Środek Masy, 26 lutego 2017 r.

Dynamika

F. Dośrodkowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Działamy!

1 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $12{,}5 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 4,4 m/s. Druga część o masie $27{,}4 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 9,3 m/s.

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3 v_3 = m_1 v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1 v_1 / v_3 \approx 5{,}91 \cdot 10^3$ kg.

2 Zadanie – Spadochroniarz

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 145 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 5,5 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 1420$ N.

3 Zadanie – Zderzenie wagonów

Wagon kolejowy o masie 33 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 2,4 m/s, uderzył w stojący skład 7 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:
a) wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
b) o ile zmniejszyła się na skutek sczepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

Odpowiedź:
a) Po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}3$ m/s.
b) Energia kinetyczna ruchu postepowego zmniejszyła się o $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n+1)v^2)/2 \approx 83{,}2$ kJ.

4 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Kula o masie 5 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 43 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,

c) wartość prędkości kuli po czasie 11 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Odpowiedź:
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 65,2 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 13$ m/s^2.
c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 143$ m/s.

5 Zadanie – Kula w cieczy

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 1700 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 2700 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}37$.

6 Zadanie – Ołów, lód i woda

Kulę o masie 9 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,4 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10500 kg/m^3, a gęstość wody 1000 kg/m^3. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -20{,}4 \text{ mm}$$

A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

7 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3600 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 6 kg, a każdy student może wykonać pracę 32000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 22 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 146.

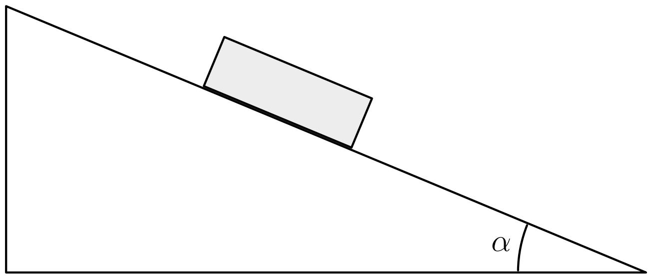
8 Zadanie – Wahadło

Kulkę o masie 40 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 9 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 1,33 m/s.

9 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 46°$ zsuwa się cegła o masie 5,2 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 7{,}05$ m/s^2, w dół równi.

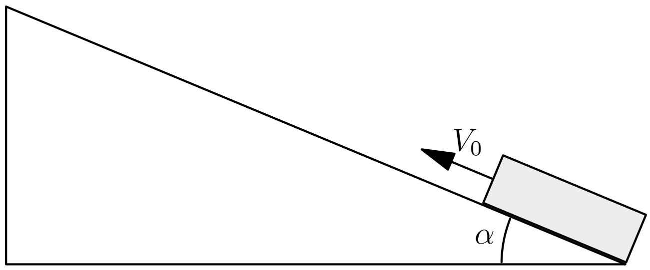
10 Zadanie – Równia pochyła

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 24° zsuwa się cegła o masie 5,4 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 3{,}99$ m/s^2, w dół równi.

11 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

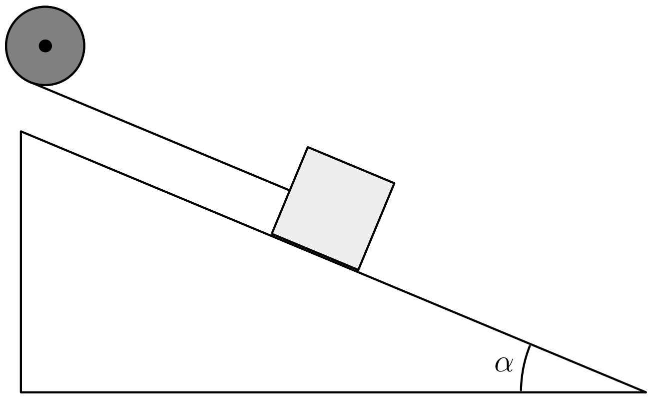
U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 452 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 8$ m/s wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 25°$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 0,5.
a) Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
b) Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
c) Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



Odpowiedź:
a) Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi $a = g(f\cos\alpha + \sin\alpha) \approx 8{,}58$ m/s^2, gdzie α to kąt nachylenia równi, a f to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
b) Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to $t = \frac{V_0}{a} \approx 0{,}93$ s.
c) Droga hamowania to $s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}V_0 t \approx 3{,}73$ m.

12 Zadanie – Sześcian na równi

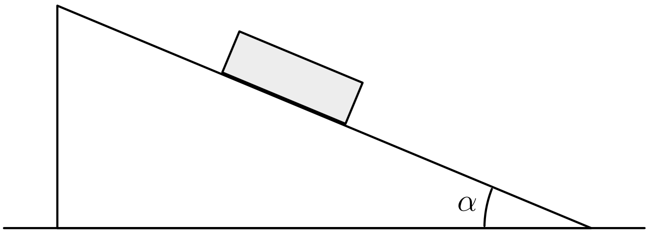
Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 45°$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 26 dag i o długości krawędzi 6 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 87 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześcianu znajduje się 60 cm nad stołem.
a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?
Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,32.



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie sześcianu o masie m_s wyniesie $a = m_s g \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{m_s + \frac{1}{2}m_w} = 1{,}76$ m/s^2, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię, a m_w to masa walca.
b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0{,}981$ s, gdzie s to droga jaką pokona sześcian.

13 Zadanie – Jeżdżąca równia

Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie naczylenia $\alpha = 30°$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,3.



Odpowiedź: Wartość przyśpieszenia minimalnego wynosi $a_{min} = g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 2{,}32$ m/s^2, a wartość przyśpieszenia maksymalnego wynosi $a_{max} = g\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 10{,}4$ m/s^2, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię.

14 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 56 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 51 N na drodze 2,8 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 9 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F-T)S/m} \approx 2{,}05$ m/s.

15 Zadanie – Pocisk

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 55 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 43 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 611 m/s, a po przejściu przez drzewo zmiejszyła się do 491 m/s.
a) Ile wynosi praca sił oporu?
b) Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
c) Ile wynosi czas przebijania drzewa?
Załóż, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

Odpowiedź:
a) Praca sił oporu wynosi $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -3640$ J, gdzie V_1 i V_2 to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie m przed wbiciem w drzewo i po przebiciu drzewa.
b) Wartość opóźnienia kuli wynosi $a = \frac{W}{md} \approx 154$ km/s^2, gdzie d to średnica drzewa.
c) Czas wynosi $t = \frac{V_1 - V_2}{a} \approx 0{,}78$ ms.

16 Zadanie – Krążek hokejowy

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 3 m, a po zderzeniu przebył drogę 1 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,14. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

Odpowiedź: Szybkość początkowa wynosi $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 3{,}31$ m/s, gdzie s_1 to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę, s_2 to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a f to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

17 Zadanie – Droga hamowania

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 50 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

Odpowiedź: Droga, jaką pokona samochód, wynosi $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 22{,}7$ m, gdzie V_0 to prędkość początkowa samochodu, t_1 to czas reakcji kierowcy, a f to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

18 Zadanie – Spacer z sankami

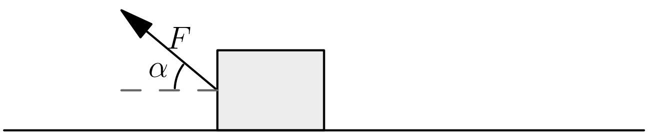
Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 40 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 65 N i tworzy on kąt 15° z poziomem.

Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 2510$ J.

19 Zadanie – Ukośna siła

Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,8 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 5$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,07.

a) Oblicz przyśpieszenie klocka.
b) Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
c) Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie klocka wynosi $a \approx 4{,}04$ m/s^2.
b) Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi $s_{0\to5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 50{,}5$ m, gdzie t to czas.
c) Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi $s_3 = s_{0\to3} - s_{0\to2} \approx 10{,}1$ m.

20 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta Mlmc wokół gwiazdy Prpl. Przyjmij, że Mlmc i Prpl są punktami materialnymi o masach odpowiednio $2{,}19 \cdot 10^{24}$ kg i $3{,}79 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $465 \cdot 10^6$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 1{,}17 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

21 Zadanie – Samochód na moście

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 74 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 10% ciężaru samochodu?

Odpowiedź: Prędkość wynosi $V = \sqrt{gR(1-k)} \approx 25{,}5$ m/s, gdzie $k = 10\%$, a R to promień krzywizny mostu.

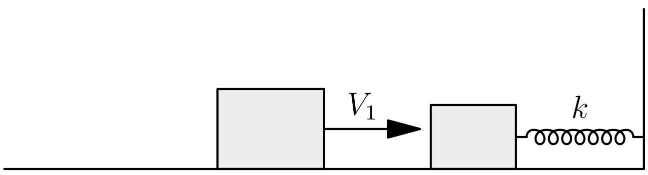
22 Zadanie – Obrót Ziemi

Oblicz:
a) z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 90% siły grawitacji działającej na niego.
b) ile wynosi ciężar człowieka o masie 70 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

Odpowiedź:
a) Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić $V = \sqrt{Rg(1-k)} \approx 2500$ m/s, gdzie R to promień Ziemi, a $k = 0{,}9$.
b) Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 683 N.

23 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,9 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 153$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześcian o masie 1 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 2$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



Odpowiedź: Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}} = 11{,}7$ cm, gdzie m_1 to masa uderzającego klocka, a m_2 to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

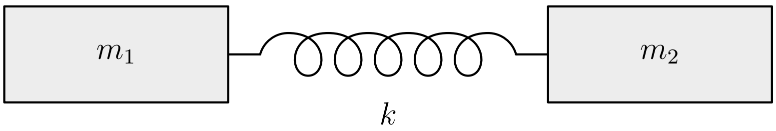
24 Zadanie – Sprężyna

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,4 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 1,1 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 1,2 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 1,8 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}364$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0{,}316$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

25 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 48$ N/m, $m_1 = 2$ kg oraz $m_2 = 4$ kg.



Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 1{,}05$ s.

26 Zadanie – Ciężarek na lince

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,92 s zakreśla okrąg o promieniu 112 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 55 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx 0{,}222$ s.

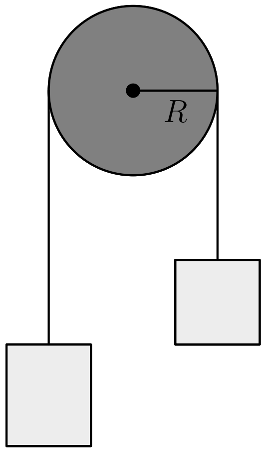
27 Zadanie – Tarcza

Na środku tarczy o średnicy 3 m i masie 114 kg, znajduje się człowiek o masie 70 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,6 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

Odpowiedź: Częstotliwość układu wyniesie $f_2 = f_1\frac{Md^2}{8mr^2+Md^2} = 0{,}251$ Hz, gdzie d to średnica tarczy o masie M, f_1 to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a r to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie m od osi obrotu.

28 Zadanie – Maszyna Atwooda

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0{,}6$ m i masie 4 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszone są dwa obciążniki o masach 1,13 kg i 0,33 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomiń. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:
a) załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
b) załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie układu wynosi $a_1 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = 5{,}37\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie m_1 i m_2 to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.
b) Przyśpieszenie układu wynosi $a_2 = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_3} = 2{,}27\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie m_3 to masa walca.

29 Zadanie – Naturalny satelita

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $46 \cdot 10^3$ kg okrążającego w czasie 80,5 h jednorodną planetę o masie $880 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 108 \cdot 10^3$ km.

30 Zadanie – Zmiana orbity

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 610 kg znajduje się w odległości 5700 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8000 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi $3{,}69\ \mathrm{m/s^2}$, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

Odpowiedź: Praca wyniesie $W = \frac{GMm}{2}(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2}) = 276$ MJ, gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity, R to promień Marsa, a h_1 i h_2 to odległości satelity od powierzchni planety.

31 Zadanie – Prędkość ucieczki

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety $Z90$, stanowi 53% masy Ziemi, a jej promień wynosi 12100 km. Oblicz:
a) prędkość ucieczki ciała z planety $Z90$.
b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie $Z90$ do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 29 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

Odpowiedź:
a) Prędkość ucieczki wyniesie $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 5{,}91$ km/s, gdzie G to stała grawitacji, R to promień planety $Z90$ o masie M.
b) Stosunek wysokości wyniesie $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 6{,}79$, gdzie h i h_z to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie $Z90$ i na Ziemi, a g i g_z to odpowiednio przyśpieszenie na planecie $Z90$ i na Ziemi.

32 Zadanie – Tunel średnicowy

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 6900 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $8{,}17 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 8100 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}' = -\int_R^r F(r')\,dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\,dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 4300 \text{ m/s}$$

33 Zadanie – Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 46 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 96 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 840$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_a M_a = r_b M_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 189 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 90{,}7 \cdot 10^3$ km, $d \approx 280 \cdot 10^3$ km.

34 Zadanie – Dwie gwiazdy

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 7 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 11 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 53$ km/s, $v_{B1} = 41$ km/s, $d_1 = 8 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 35$ km/s, $d_2 = 44 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

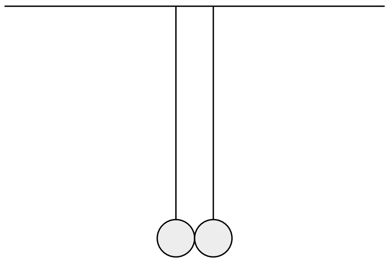
Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$

$$\approx 45 \text{ km/s}$$

35 Zadanie – Dwie kulki na linkach

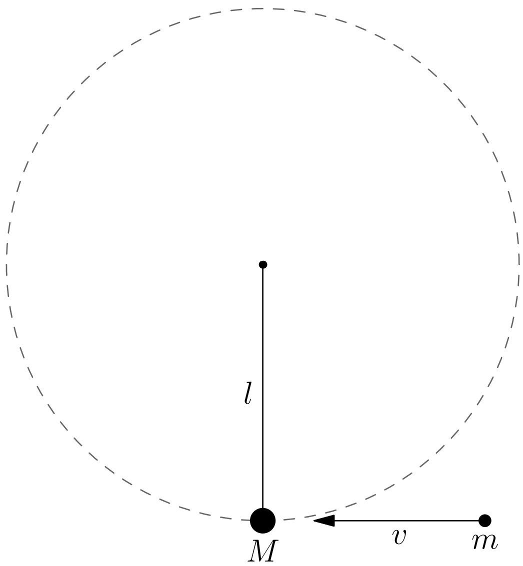
Dwie stykające się małe kulki o masach 0,6 kg i 0,3 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 0,9 m. Lżejsza kulka zostaje odchylona w płaszczyźnie linek o kąt 35° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



Odpowiedź: Wysokość wyniesie $H = \frac{m^2 l(1-\cos\alpha)}{(m+M)^2} = 1{,}8$ cm, gdzie m i M są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki, l to długość linki, a α to kąt odchylenia.

36 Zadanie – Postrzelone wahadło

Metalowy ciężarek o masie $M = 300$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 52$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 16$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Pomiń opory ruchu bryły.



Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

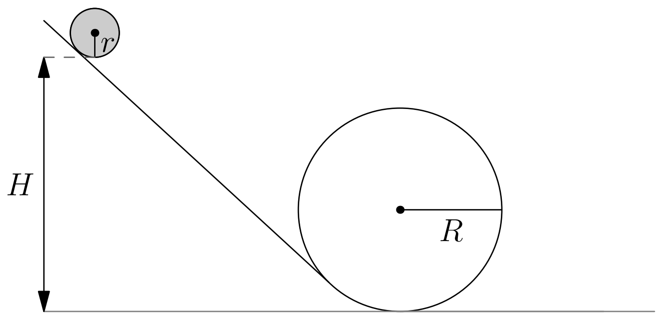
$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 99{,}7$ m/s.

37 Zadanie – Pętla śmierci

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0{,}09$ m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu $R = 0{,}8$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



Odpowiedź: Minimalna wysokość wynosi $H = 2{,}7(R - r) = 1{,}92$ m.

38 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Proton porusza się z prędkością o wartości 3000 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 3,5 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg.

Odpowiedź: Proton porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = F/m \approx 101 \cdot 10^{10}$ m/s^2.

39 Zadanie – Przyssawka

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 17 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 985 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 228 kg.

40 Zadanie – Pod wodą

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 40 m. Przyjmij gęstość wody 1021 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 400 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

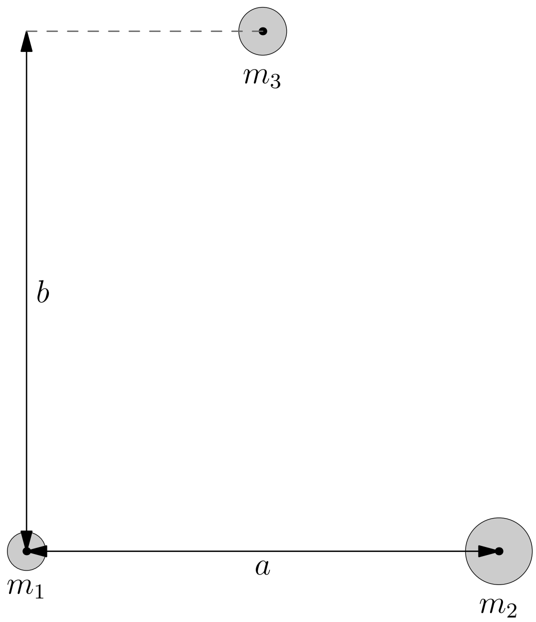
41 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 3 cm, a duży średnicę 39 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 300 kg leżącą na dużym tłoku?

Odpowiedź: Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 1,78 kg.

42 Zadanie – Środek masy

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0{,}4$ kg, $m_2 = 1$ kg, $m_3 = 0{,}8$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 6$ cm, a wysokość to $b = 9$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy m_1.



Odpowiedź: Środek masy znajduje się w punkcie $S = (x_c, y_c)$, gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 3{,}82 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 3{,}27 \text{ cm}.$$

