Położenie równowagi, 5 lipca 2018 r.

Drgania

O. Harmoniczny

Dobrej fazy!

1 Zadanie – Zegar

Małgorzata Berajter, update: 2017-09-06, id: pl-ciepło-0003500, diff: 2

Pewien zegar, posiadający wahadło z mosiądzu, odmierza dokładnie czas w temperaturze 25°C. Temperatura spadła do 2°C. O ile więcej wahnięć w ciągu doby wykona zegar w niższej temperaturze? Przyjmij, że współczynnik rozszerzalności cieplnej mosiądzu wynosi $19 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Jeden koniec pręta z mosiądzu zamocowany jest w taki sposób, by mógł obracać się w płaszczyźnie pionowej. Do drugiego końca pręta przymocowany jest ciężarek. Długość pręta jest znacznie większa od rozmiarów ciężarka. Pręt z mosiądzu jest znacznie lżejszy niż przyczepiony do niego ciężarek.

Wskazówka: Okres wahadła w temperaturze początkowej wynosi 1 s.

Wskazówka:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

P - okres drgań, l - długość wahadła, g - przyspieszenie ziemskie.

Wskazówka: Zmiana długości pręta:

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta T \cdot l$$

ΔT - zmiana temeperatury, α - współczynnik rozszerzalności liniowej.

Wskazówka:

$$\Delta n = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha\Delta T)}} - 1$$

Δn - zmiana liczby wahnięć w trakcie 1 s.

Odpowiedź: Zegar wykona o 18,9 więcej wahnięć na dobę.

2 Zadanie – Sprężyna

Magda Gładka, update: 2017-07-08, id: pl-dynamika-0008150, diff: 2

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,5 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 0,9 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 1,5 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 2,25 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Wskazówka: Jakie siły działają na zawieszony odważnik na sprężynie?

Wskazówka: Ciężarek zawieszony na sprężynie jest w równowadze, więc siła grawitacji F_g równoważy siłę sprężystości sprężyny F_s

$$F_g = F_s$$

$$m_1 g = k_1 x.$$

Wskazówka: Okres drgań wahadła sprężynowego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_1}}.$$

Wskazówka: W momencie, gdy łączymy szeregowo dwie takie same sprężyny, to współczynnik sprężystości nowej sprężyny można obliczyć z

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_2},$$

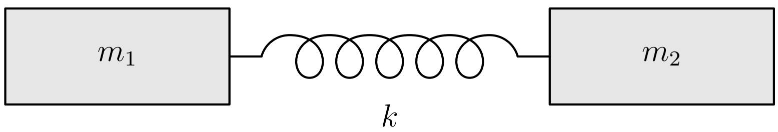
czyli $k_2 = 2k_1$.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}33$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0{,}285$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

3 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Piotr Nieżurawski, update: 2018-05-14, id: pl-dynamika-0008200, diff: 1

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 49$ N/m, $m_1 = 3$ kg oraz $m_2 = 6$ kg.



Wskazówka: Opiszmy położenie ciężarków za pomocą współrzędnych x_1 oraz x_2, przyjmijmy zwrot osi X w prawo. Odstęp między nimi to $u \equiv x_2 - x_1$.

Wskazówka: Niech l będzie długością swobodną sprężyny. Siła sprężystości działająca na drugi ciężarek będzie równa: $-k(u - l)$.

Wskazówka: Równiania ruchu dla obu ciężarków:

$$m_1 \ddot{x}_1 = +k(u - l)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(u - l)$$

Wskazówka: Po wyznaczeniu przyśpieszeń i odjęciu równań stronami otrzymujemy:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Ale

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{u}$$

Prowadzi to do równania oscylatora

$$\ddot{u} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 1{,}27$ s.

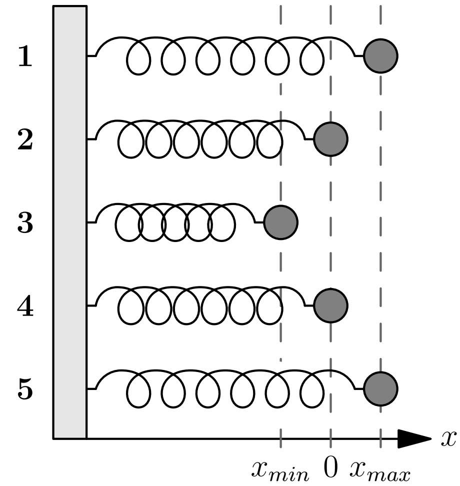
4 Zadanie – Oscylator harmoniczny

Klaudia Dec, update: 2018-04-03, id: pl-dynamika-drgania-0002000, diff: 1

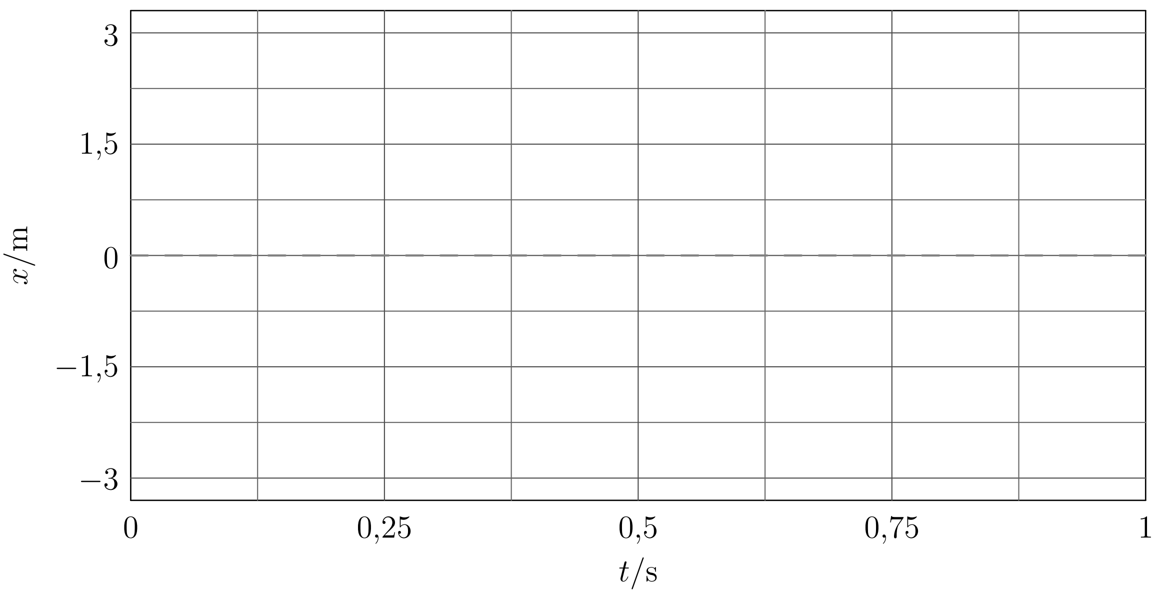
Przyjrzyjmy się prostemu układowi drgającemu, którego równanie ruchu ma postać:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

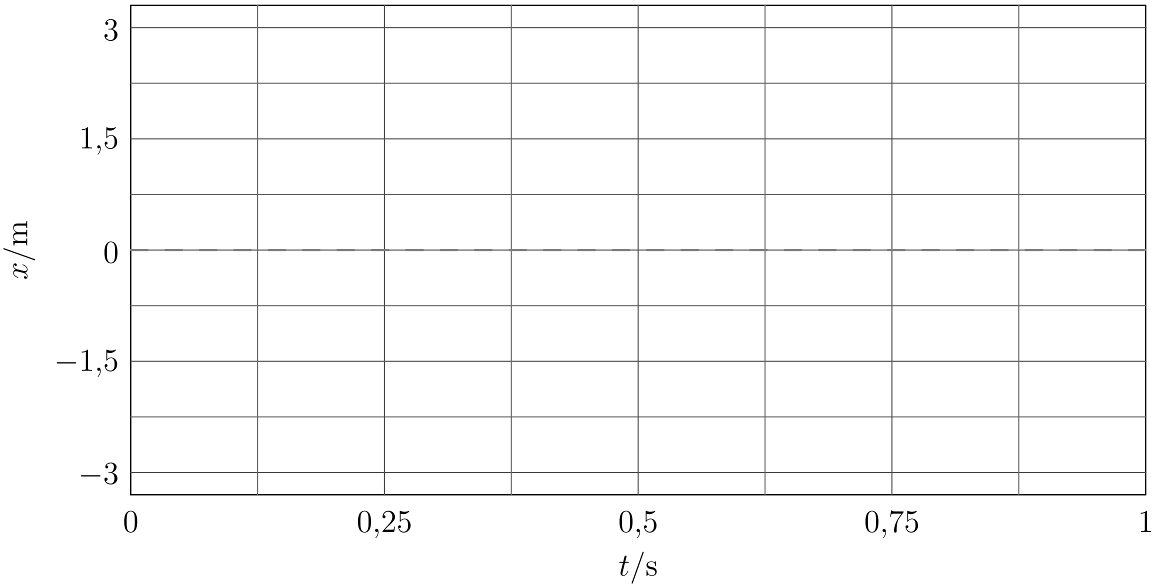
gdzie x_m, ω i ϕ są stałymi. Na rysunku można dostrzec ekstremalne momenty ruchu kulki: 1 i 5 odpowiadają maksymalnemu wychyleniu kulki, 3 minimalnemu. W momentach 2 i 4 kulka przechodzi przez położenie równowagi.



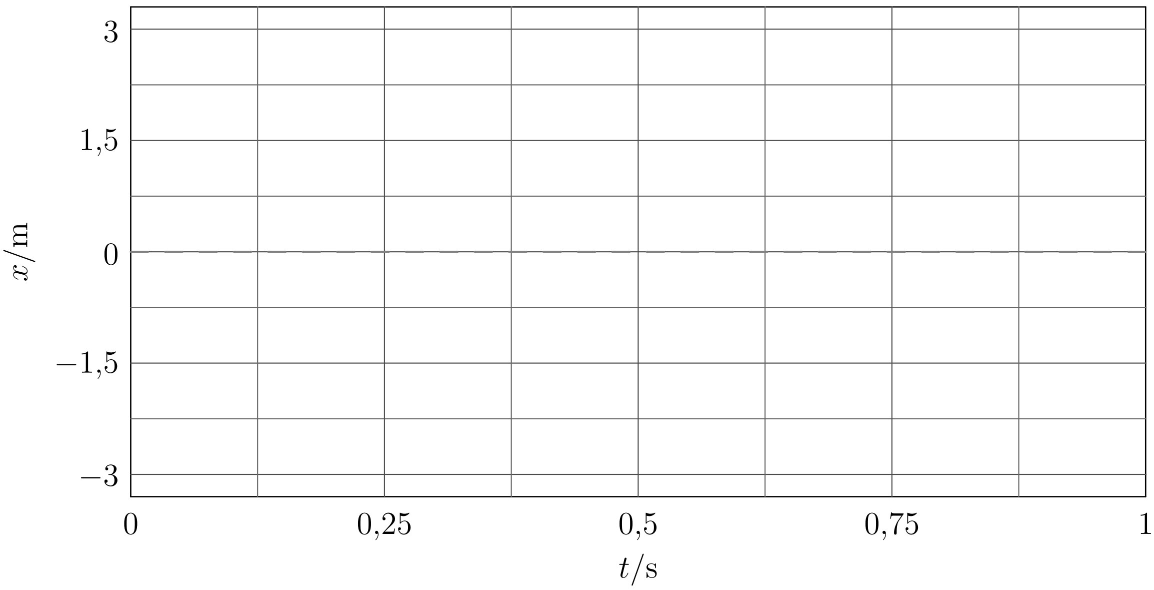
a) Narysuj wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu od momentu 1 do 5.



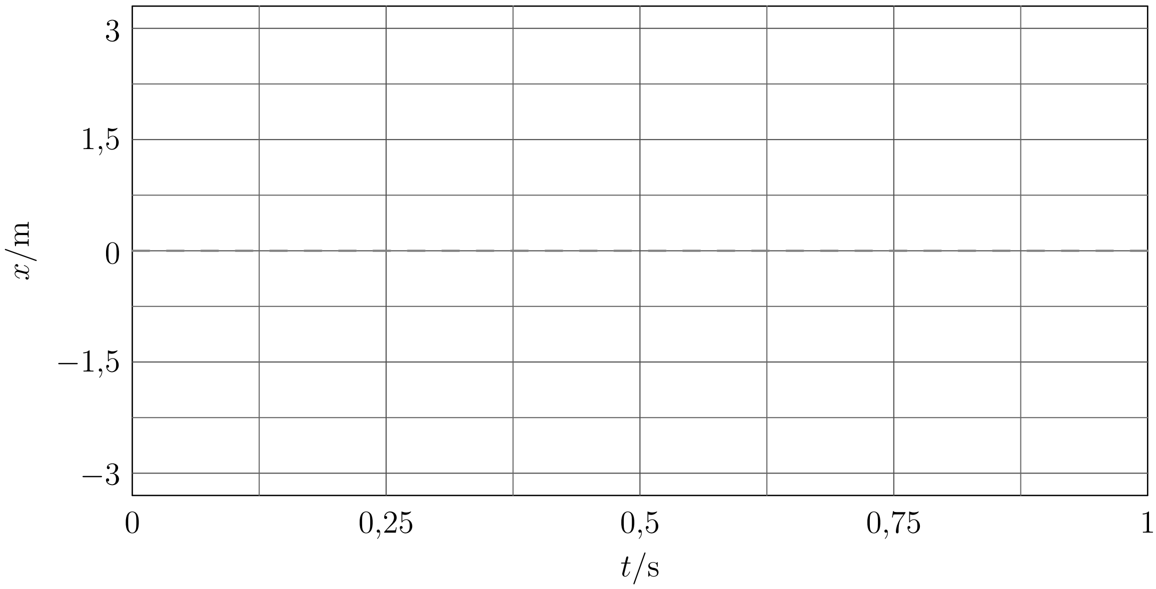
b) Narysuj wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Narysuj wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

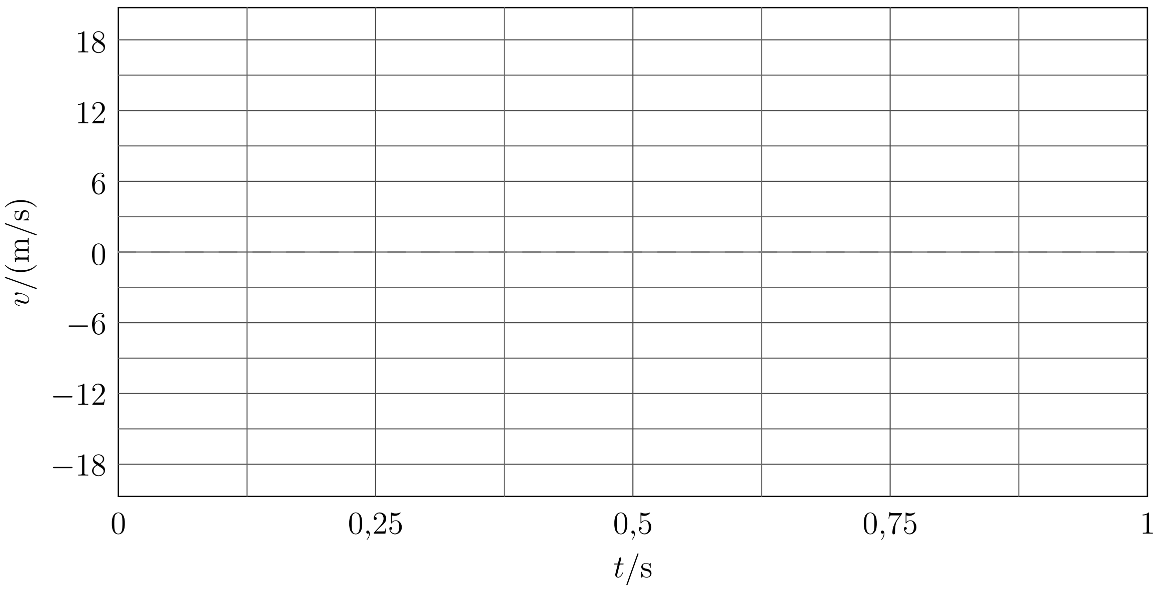


d) Narysuj wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



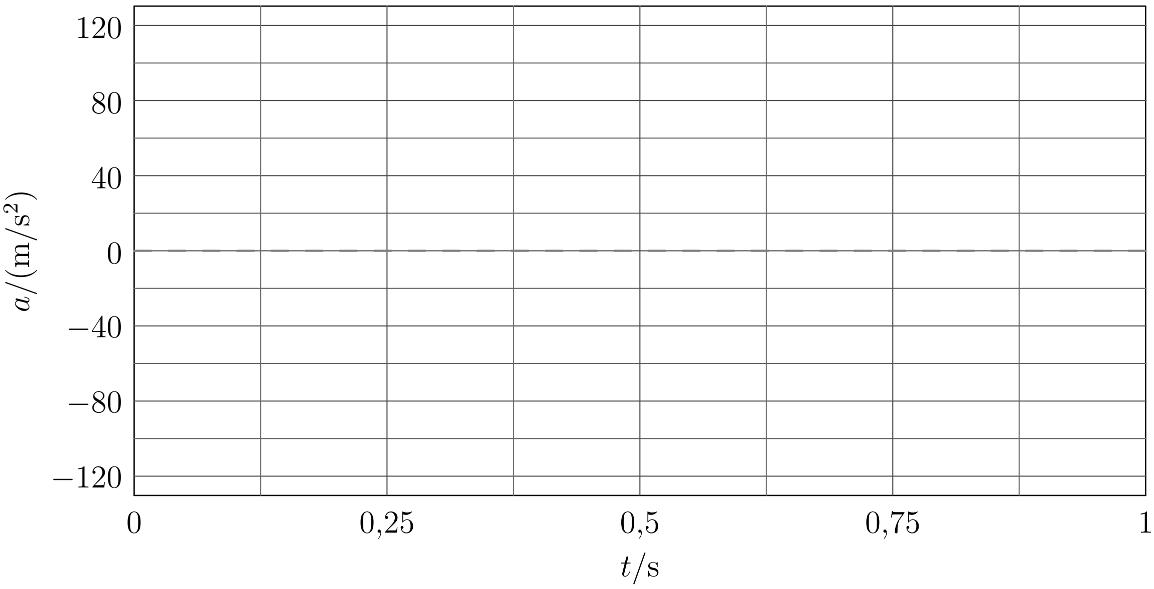
e) Jaką postać ma równanie opisujące prędkość kulki?

Narysuj wykres zależności prędkości kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



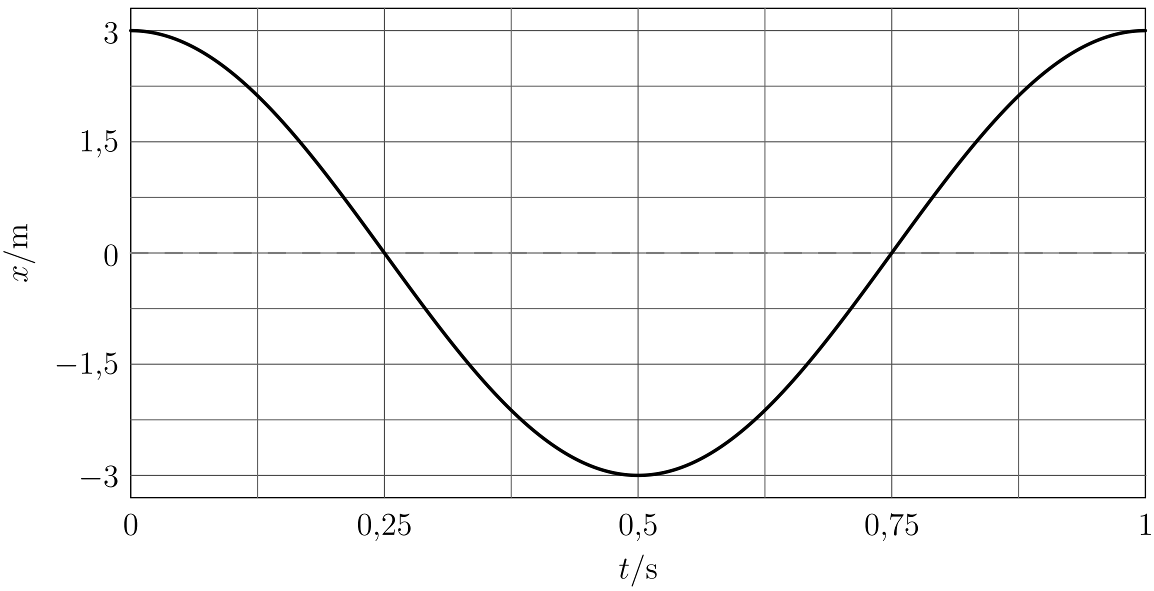
f) Jaką postać ma równanie opisujące przyspieszenie kulki?

Narysuj wykres zależności przyspieszenia kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).

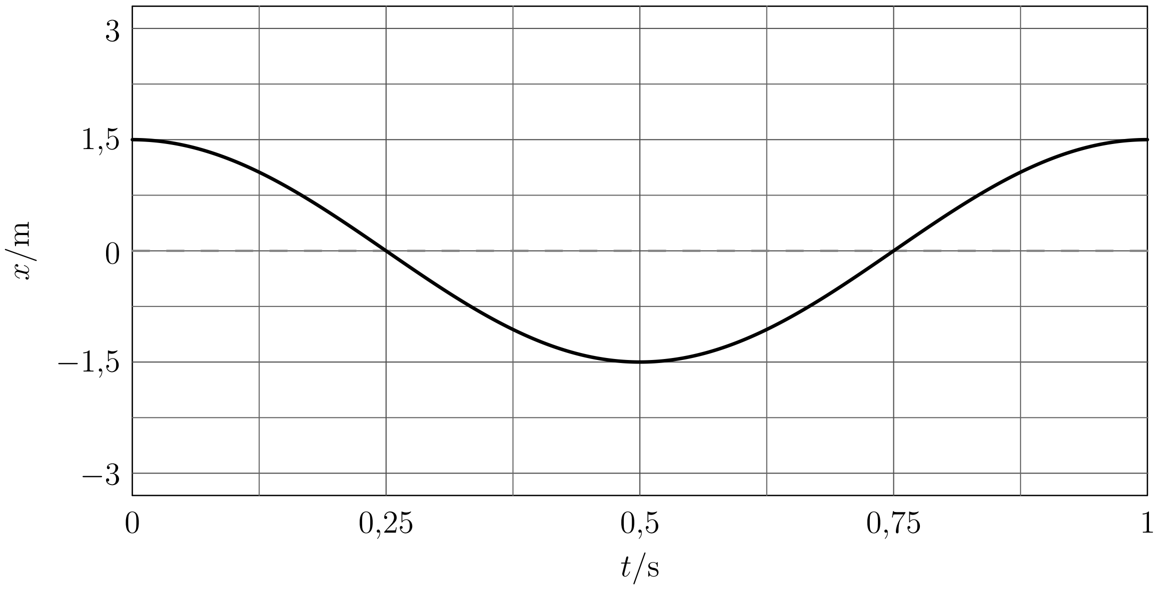


Odpowiedź:

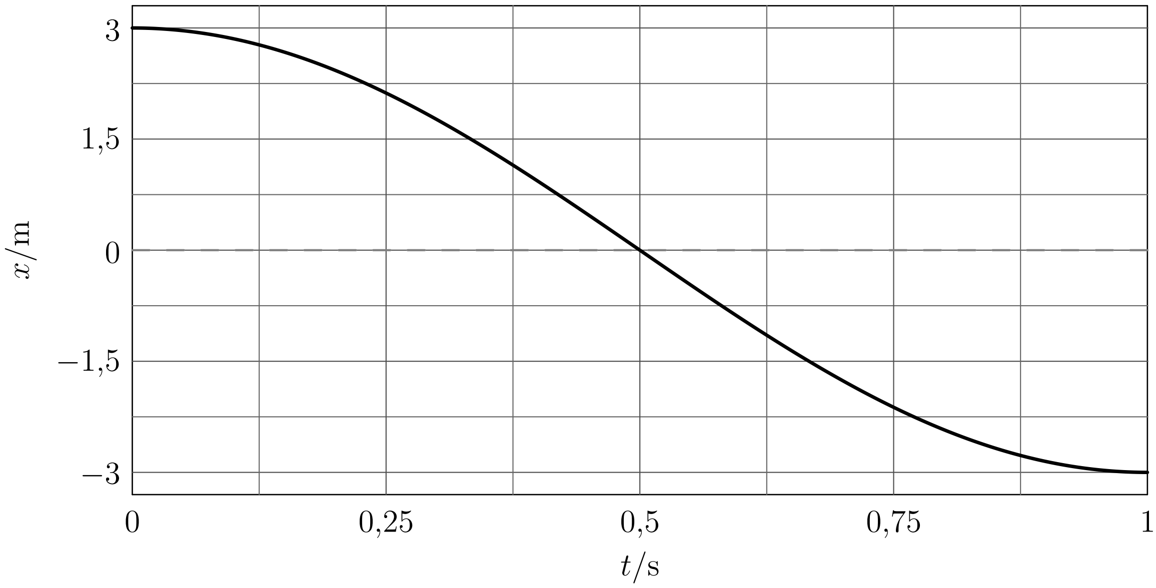
a) Wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu.



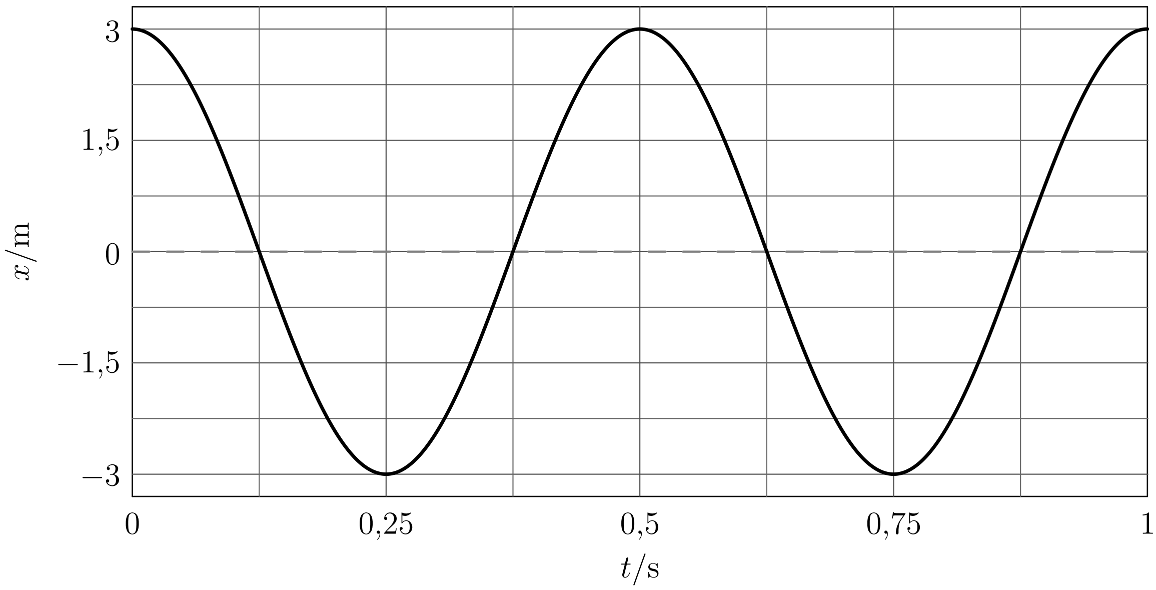
b) Wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

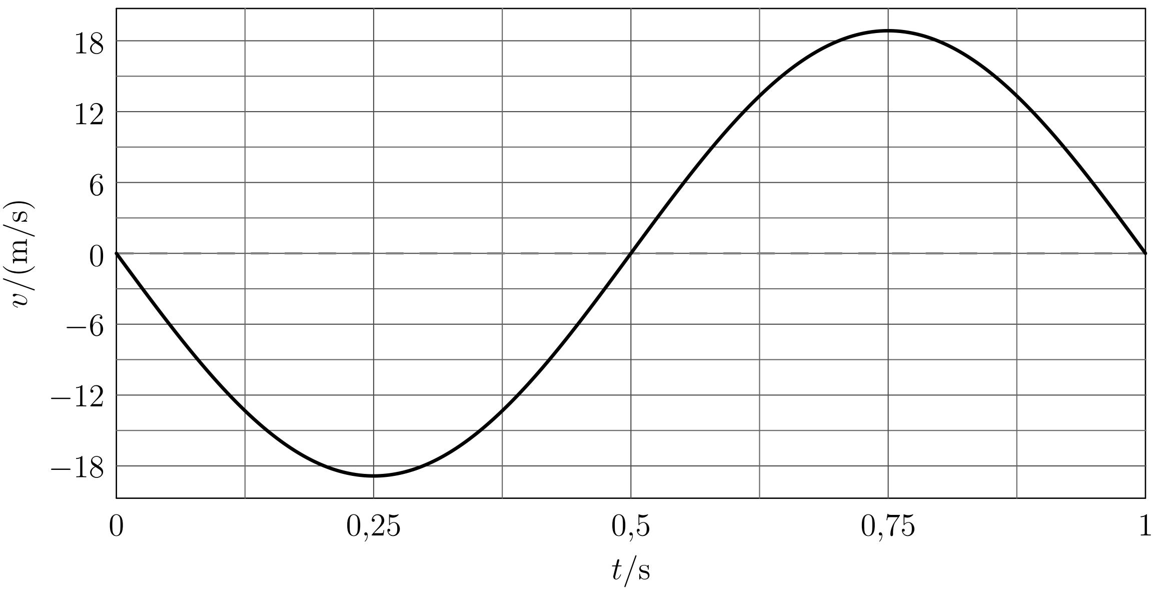


d) Wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



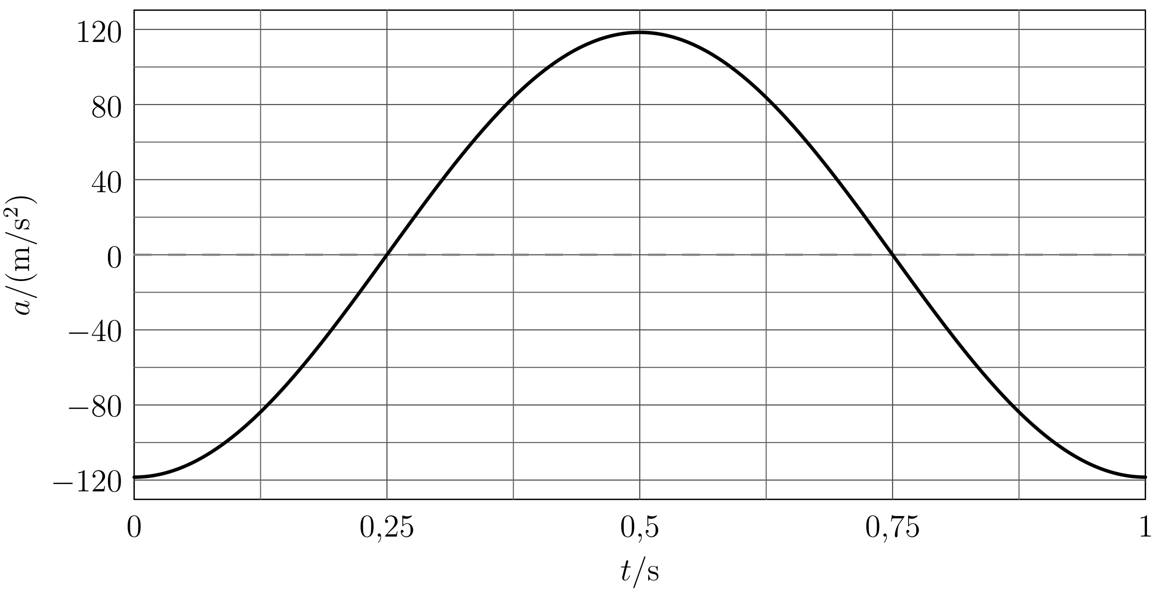
e) Wykres przedstawiający zależność prędkości kulki od czasu.
Równanie:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$



f) Wykres przedstawiający zależność przyspieszenia kulki od czasu.
Równanie:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



5 Zadanie – Kulka na sprężynie

Klaudia Dec, update: 2018-04-12, id: pl-dynamika-drgania-0002100, diff: 1

Po idealnie gładkim stole porusza się kulka o masie 680 g, która umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości 65 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Kulkę odciągnięto na odległość 12 cm od położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie. Pomiń opory ruchu.

a) Wyznacz amplitudę.
b) Wyznacz okres drgań.
c) Wyznacz częstotliwość
d) Wyznacz częstość kołową.

e) Wyznacz maksymalną prędkość kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
f) Wyznacz maksymalne przyspieszenie kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięte.
g) Wyznacz maksymalną energię potencjalną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
h) Wyznacz maksymalną energię kinetyczną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

Odpowiedź:
a) Amplituda wynosi: $x_m = 12$ cm.
b) Okres drgań wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}643$ s, gdzie m to masa kulki, a k to stała sprężystości.
c) Częstotliwość wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 1{,}56$ Hz.
d) Częstość kołowa wynosi: $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 9{,}78\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
e) Maksymalna prędkość kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$v_{max} = \omega x_m \approx 1{,}17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
f) Maksymalne przyspieszenie kulki zostaje osiągnięte na krańcach toru i wynosi:
$a_{max} = \omega^2 x_m \approx 11{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
g) Maksymalna energia potencjalna kulki zostaje osiągnięta na krańcach toru i wynosi:
$E_{pot} = \frac{k{x_m}^2}{2} \approx 0{,}468$ J.
h) Maksymalna energia kinetyczna kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$E_{kin} = \frac{m{v_m}^2}{2} \approx 0{,}468$ J.

6 Zadanie – Drgająca ciecz

Klaudia Dec, update: 2018-04-18, id: pl-dynamika-drgania-0002300, diff: 2

Jaś nalał pewną ciecz o objętości 12 cm^3 do pionowo ustawionej U-rurki, której przekrój poprzeczny wynosił 0,5 cm^2. Następnie dmuchnął do jednego z ramion tak mocno, że poziom wody podniósł się w drugim ramieniu. Zmiany poziomu cieczy zachodzą jedynie w prostych fragmentach ramion rurki. Pomiń opory ruchu cieczy.
a) Wykaż, że siła, która dąży do przywrócenia stanu równowagi, to siła harmoniczna.
b) Oblicz częstotliwość, z jaką będzie drgała ciecz.

Wskazówka:
a) Jaka siła powoduje ruch? Jak zmieni się poziom cieczy w pierwszym ramieniu, jeżeli w drugim ciecz podniesie się o x?
b) Zauważ podobieństwo do ruchu ciężarka na sprężynie.

Odpowiedź:
a) Siła, która powoduje ruch to siła ciężkości: $Q = mg$, gdzie m to masa części cieczy, g to przyspieszenie ziemskie. Masę możemy wyrazić jako: $m = \rho V_{nad}$, gdzie ρ to gęstość cieczy, V_{nad} to objętość części cieczy. Objętość natomiast to: $V_{nad} = 2xS$, gdzie x to wychylenie cieczy ponad poziom równowagi, a S to przekrój poprzeczny. Zbierając wszystko razem otrzymujemy: $Q = 2Sg\rho x = kx$. Wartość siły ciężkości jest więc proporcjonalna do wychylenia cieczy z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi, zatem spełnia cechy siły harmonicznej.
b) Ciecz będzie drgała z częstotliwością: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Sg}{V}} \approx 1{,}44$ Hz.

7 Zadanie – Wahadło na planecie

Klaudia Dec, update: 2018-07-05, id: pl-dynamika-drgania-0002500, diff: 1

Na pewnej planecie mała kulka o masie 45 g została zawieszona na nitce o długości 22 cm. Kulka waha się z okresem wynoszącym 0,6 s oraz amplitudą znacznie mniejszą od długości nici. Opory ruchu można pominąć.
a) Czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne tej planety? Jeśli tak, to ile ono wynosi?
b) Jak zmieni się okres wahań kulki, jeżeli zwiększymy jej masę trzykrotnie?
c) Jaka musi być długość nici, aby ta sama kulka wahała się z okresem równym 1,2 s?

Wskazówka:
a) Jak zależy okres wahań od przyspieszenia grawitacyjnego planety?
b) Od czego zależy okres wahań?
c) Jak zależy okres wahań od długości wahadła?

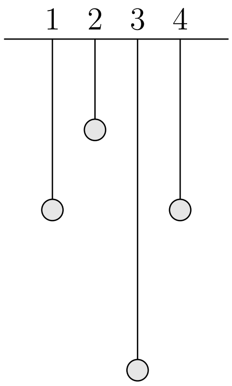
Odpowiedź:
a) Tak, przyspieszenie grawitacyjne wynosi: $g = \frac{4\pi^2}{T^2}l \approx 24{,}1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, gdzie l to długość nici, a T to okres drgań.
b) Okres wahań nie zależy od masy kulki, więc okres wahań się nie zmieni.
c) Długość nici musi wynosić: $L = 4l = 88$ cm.

8 Zadanie – Rezonans mechaniczny

Klaudia Dec, update: 2018-03-07, id: pl-dynamika-drgania-0002600, diff: 2

Na rozciągniętej poziomo lince zawieszamy cztery wahadła. W poniższej tabeli zestawiono wartości ich długości oraz mas zawieszonych ciężarków, gdzie l i m są jednostkami odpowiednio długości i masy.

numer wahadła	1	2	3	4
długość	l	$0{,}5l$	$2l$	l
masa	m	$2m$	m	$3m$



Pierwsze wahadło wprawiono w ruch. Po pewnym czasie zaobserwowano ruch pozostałych wahadeł. Które z nich miało największe wychylenie? Drugie, ponieważ znajduje się najbliżej? Trzecie, ponieważ ma taką samą masę? Czy może czwarte, ponieważ ma taką samą długość nici?

Wskazówka: Od czego zależy okres drgań wahadła matematycznego?

Odpowiedź: Najbardziej w ruch zostanie wprawione wahadło czwarte, ponieważ jego okres drgań jest równy okresowi drgań wahadła pierwszego.

9 Zadanie – Zanurzone wahadło [do dokończenia]

Jakub Iwański, update: 2019-06-04, id: pl-dynamika-drgania-0011100, diff: 1

Na nieważkiej nici o długości $L = 1$ m zawieszono kulkę o promieniu $R = 1$ cm zrobioną z korkao gęstości $\rho_k = 250$ kg/m^3. Całość zanurzono w powietrzu o współczynniku lepkości $\eta = 0{,}000018$ Pa·s i gęstości $\rho_s = 12$ kg/m^3. Następnie kulkę wychylono z położenia równowagi o kąt $\alpha_0 = 3°$ i swobodnie puszczono. Kulka, przemieszczając się, ciągnie ze sobą lepką ciecz. Chcąc uwzględnić ten efekt w obliczeniach, musisz przyjąć, że oprócz kulki na wahadle znajduje się tzw. masa dołączona (wirtualna) równa masie cieczy o objętości równej połowie objętości wahającej się kulki. Oblicz jaką drogę przebędzie kulko do momentu zatrzymania się. W obliczeniach przyjmij, że siła oporu wyraża się wzorem Stokesa: $F = -6\pi\eta Rv$.

Wskazówka: Znajdź zależność kąta wychylenia od czasu, a następnie zastanów się jaki kąt zostanie zakreślony w kolejnych połówkach okresu drgań.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz ciągu oraz iloraz wynoszą $a_1 = q = \exp(-\beta T/2)$.

Odpowiedź: Dystans przebyty przez kulkę wynosi:

$$S = L\alpha_0 \left(1 + \frac{4R^2(2\rho_k + \rho_s)\sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{g\eta}{LR^2(2\rho_k+\rho_o)}\right)^2}}{9\eta\pi} \right)$$

