Środek Masy, 26 lutego 2017 r.

Dynamika

F. Dośrodkowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Działamy!

Wstęp

Przyjmij, że przyśpieszenie ziemskie jest równe 9,8 m/s^2.

1 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $19{,}1 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 1,7 m/s. Druga część o masie $29{,}7 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 5,9 m/s.

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3v_3 = m_1v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1v_1/v_3 \approx 5{,}5 \cdot 10^3$ kg.

2 Zadanie – Spadochroniarz

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 91 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 6,3 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 892$ N.

3 Zadanie – Zderzenie wagonów

Wagon kolejowy o masie 42 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 1,4 m/s, uderzył w stojący skład 6 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:
a) wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
b) o ile zmniejszyła się na skutek sczepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

Odpowiedź:
a) Po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}2$ m/s.
b) Energia kinetyczna ruchu postepowego zmniejszyła się o $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n+1)v^2)/2 \approx 35{,}3$ kJ.

4 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Kula o masie 6 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 50 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 11 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Odpowiedź:
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 77,2 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 12{,}9$ m/s^2.
c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 142$ m/s.

5 Zadanie – Trzy planety

W przestrzeni kosmicznej znajdują się trzy planety o masach M, $2M$ i $4M$. Gdzie znajduje się najlżejsza planeta względem dwóch pozostałych, jeśli siły grawitacyjne działające na nią się równoważą? Wiemy że odległość między środkami planet o masach 2M i 4M wynosi 2,9 AU.

Odpowiedź: Najlżejsza planeta znajduje się pomiędzy dwoma cięższymi planetami, w odległości 1,7 AU od najcięższej.

6 Zadanie – Kula w cieczy

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 1100 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 2500 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}56$.

7 Zadanie – Ołów, lód i woda

Kulę o masie 5,8 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,3 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 11000 kg/m^3, a gęstość wody 1000 kg/m^3. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -17{,}6 \text{ mm}$$

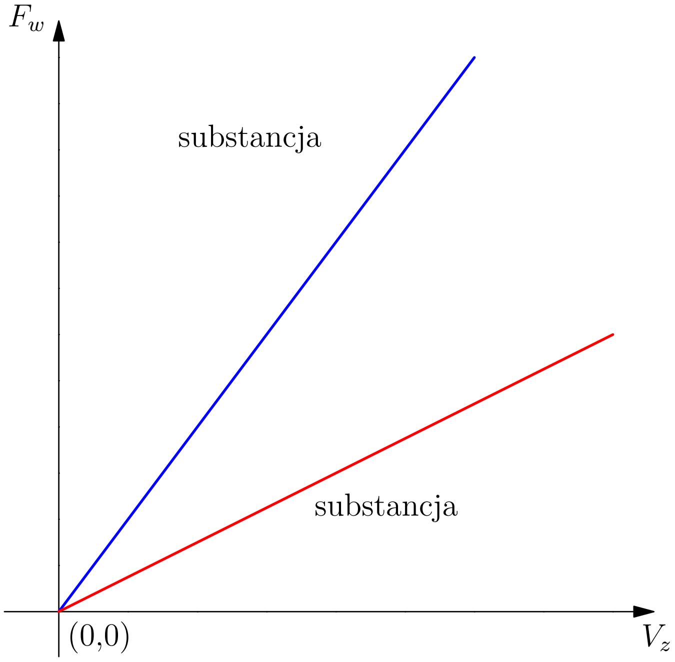
A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

8 Zadanie – Która to ciecz?

Prostopadłościan wykonany z porcelany zawieszono na siłomierzu i zmierzono jego ciężar Q. Następnie zanurzano prostopadłościan w cieczy A, a później w cieczy B. Notowano przy tym wartości wskazywane przez siłomierz oraz objętość zanurzonej części prostopadłościanu. Poniższa tabela przedstawia wyniki pomiarów.

siła ciężkości Q [N]	odczyt z siłomierza [N]	siła wyporu F_w [N]	objętość zanurzonej części V_z [cm^3]
substancja A			
0,100	0,085	0,015	2
0,100	0,078	0,022	3
0,100	0,067	0,033	4
substancja B			
0,100	0,073	0,027	2
0,100	0,064	0,036	3
0,100	0,050	0,050	4

a) Poniżej przedstawiono wykresy zależności siły wyporu F_w od objętości zanurzonej części prostopadłościanu V_z dla dwóch cieczy. Podpisz odpowiednio: „substancja A", „substancja B".



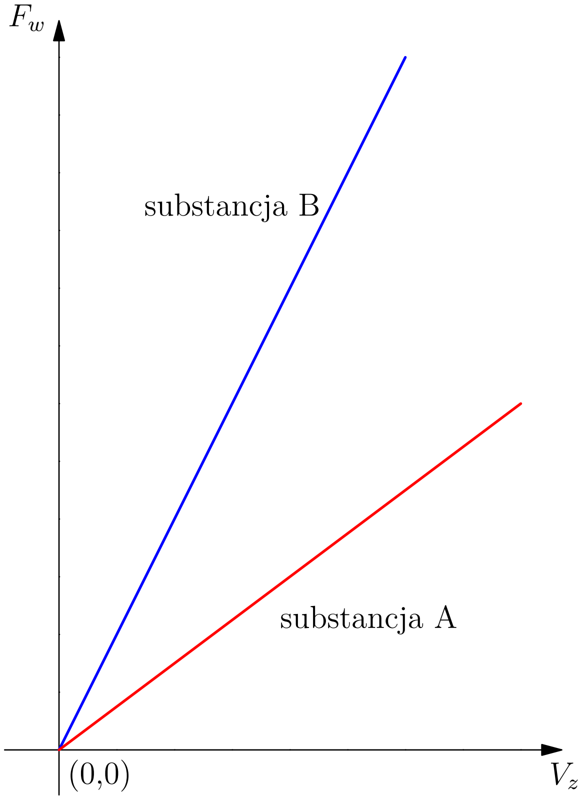
b) Która z wymienionych niżej cieczy mogłaby być substancją A, a która substancją B? Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{m}{s^2}$.

ciecz	gęstość $[\frac{kg}{m^3}]$
gliceryna	1260
woda	1000
etanol	785

c) Jakie prawo opisuje badane tutaj zjawisko? Opisz je.

Odpowiedź:

a)

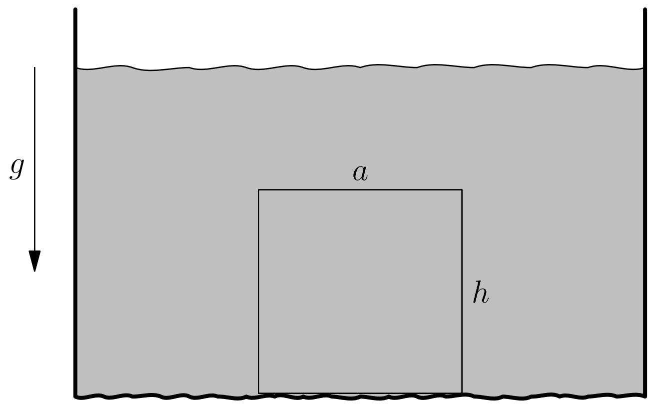


b) Substancją A mógłby być etanol, a substancją B gliceryna.

c) Badane zjawisko jest opisywane przez prawo Archimedesa. Mówi ono, że na ciało zanurzone w cieczy działa siła skierowana pionowo ku górze równa ciążarowi wypartej cieczy. Opisana jest wspomnianym już wzorem $F_w = \rho_c g V_z$.

9 Zadanie – Wyciąganie bloku z morza

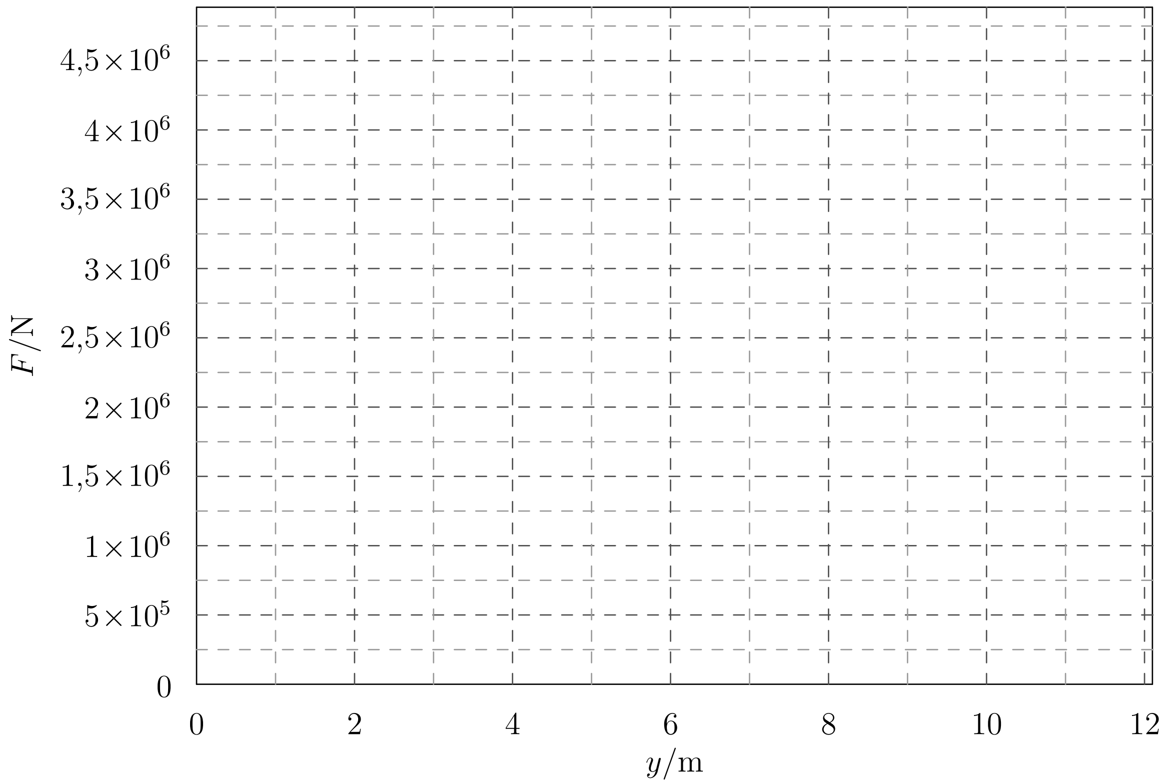
Na poziomym, kamienistym dnie morza spoczywa prostopadłościenny betonowy blok o wymiarach podstawy $a = 6$ m, $b = 7$ m oraz wysokości $h = 5$ m. Głębokość wody w tym miejscu wynosi $H = 11$ m. Postanowiono wyciągnąć blok z wody.



a) Przedstaw na wykresie zależność minimalnej siły F potrzebnej do wyciągnięcia bloku od położenia dolnej podstawy bryły y.

b) Oblicz minimalną pracę, jaką należy wykonać w celu wyciągnięcia bloku z wody. Wynik podaj w kJ z dokładnością do 3 cyfr znaczących.

Przyjmij, że gęstość wody morskiej wynosi $\rho_w = 1030\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, przyspieszenie ziemskie $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ oraz gęstość betonu $\rho_b = 2115\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Wyciąganie było bardzo powolne oraz odbywało się ruchem jednostajnym, pomiń opory ruchu oraz wpływ powietrza. Przyjmij, że woda znajdowała się pod całą powierzchnią dolnej podstawy spoczywającego na kamienistym dnie bloku.



Odpowiedź: b) Minimalna praca potrzebna do wyciągnięcia bloku wynosi około 30500 kJ.

10 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3300 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 5 kg, a każdy student może wykonać pracę 37000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 14 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 62.

11 Zadanie – Wahadło

Kulkę o masie 70 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 7 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 1,17 m/s.

12 Zadanie – Stożkowe wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne ma długość 1,8 m i porusza się ruchem jednostajnym po okręgu równolegle do podłoża. Wiadomo, że nieważka nić tworzy z pionem kąt $\alpha = 5°$. Wyznacz okres wahadła matematycznego oraz oblicz, jaką wartośc ma okres tego wahadła. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi 9,81 m/s^2.

Odpowiedź: Okres wahadła matematycznego opisuje następujący wzór:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie T - okres, l długośc wahadła, zaś g - przyspieszenie ziemskie.

Okres tego ruchu wynosi 2,69 s.

13 Zadanie – Wyrzutnia piłek do tenisa

Wyrzutnia w postaci prostej lufy, w której porusza się tłok o kształcie walca prostego, wyrzuca piłki o masie 58 g z szybkością 55 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Mechanizm wyrzucający działa tak, że przez cały czas, gdy piłka jest w kontakcie z wyrzutnią, poruszający się tłok działa na piłkę stałą siłą i trwa to 0,3 s. Wiadomo, że przed uruchomieniem wyrzutni spoczywająca piłka działa na tłok siłą $R = 0{,}41$ N.

a) Jaką siłą działa poruszający się tłok na piłkę?

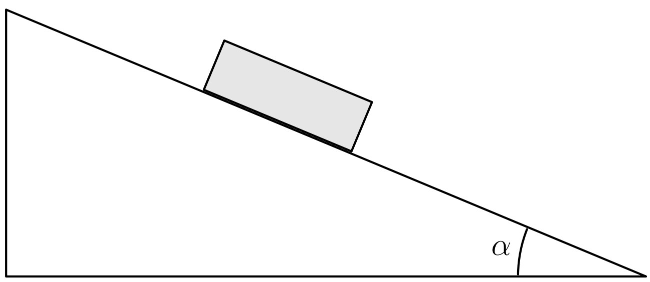
b) Oblicz średnią moc, z jaką wyrzutnia wyrzuca piłki.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Pomiń opory ruchu piłki.

Odpowiedź: a) Poruszający się tłok działa na piłkę siłą ok. 3,36 N.
b) Piłki wyrzucane są ze średnią mocą ok. 25,7 W.

14 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 43°$ zsuwa się cegła o masie 5,8 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 6{,}68$ m/s^2, w dół równi.

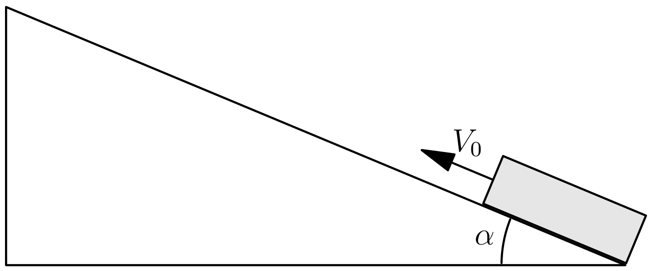
15 Zadanie – Równia pochyła

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 17° zsuwa się cegła o masie 5,3 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin \alpha \approx 2{,}87$ m/s^2, w dół równi.

16 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

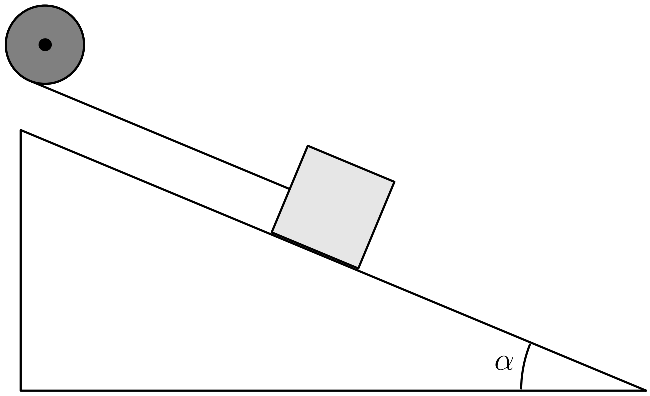
U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 768 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 7$ m/s wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 40°$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 1,2.
a) Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
b) Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
c) Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



Odpowiedź:
a) Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi $a = g(f \cos \alpha + \sin \alpha) \approx 15{,}3$ m/s^2, gdzie α to kąt nachylenia równi, a f to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
b) Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to $t = \frac{V_0}{a} \approx 0{,}46$ s.
c) Droga hamowania to $s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}V_0 t \approx 1{,}6$ m.

17 Zadanie – Sześcian na równi

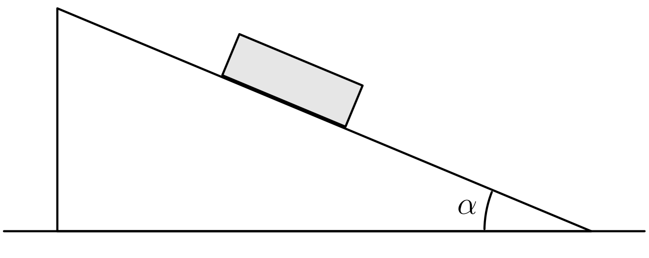
Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 40°$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 26 dag i o długości krawędzi 7 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 76 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześcianu znajduje się 70 cm nad stołem.
a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?
Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,37.



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie sześcianu o masie m_s wyniesie $a = m_s g \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{m_s + \frac{1}{2}m_w} = 1{,}43\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię, a m_w to masa walca.
b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1{,}23$ s, gdzie s to droga jaką pokona sześcian.

18 Zadanie – Jeżdżąca równia

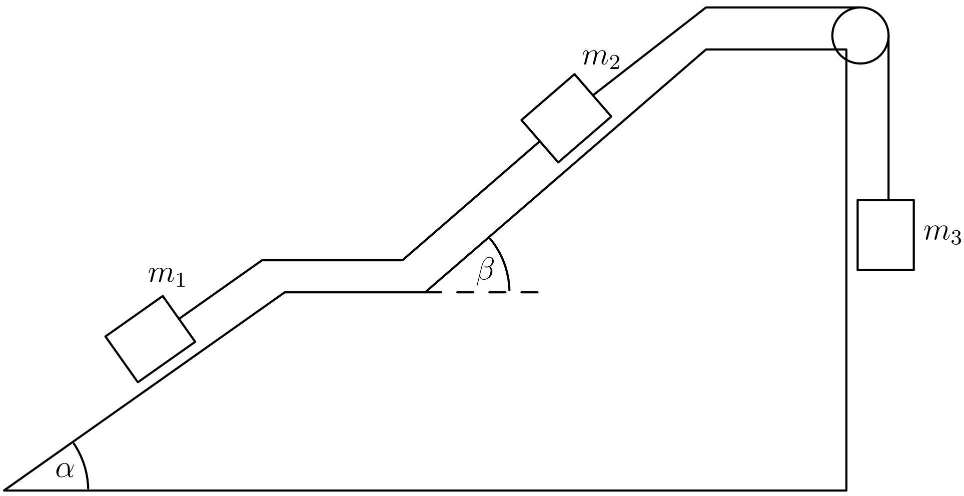
Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie nachylenia $\alpha = 15°$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,2.



Odpowiedź: Wartość przyśpieszenia minimalnego wynosi $a_{min} = g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 0{,}632\ \mathrm{m/s^2}$, a wartość przyśpieszenia maksymalnego wynosi $a_{max} = g\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 4{,}85\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię.

19 Zadanie – Trzypoziomowa równia pochyła [do dokończenia]

Na trzypoziomowej równi pochyłej o kątach nachylenia $\alpha = 45°$ i $\beta = 60°$ znajdują się klocki o masach $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg i $m_3 = 2$ kg i są połączone ze sobą nieważką nicią. Przy czym klocek 3 swobodnie zwisa ze skraju równi. Nić między klockami 1 i 2 jest zamontowana tak, że porusza się zawsze równolegle do równi (np. za pomoca układu nieważkich bloczków nie pokazanych na rysunku). Natomiast między klockami 2 i 3 znajduje się bloczek, który jest cienkim dyskiem o promieniu $R = 8$ cm i masie $m_b = 0{,}6$ kg (patrz rysunek poniżej). Współczynnik tarcia między klockami a równią wynosi $\mu = 0{,}3$. Całość znajduje się w windzie poruszającej się z przyspieszeniem $\vec{a} = a \cdot \hat{e_z}$, gdzie $a = 3$ m/s^2. Oblicz, z jakim przyspieszeniem będzie poruszał się klocek 3 chwilę po odblokowaniu układu. W obliczeniach przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81$ m/s^2.



Odpowiedź: Klocek 3 porusza się w górę, a jego przyspieszenie wynosi $A = \frac{|\vec{g}-\vec{a}|[(m_1\sin(\alpha)+m_2\sin(\beta)-m_3)-\mu(m_1\cos(\alpha)+m_2\cos(\beta))]}{m_1+m_2+m_b/2}$

20 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 68 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 56 N na drodze 3,9 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 12 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F-T)S/m} \approx 2{,}25$ m/s.

21 Zadanie – Pocisk

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 45 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 46 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 744 m/s, a po przejściu przez drzewo zmiejszyła się do 624 m/s.
a) Ile wynosi praca sił oporu?
b) Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
c) Ile wynosi czas przebijania drzewa?
Załóż, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

Odpowiedź:
a) Praca sił oporu wynosi $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -3690$ J, gdzie V_1 i V_2 to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie m przed wbiciem w drzewo i po przebiciu drzewa.
b) Wartość opóźnienia kuli wynosi $a = \frac{W}{md} \approx 178$ km/s^2, gdzie d to średnica drzewa.
c) Czas wynosi $t = \frac{V_1-V_2}{a} \approx 0{,}673$ ms.

22 Zadanie – Krążek hokejowy

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 3 m, a po zderzeniu przebył drogę 1 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,06. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

Odpowiedź: Szybkość początkowa wynosi $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 2{,}17$ m/s, gdzie s_1 to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę, s_2 to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a f to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

23 Zadanie – Droga hamowania

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 80 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

Odpowiedź: Droga, jaką pokona samochód, wynosi $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 47{,}4$ m, gdzie V_0 to prędkość początkowa samochodu, t_1 to czas reakcji kierowcy, a f to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

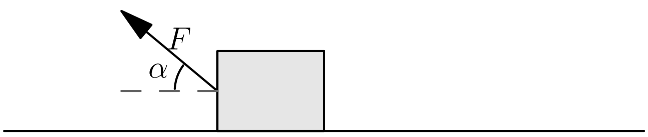
24 Zadanie – Spacer z sankami

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 70 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 58 N i tworzy on kąt 25° z poziomem.

Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 3680$ J.

25 Zadanie – Ukośna siła

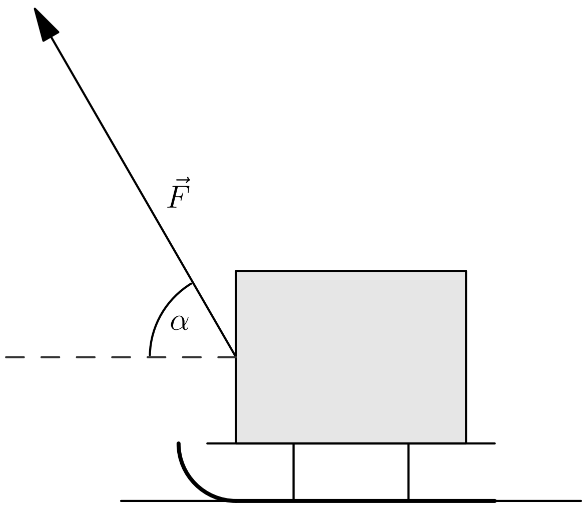
Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,8 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 5$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,1.
a) Oblicz przyśpieszenie klocka.
b) Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
c) Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie klocka wynosi $a \approx 3{,}88$ m/s^2.
b) Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi $s_{0\to5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 48{,}5$ m, gdzie t to czas.
c) Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi $s_3 = s_{0\to3} - s_{0\to2} \approx 9{,}7$ m.

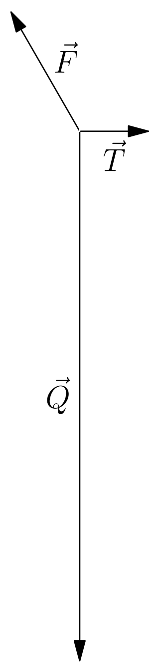
26 Zadanie – Sanki

Mama ciągnęła sanki z dzieckiem po śniegu, działając siłą o wartości $F = 39$ N. Sznurek podczas ruchu był cały czas napięty i nachylony do poziomu pod kątem $\alpha = 60°$. Masa sanek i dziecka wynosiła $m = 26$ kg. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ oraz że ruch był jednostajny prostoliniowy i odbywał się w poziomie.



a) Oblicz pracę, jaką wykonała mama, ciągnąc sanki z dzieckiem na drodze $s = 131$ m.

b) Na poniższym rysunku przedstawiono następujące siły działające na sanki z dzieckiem: $\vec{F}$ - siła ciągnąca, $\vec{T}$ - siła tarcia, $\vec{Q}$ - siła ciężkości. Brakuje na nim pionowej składowej siły reakcji podłoża $\vec{R}$. Zaznacz ją na tym rysunku, zachowaj odpowiednie proporcje.

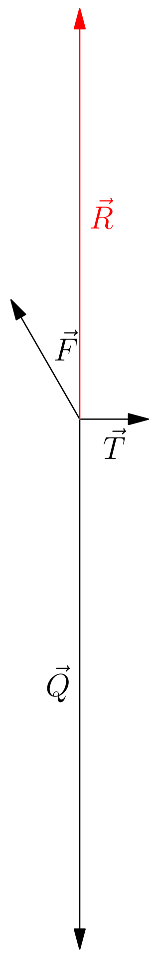


c) Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego μ sanek o śnieg.

Odpowiedź:

a) Mama wykonała pracę równą około 2550 J.

b)



c) Współczynnik tarcia sanek o śnieg wynosi około 0,09.

27 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $3{,}39 \cdot 10^{24}$ kg i $4{,}44 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $217 \cdot 10^6$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 6{,}29 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

28 Zadanie – Samochód na moście

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 79 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 70% ciężaru samochodu?

Odpowiedź: Prędkość wynosi $V = \sqrt{gR(1-k)} \approx 15{,}2$ m/s, gdzie $k = 70\%$, a R to promień krzywizny mostu.

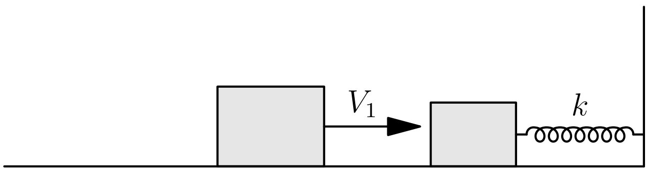
29 Zadanie – Obrót Ziemi

Oblicz:
a) z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 80% siły grawitacji działającej na niego.
b) ile wynosi ciężar człowieka o masie 68 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

Odpowiedź:
a) Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić $V = \sqrt{Rg(1-k)} \approx 3530$ m/s, gdzie R to promień Ziemi, a $k = 0{,}8$.
b) Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 664 N.

30 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,6 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 170$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześcian o masie 1 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 2$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



Odpowiedź: Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}} = 12{,}1$ cm, gdzie m_1 to masa uderzającego klocka, a m_2 to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

31 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,6 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 1,6 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 1,8 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 2,7 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}44$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0{,}381$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

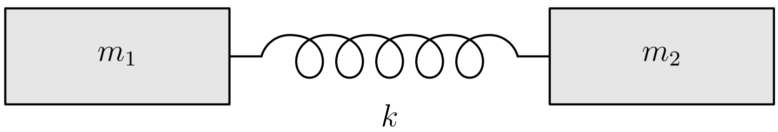
32 Zadanie – Drążek pogo

Janek uwielbia skakać na drążku pogo, którego wysokość bez obciążenia wynosi 105 cm. Gdy Janek stoi na drążku, wysokość drążka zmniejsza się o 10 cm i o tyle samo ściskana jest sprężyna. Na jaką wysokość ponad ziemię jest się w stanie wzbić Janek, wykorzystując jedynie energię zgromadzoną w ściśniętej sprężynie, gdy minimalna wysokość drążka podczas odbicia będzie wynosić 72 cm? Janek waży 58 kg, a masę drążka pogo można pominąć.

Odpowiedź: Janek może wzbić się maksymalnie na wysokość równą: $h = \frac{(l-y_{max})^2}{2x} + y_{max} \approx$ 126 cm, gdzie l to długość swobodna drążka, x to długość, o którą skróci się sprężyna, gdy stoi na niej Janek, y_{max} to długość drążka w momencie maksymalnego ściśnięcia sprężyny.

33 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 56$ N/m, $m_1 = 1$ kg oraz $m_2 = 4$ kg.



Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 0{,}751$ s.

34 Zadanie – Ciężarek na lince

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,93 s zakreśla okrąg o promieniu 112 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 58 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx$ 0,249 s.

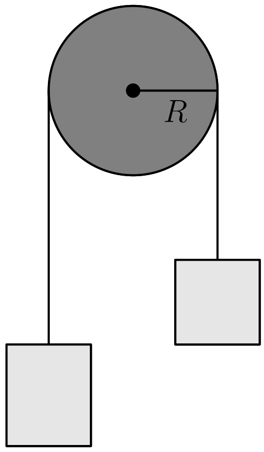
35 Zadanie – Tarcza

Na środku tarczy o średnicy 3 m i masie 117 kg, znajduje się człowiek o masie 62 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,6 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

Odpowiedź: Częstotliwość układu wyniesie $f_2 = f_1 \frac{Md^2}{8mr^2+Md^2} = 0{,}257$ Hz, gdzie d to średnica tarczy o masie M, f_1 to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a r to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie m od osi obrotu.

36 Zadanie – Maszyna Atwooda

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0{,}7$ m i masie 2 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszone są dwa obciążniki o masach 1,47 kg i 0,67 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomiń. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:
a) załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
b) załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie układu wynosi $a_1 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = 3{,}66$ m/s^2, gdzie m_1 i m_2 to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.
b) Przyśpieszenie układu wynosi $a_2 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_3} = 2{,}5$ m/s^2, gdzie m_3 to masa walca.

37 Zadanie – Naturalny satelita

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $73 \cdot 10^3$ kg okrążającego w czasie 59,7 h jednorodną planetę o masie $688 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 81{,}3 \cdot 10^3$ km.

38 Zadanie – Zmiana orbity

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 550 kg znajduje się w odległości 5800 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 7600 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi 3,69 m/s^2, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

Odpowiedź: Praca wyniesie $W = \frac{GMm}{2}(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2}) = 200$ MJ, gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity, R to promień Marsa, a h_1 i h_2 to odległości satelity od powierzchni planety.

39 Zadanie – Prędkość ucieczki

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety $Z90$, stanowi 42% masy Ziemi, a jej promień wynosi 14000 km. Oblicz:
a) prędkość ucieczki ciała z planety $Z90$.
b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie $Z90$ do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 25 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

Odpowiedź:
a) Prędkość ucieczki wyniesie $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 4{,}89$ km/s, gdzie G to stała grawitacji, R to promień planety $Z90$ o masie M.
b) Stosunek wysokości wyniesie $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 11{,}5$, gdzie h i h_z to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie $Z90$ i na Ziemi, a g i g_z to odpowiednio przyśpieszenie na planecie $Z90$ i na Ziemi.

40 Zadanie – Tunel średnicowy

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 3600 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $7{,}73 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 8100 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to2} = \int_R^r \vec{F}(r')\cdot d\vec{r}\,' = -\int_R^r F(r')\,dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\,dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 7150 \text{ m/s}$$

41 Zadanie – Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 39 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 56 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 810$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_a M_a = r_b M_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 141 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 98{,}1 \cdot 10^3$ km, $d \approx 239 \cdot 10^3$ km.

42 Zadanie – Dwie gwiazdy

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 4 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 11 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 36$ km/s, $v_{B1} = 21$ km/s, $d_1 = 9 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 16$ km/s, $d_2 = 19 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

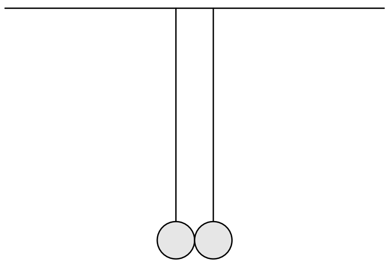
Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$

$$\approx 30{,}8 \text{ km/s}$$

43 Zadanie – Dwie kulki na linkach

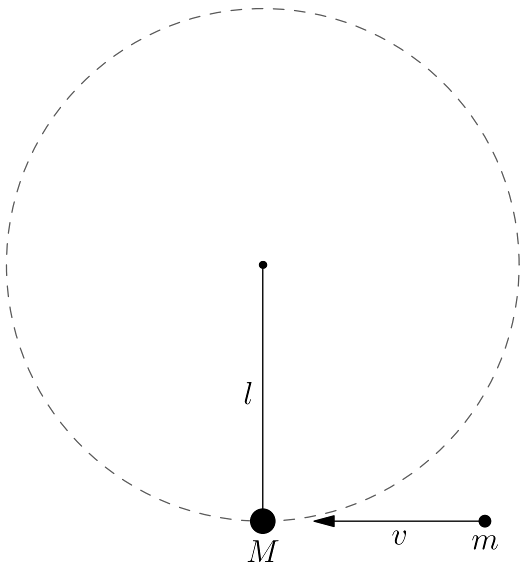
Dwie stykające się małe kulki o masach 0,6 kg i 0,3 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 1,3 m. Lżejsza kulka zostaje odchylona w płaszczyźnie linek o kąt 55° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



Odpowiedź: Wysokość wyniesie $H = \frac{m^2 l(1-\cos\alpha)}{(m+M)^2} = 6{,}2$ cm, gdzie m i M są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki, l to długość linki, a α to kąt odchylenia.

44 Zadanie – Postrzelone wahadło

Metalowy ciężarek o masie $M = 307$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 40$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 15$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Pomiń opory ruchu bryły.



Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

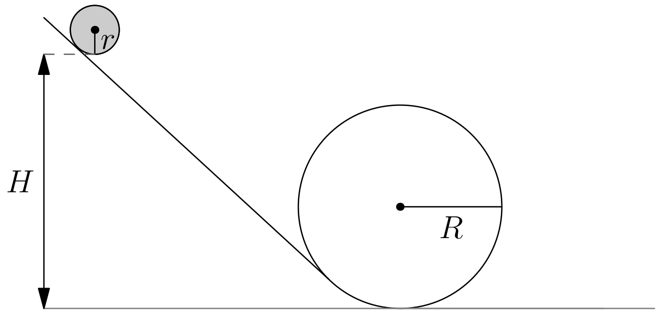
$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 95$ m/s.

45 Zadanie – Pętla śmierci

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0{,}04$ m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu $R = 0{,}9$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



Odpowiedź: Minimalna wysokość wynosi $H = 2{,}7(R - r) = 2{,}32$ m.

46 Zadanie – Wiewiórka na stacji kosmicznej

Wiewiórka o masie m odbiła się od ściany stacji kosmicznej i leci w pomieszczeniu wypełnionym powietrzem. Wyprowadź zależność prędkości v wiewiórki od czasu t, jeśli na początku miała ona prędkość v_0 w układzie stacji. Na wiewiórkę działa jedynie siła oporu powietrza o wartości kv^2, gdzie k jest stałą.

Odpowiedź:

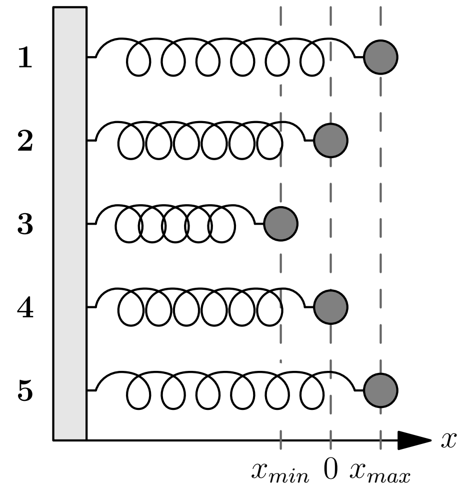
$$v = \frac{1}{v_0^{-1} + bt} = \frac{1}{v_0^{-1} + \frac{k}{m}t}$$

47 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Proton porusza się z prędkością o wartości 2300 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 4,3 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg.

Odpowiedź: Proton porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = F/m \approx 94{,}7 \cdot 10^{10}$ m/s^2.

48 Zadanie – Oscylator harmoniczny

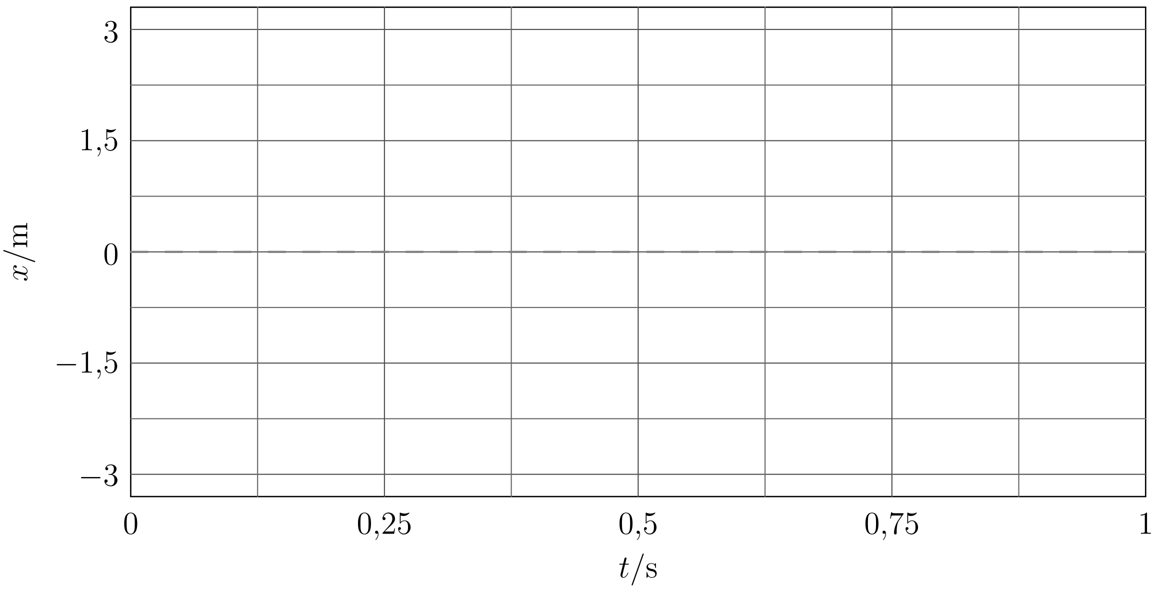


Przyjrzyjmy się prostemu układowi drgającemu, którego równanie ruchu ma postać:

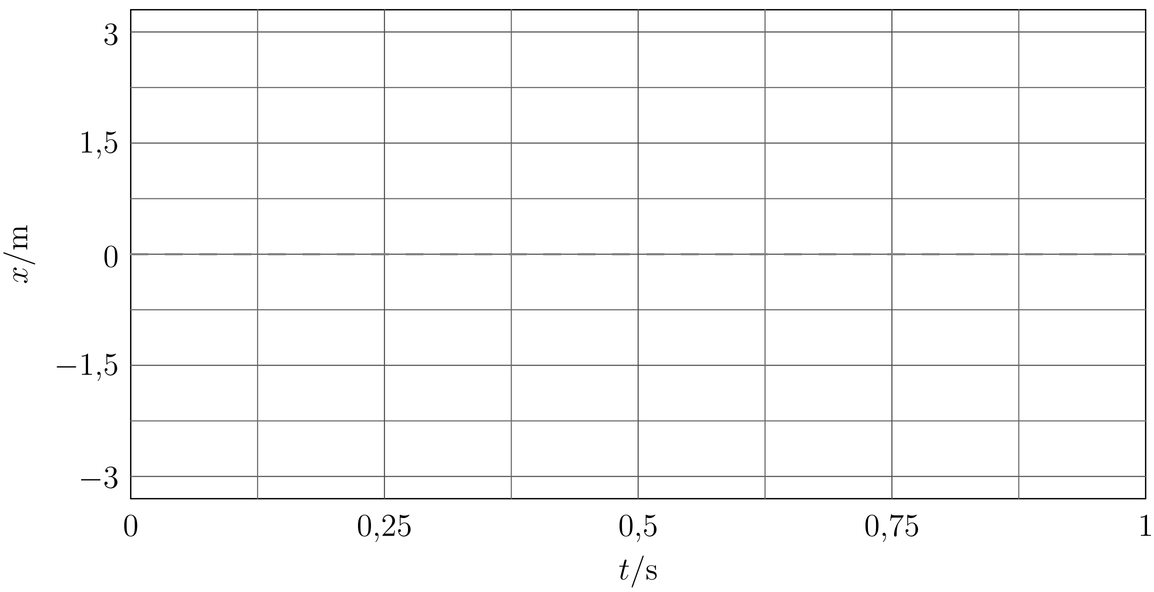
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

gdzie x_m, ω i ϕ są stałymi. Na rysunku można dostrzec ekstremalne momenty ruchu kulki: 1 i 5 odpowiadają maksymalnemu wychyleniu kulki, 3 minimalnemu. W momentach 2 i 4 kulka przechodzi przez położenie równowagi.

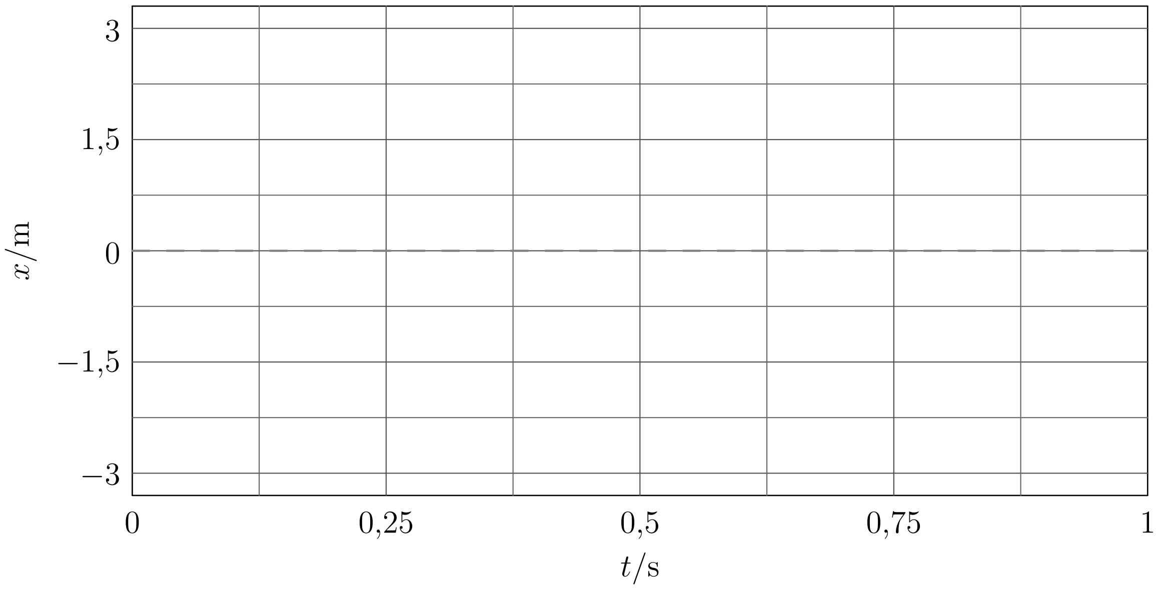
a) Narysuj wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu od momentu 1 do 5.



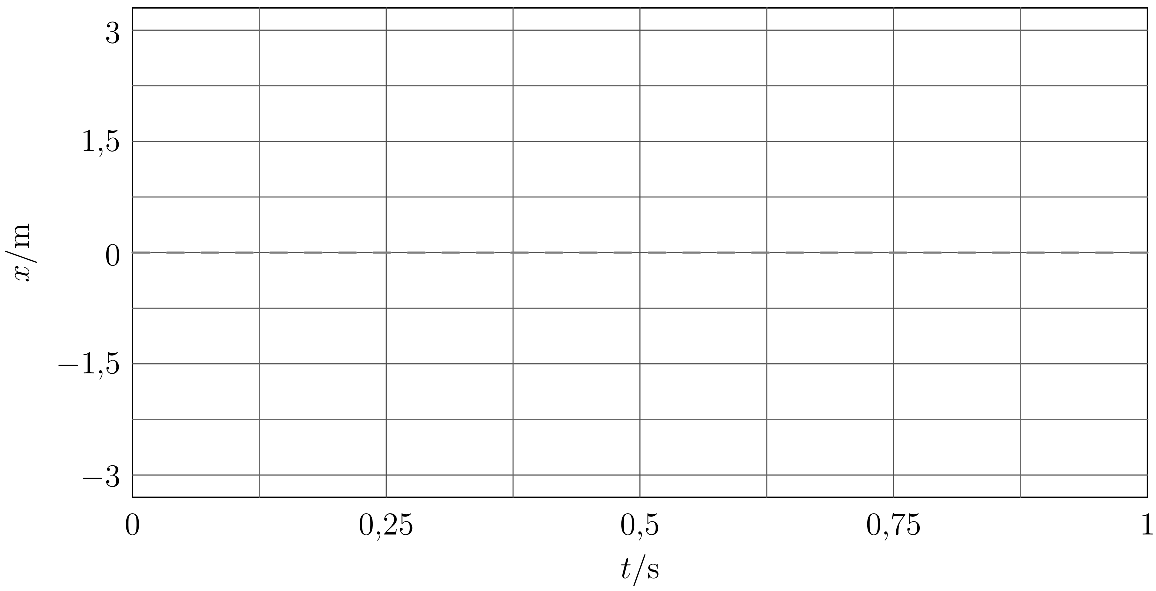
b) Narysuj wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Narysuj wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

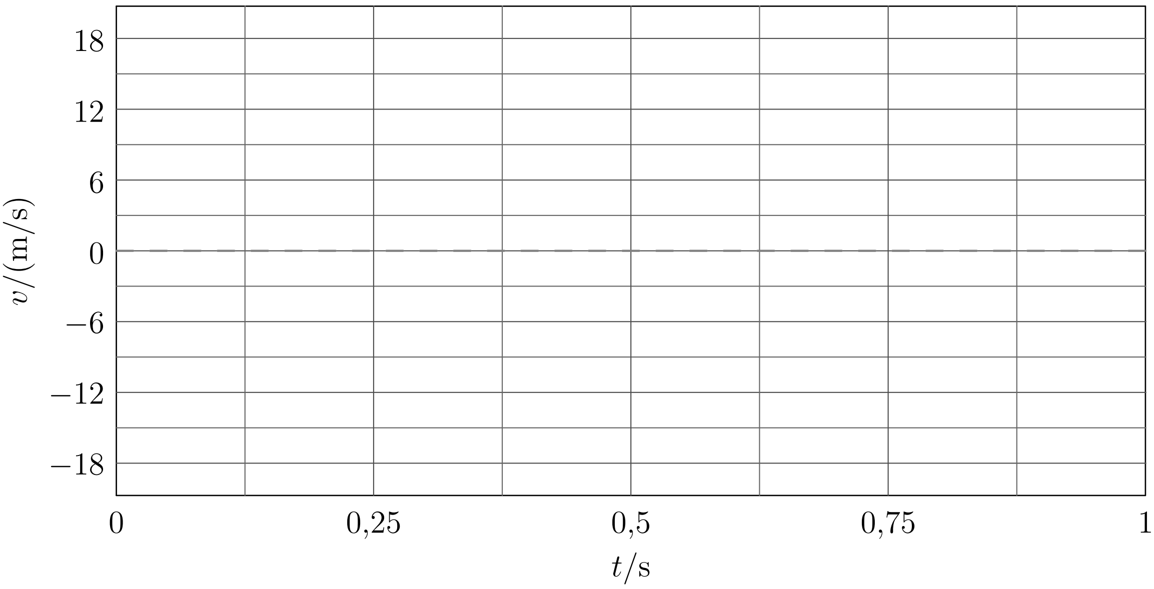


d) Narysuj wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



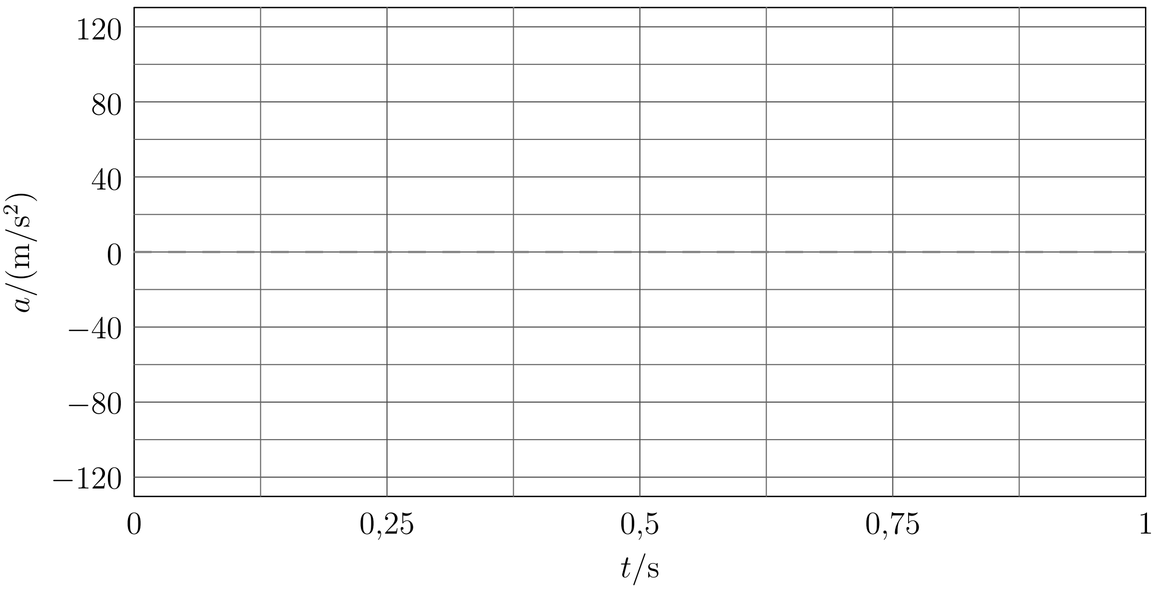
e) Jaką postać ma równanie opisujące prędkość kulki?

Narysuj wykres zależności prędkości kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



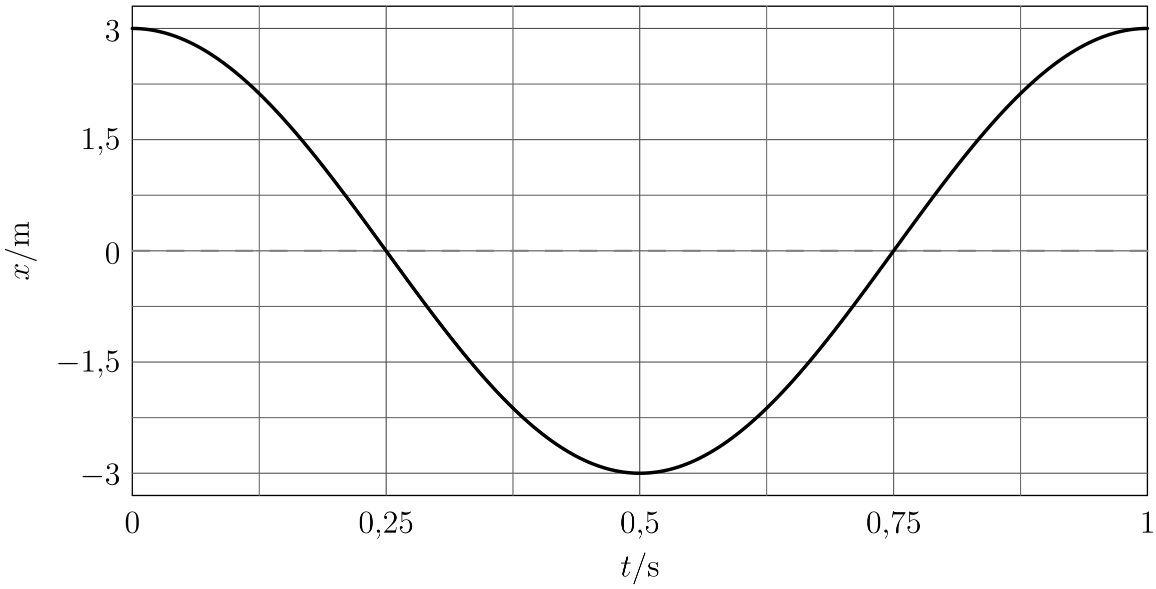
f) Jaką postać ma równanie opisujące przyspieszenie kulki?

Narysuj wykres zależności przyspieszenia kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).

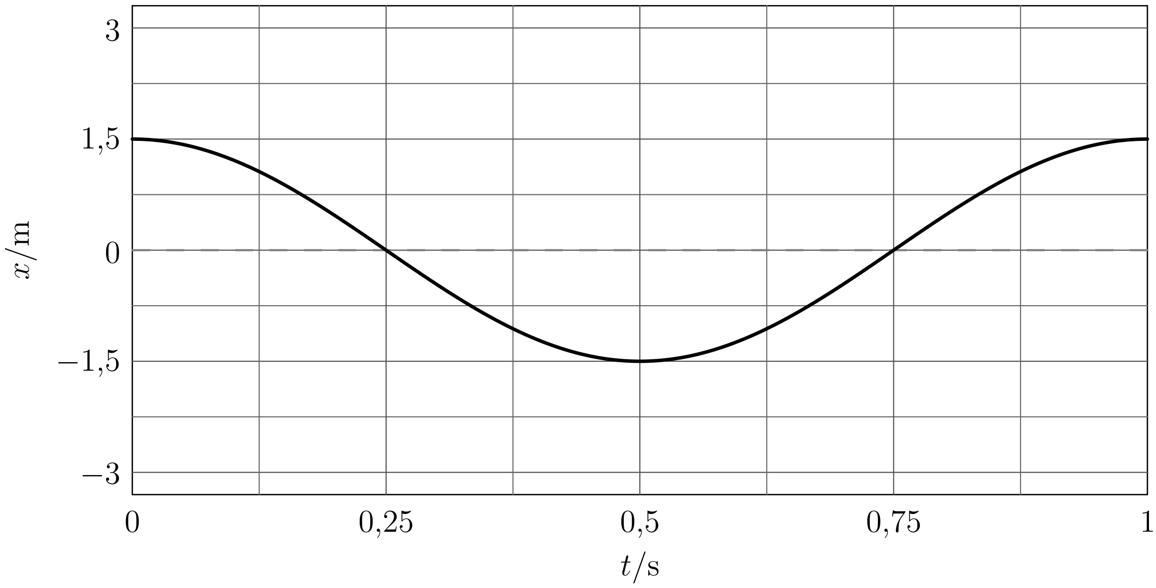


Odpowiedź:

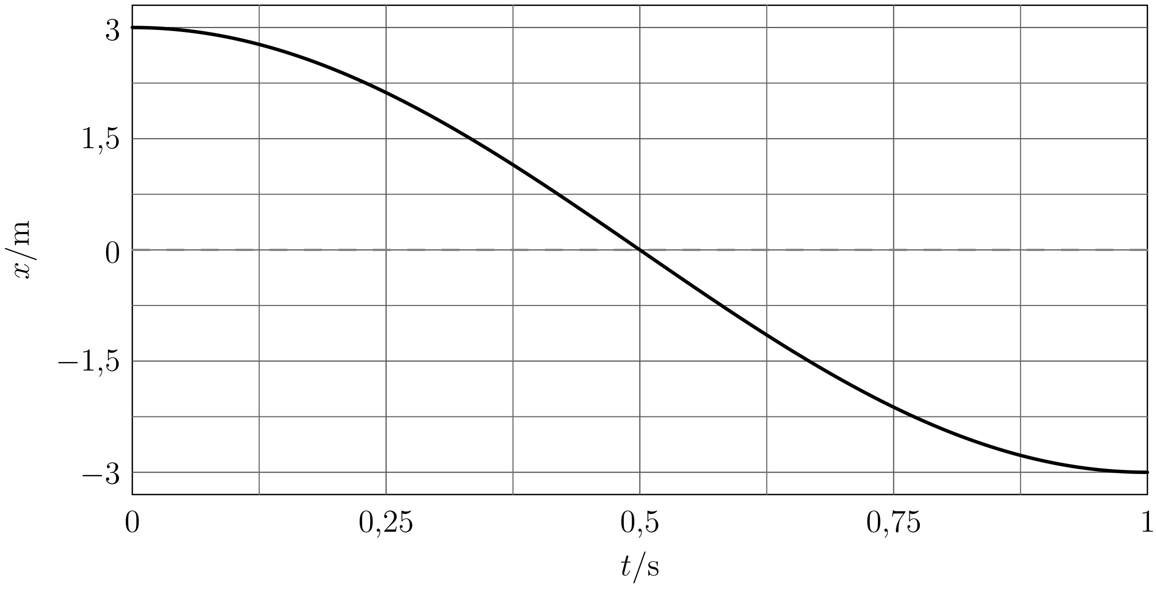
a) Wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu.



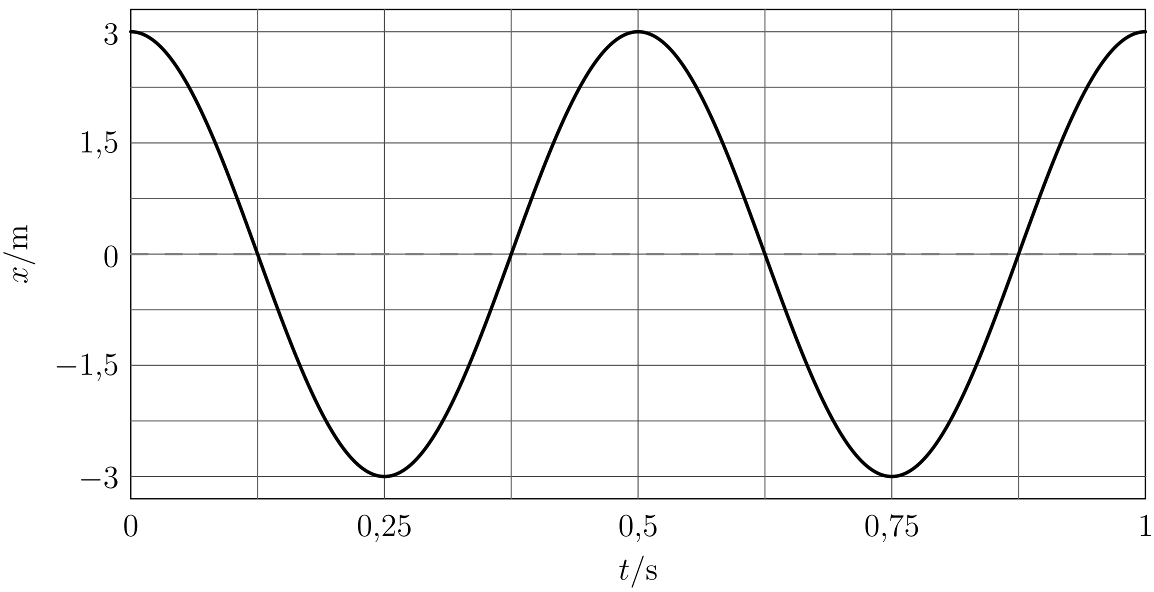
b) Wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

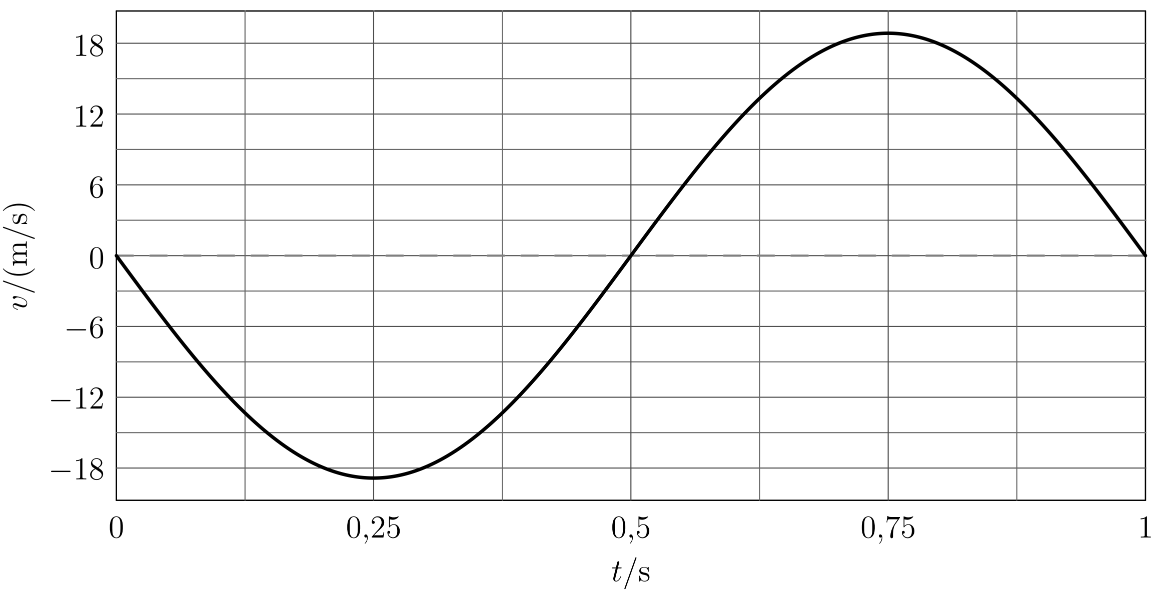


d) Wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



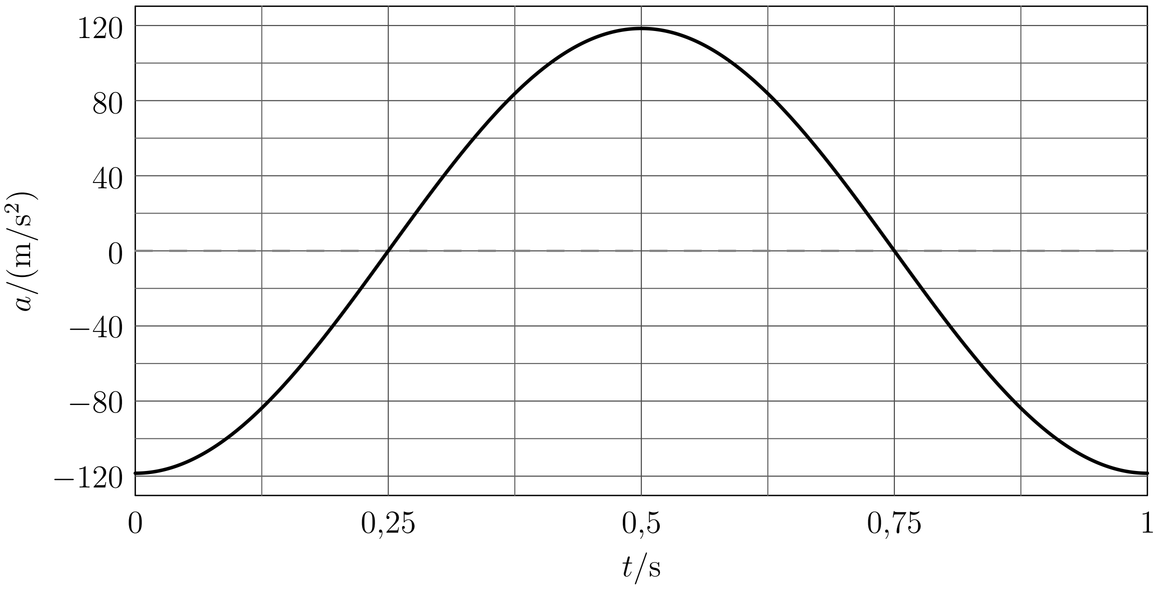
e) Wykres przedstawiający zależność prędkości kulki od czasu.
Równanie:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$



f) Wykres przedstawiający zależność przyspieszenia kulki od czasu.
Równanie:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



49 Zadanie – Kulka na sprężynie

Po idealnie gładkim stole porusza się kulka o masie 680 g, która umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości 67 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Kulkę odciągnięto na odległość 12 cm od położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie. Pomiń opory ruchu.

a) Wyznacz amplitudę.
b) Wyznacz okres drgań.
c) Wyznacz częstotliwość
d) Wyznacz częstość kołową.
e) Wyznacz maksymalną prędkość kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
f) Wyznacz maksymalne przyspieszenie kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięte.
g) Wyznacz maksymalną energię potencjalną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
h) Wyznacz maksymalną energię kinetyczną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

Odpowiedź:

a) Amplituda wynosi: $x_m = 12$ cm.
b) Okres drgań wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}633$ s, gdzie m to masa kulki, a k to stała sprężystości.
c) Częstotliwość wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 1{,}58$ Hz.
d) Częstość kołowa wynosi: $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 9{,}93\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
e) Maksymalna prędkość kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$v_{max} = \omega x_m \approx 1{,}19\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
f) Maksymalne przyspieszenie kulki zostaje osiągnięte na krańcach toru i wynosi:
$a_{max} = \omega^2 x_m \approx 11{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
g) Maksymalna energia potencjalna kulki zostaje osiągnięta na krańcach toru i wynosi:
$E_{pot} = \frac{k{x_m}^2}{2} \approx 0{,}482$ J.
h) Maksymalna energia kinetyczna kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$E_{kin} = \frac{m{v_m}^2}{2} \approx 0{,}482$ J.

50 Zadanie – Drgająca ciecz

Jaś nalał pewną ciecz o objętości 13 cm^3 do pionowo ustawionej U-rurki, której przekrój poprzeczny wynosił 0,6 cm^2. Następnie dmuchnął do jednego z ramion tak mocno, że poziom wody podniósł się w drugim ramieniu. Zmiany poziomu cieczy zachodzą jedynie w prostych fragmentach ramion rurki. Pomiń opory ruchu cieczy.
a) Wykaż, że siła, która dąży do przywrócenia stanu równowagi, to siła harmoniczna.
b) Oblicz częstotliwość, z jaką będzie drgała ciecz.

Odpowiedź:
a) Siła, która powoduje ruch to siła ciężkości: $Q = mg$, gdzie m to masa części cieczy, g to przyspieszenie ziemskie. Masę możemy wyrazić jako: $m = \rho V_{nad}$, gdzie ρ to gęstość cieczy, V_{nad} to objętość części cieczy. Objętość natomiast to: $V_{nad} = 2xS$, gdzie x to wychylenie cieczy ponad poziom równowagi, a S to przekrój poprzeczny. Zbierając wszystko razem otrzymujemy: $Q = 2Sg\rho x = kx$. Wartość siły ciężkości jest więc proporcjonalna do wychylenia cieczy z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi, zatem spełnia cechy siły harmonicznej.
b) Ciecz będzie drgała z częstotliwością: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Sg}{V}} \approx 1{,}52$ Hz.

51 Zadanie – Wahadło na planecie

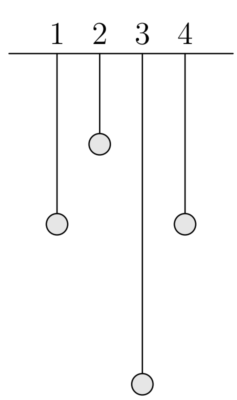
Na pewnej planecie mała kulka o masie 55 g została zawieszona na nitce o długości 18 cm. Kulka waha się z okresem wynoszącym 0,7 s oraz amplitudą znacznie mniejszą od długości nici. Opory ruchu można pominąć.
a) Czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne tej planety? Jeśli tak, to ile ono wynosi?
b) Jak zmieni się okres wahań kulki, jeżeli zwiększymy jej masę trzykrotnie?
c) Jaka musi być długość nici, aby ta sama kulka wahała się z okresem równym 1,4 s?

Odpowiedź:
a) Tak, przyspieszenie grawitacyjne wynosi: $g = \frac{4\pi^2}{T^2}l \approx 14{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, gdzie l to długość nici, a T to okres drgań.
b) Okres wahań nie zależy od masy kulki, więc okres wahań się nie zmieni.
c) Długość nici musi wynosić: $L = 4l = 72$ cm.

52 Zadanie – Rezonans mechaniczny

Na rozciągniętej poziomo lince zawieszamy cztery wahadła. W poniższej tabeli zestawiono wartości ich długości oraz mas zawieszonych ciężarków, gdzie l i m są jednostkami odpowiednio długości i masy.

numer wahadła	1	2	3	4
długość	l	$0{,}5l$	$2l$	l
masa	m	$2m$	m	$3m$



Pierwsze wahadło wprawiono w ruch. Po pewnym czasie zaobserwowano ruch pozostałych wahadeł. Które z nich miało największe wychylenie? Drugie, ponieważ znajduje się najbliżej? Trzecie, ponieważ ma taką samą masę? Czy może czwarte, ponieważ ma taką samą długość nici?

Odpowiedź: Najbardziej w ruch zostanie wprawione wahadło czwarte, ponieważ jego okres drgań jest równy okresowi drgań wahadła pierwszego.

53 Zadanie – Zanurzone wahadło [do dokończenia]

Na nieważkiej nici o długości $L = 1$ m zawieszono kulkę o promieniu $R = 1$ cm zrobioną z korkao gęstości $\rho_k = 250$ kg/m^3. Całość zanurzono w powietrzu o współczynniku lepkości $\eta = 0{,}000018$ Pa·s i gęstości $\rho_s = 12$ kg/m^3. Następnie kulkę wychylono z położenia równowagi o kąt $\alpha_0 = 4°$ i swobodnie puszczono. Kulka, przemieszczając się, ciągnie ze sobą lepką ciecz. Chcąc uwzględnić ten efekt w obliczeniach, musisz przyjąć, że oprócz kulki na wahadle znajduje się tzw. masa dołączona (wirtualna) równa masie cieczy o objętości równej połowie objętości wahającej się kulki. Oblicz jaką drogę przebędzie kulko do momentu zatrzymania się. W obliczeniach przyjmij, że siła oporu wyraża się wzorem Stokesa: $F = -6\pi\eta R v$.

Odpowiedź: Dystans przebyty przez kulkę wynosi:

$$S = L\alpha_0 \left(1 + \frac{4R^2(2\rho_k + \rho_s)\sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{g\eta}{LR^2(2\rho_k+\rho_o)}\right)^2}}{9\eta\pi} \right)$$

54 Zadanie – Przyssawka

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 33 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1017 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 888 kg.

55 Zadanie – Pod wodą

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 40 m. Przyjmij gęstość wody 1016 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 398 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

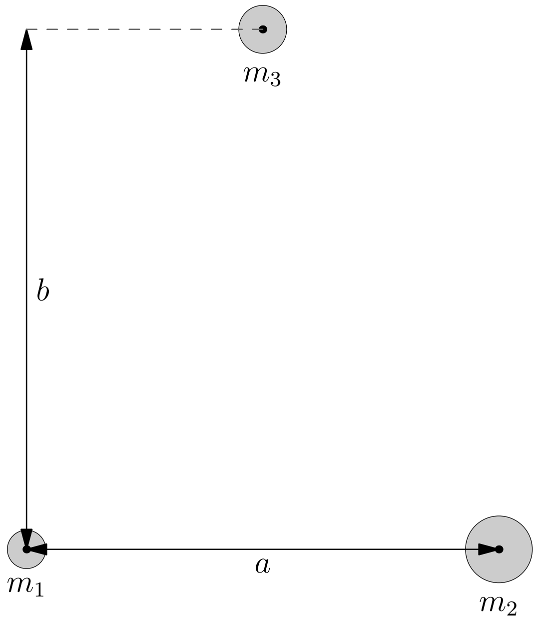
56 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 6 cm, a duży średnicę 39 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 1900 kg leżącą na dużym tłoku?

Odpowiedź: Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 45 kg.

57 Zadanie – Środek masy

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0{,}2$ kg, $m_2 = 1{,}1$ kg, $m_3 = 0{,}4$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 6$ cm, a wysokość to $b = 9$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy m_1.



Odpowiedź: Środek masy znajduje się w punkcie $S = (x_c, y_c)$, gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 4{,}59 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}12 \text{ cm}.$$