdzie m to masa części cieczy, g to przyspieszenie ziemskie. Masę możemy wyrazić jako: $m = \rho V_{nad}$, gdzie ρ to gęstość cieczy, V_{nad} to objętość części cieczy. Objętość natomiast to: $V_{nad} = 2xS$, gdzie x to wychylenie cieczy ponad poziom równowagi, a S to przekrój poprzeczny. Zbierając wszystko razem otrzymujemy: $Q = 2Sg\rho x = kx$. Wartość siły ciężkości jest więc proporcjonalna do wychylenia cieczy z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi, zatem spełnia cechy siły harmonicznej.
b) Ciecz będzie drgała z częstotliwością: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Sg}{V}} \approx 1{,}44$ Hz.

7 Zadanie – Wahadło na planecie

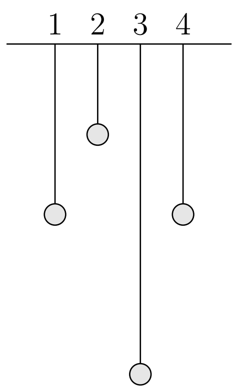
Na pewnej planecie mała kulka o masie 45 g została zawieszona na nitce o długości 22 cm. Kulka waha się z okresem wynoszącym 0,6 s oraz amplitudą znacznie mniejszą od długości nici. Opory ruchu można pominąć.
a) Czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne tej planety? Jeśli tak, to ile ono wynosi?
b) Jak zmieni się okres wahań kulki, jeżeli zwiększymy jej masę trzykrotnie?
c) Jaka musi być długość nici, aby ta sama kulka wahała się z okresem równym 1,2 s?

Odpowiedź:
a) Tak, przyspieszenie grawitacyjne wynosi: $g = \frac{4\pi^2}{T^2}l \approx 24{,}1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, gdzie l to długość nici, a T to okres drgań.
b) Okres wahań nie zależy od masy kulki, więc okres wahań się nie zmieni.
c) Długość nici musi wynosić: $L = 4l = 88$ cm.

8 Zadanie – Rezonans mechaniczny

Na rozciągniętej poziomo lince zawieszamy cztery wahadła. W poniższej tabeli zestawiono wartości ich długości oraz mas zawieszonych ciężarków, gdzie l i m są jednostkami odpowiednio długości i masy.

numer wahadła	1	2	3	4
długość	l	$0{,}5l$	$2l$	l
masa	m	$2m$	m	$3m$



Pierwsze wahadło wprawiono w ruch. Po pewnym czasie zaobserwowano ruch pozostałych wahadeł. Które z nich miało największe wychylenie? Drugie, ponieważ znajduje się najbliżej? Trzecie, ponieważ ma taką samą masę? Czy może czwarte, ponieważ ma taką samą długość nici?

Odpowiedź: Najbardziej w ruch zostanie wprawione wahadło czwarte, ponieważ jego okres drgań jest równy okresowi drgań wahadła pierwszego.

9 Zadanie – Zanurzone wahadło [do dokończenia]

Na nieważkiej nici o długości $L = 1$ m zawieszono kulkę o promieniu $R = 1$ cm zrobioną z korkao gęstości $\rho_k = 250$ kg/m^3. Całość zanurzono w powietrzu o współczynniku lepkości $\eta = 0{,}000018$ Pa·s i gęstości $\rho_s = 12$ kg/m^3. Następnie kulkę wychylono z położenia równowagi o kąt $\alpha_0 = 3°$ i swobodnie puszczono. Kulka, przemieszczając się, ciągnie ze sobą lepką ciecz. Chcąc uwzględnić ten efekt w obliczeniach, musisz przyjąć, że oprócz kulki na wahadle znajduje się tzw. masa dołączona (wirtualna) równa masie cieczy o objętości równej połowie objętości wahającej się kulki. Oblicz jaką drogę przebędzie kulko do momentu zatrzymania się. W obliczeniach przyjmij, że siła oporu wyraża się wzorem Stokesa: $F = -6\pi\eta Rv$.

Odpowiedź: Dystans przebyty przez kulkę wynosi:

$$S = L\alpha_0 \left(1 + \frac{4R^2(2\rho_k + \rho_s)\sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{g\eta}{LR^2(2\rho_k+\rho_o)}\right)^2}}{9\eta\pi} \right)$$