

Dynamika

F. Dośrodkowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Działamy!

1 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-18, id: pl-dynamika-0000500, diff: 1

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $17,5 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 2,4 m/s. Druga część o masie $21,8 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 11,1 m/s.

Wskazówka: Jakie wielkości są zachowane?

Wskazówka: Którą z zachowanych wielkości można obliczyć na podstawie danych?

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3 v_3 = m_1 v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1 v_1 / v_3 \approx 3,78 \cdot 10^3$ kg.

2 Zadanie – Spadochroniarz

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0001000, diff: 1

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 126 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 6,1 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyspieszenie ziemskie jest tam równe $9,8 \text{ m/s}^2$. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Wskazówka: Jakim ruchem względem Ziemi porusza się spadochroniarz? Jakie siły na niego działają i jaki związek zachodzi między nimi?

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyspieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 1230 \text{ N}$.

3 Zadanie – Zderzenie wagonów

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0002000, diff: 1

Wagon kolejowy o masie 21 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 3,6 m/s, uderzył w stojący skład 8 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:

- wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
- o ile zmniejszyła się na skutek szepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Zasada zachowania pędu (składowa pozioma) prowadzi do równania $mv_0 = (n + 1)mv$, a więc po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0,4$ m/s.

Odpowiedź:

- a) Po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0,4$ m/s.
 b) Energia kinetyczna ruchu postępowego zmniejszyła się o $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n + 1)v^2)/2 \approx 121$ kJ.

4 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0004000, diff: 2

Kula o masie 4 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe $9,8$ m/s². Wartość siły elektrostatycznej to 44 N. Oblicz:

- a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
 b) wartość przyspieszenia kuli,
 c) wartość prędkości kuli po czasie 6 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Wskazówka: Pod jakim względnym kątem skierowane są dwie siły? Z jakiego twierdzenia dotyczącego trójkąta prostokątnego można skorzystać?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły to ok. 58,9 N. Z której zasady dynamiki należy skorzystać, by obliczyć przyspieszenie kuli?

Wskazówka: Wartość przyspieszenia to ok. 14,7 m/s². Przyspieszenie to jest stałe. Jaką prędkość po czasie t osiągnie ciało poruszające się ze stałym przyspieszeniem a ?

Odpowiedź:

- a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 58,9 N.
 b) Wartość przyspieszenia to $a = F/m \approx 14,7$ m/s².
 c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 88,4$ m/s.

5 Zadanie – Kula w cieczy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-29, id: pl-dynamika-0004500, diff: 1

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 620 kg/m³ pływa w cieczy o gęstości 930 kg/m³. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Wskazówka: Jakie siły działają na kulę?

Wskazówka: Jaka jest wartość wypadkowej siły?

Wskazówka: $V_2 d_1 g = V d_b g$

Wskazówka: $V_1 + V_2 = V$

Wskazówka: $V_1/V = 1 - V_2/V$

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0,333$.

6 Zadanie – Ołów, lód i woda

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-dynamika-0004750, diff: 2

Kulę o masie 8,3 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię $0,38 \text{ m}^2$. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 11000 kg/m^3 , a gęstość wody 1000 kg/m^3 . Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Wskazówka: Jak związana jest wysokość lustra wody w pojemniku z objętością wody i ciał w niej zanurzonych?

Wskazówka: Jaką objętość wody wypiera kula lodowa zawierająca kulę ołowianą?

Wskazówka: Jaką objętość wody wyprze ołowiana kula po stopieniu lodu?

Wskazówka: Ile wody powstanie ze stopionego lodu?

Wskazówka: Kula lodowa zawierająca kulę ołowianą wypiera objętość wody równą $(m_p + m_i)/\rho_w$, gdzie m_p jest masą ołowianej kuli, m_i masą lodu, a ρ_w gęstością wody.

Wskazówka: Po stopieniu lodu ołowiana kula opadnie na dno i będzie wypierać objętość wody równą własnej objętości, a więc m_p/ρ_p , gdzie ρ_p to gęstość użytego stopu ołowiu.

Wskazówka: Lód stopi się, a powstała woda będzie mieć objętość m_i/ρ_w , czyli taką samą, jaką wypierał lód.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -19,9 \text{ mm}$$

A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

7 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0005000, diff: 1

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 2400 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 4 kg, a każdy student może wykonać pracę 39000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 20 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Wskazówka: O ile zmieni się energia potencjalna cegieł?

Wskazówka: Ilu studentów potrzeba, by zmienić energię potencjalną cegieł o 1881600 J? Zwróć uwagę na fakt, że część studenta nie może wnosić cegieł :-)

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 49.

8 Zadanie – Wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0006000, diff: 1

Kulkę o masie 40 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 9 cm. Nici cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zanedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne jest równe $9,8 \text{ m/s}^2$.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania możesz skorzystać?

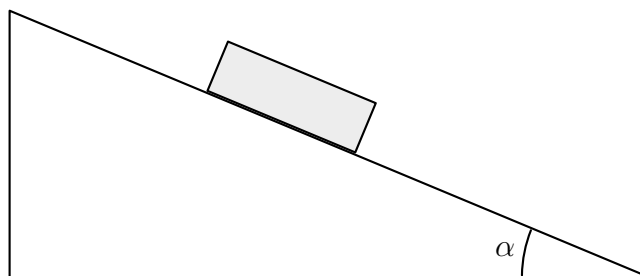
Wskazówka: Korzystając z równania opisującego zasadę zachowania energii mechanicznej, oblicz wartość prędkości kulki w najniższym punkcie jej toru.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 1,33 m/s.

9 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-29, id: pl-dynamika-0006450, diff: 1

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 47^\circ$ zsuwa się cegła o masie 5,7 kg. Oblicz przyspieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe $9,8 \text{ m/s}^2$. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

Wskazówka: Ile wynosi składowa przyspieszenia ziemskiego równoległa do równi?

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyspieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin \alpha \approx 7,17 \text{ m/s}^2$, w dół równi.

10 Zadanie – Równia pochyła

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-29, id: pl-dynamika-0006500, diff: 1

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 13° zsuwa się cegła o masie 4,6 kg. Oblicz przyspieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe $9,8 \text{ m/s}^2$.

Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

Wskazówka: Ile wynosi składowa przyspieszenia ziemskiego równoległa do równi?

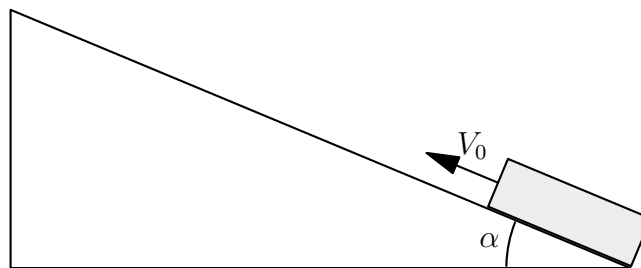
Odpowiedź: Cegła porusza się z przyspieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin \alpha \approx 2,2 \text{ m/s}^2$, w dół równi.

11 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0006550, diff: 2

U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 768 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 9 \text{ m/s}$ wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 35^\circ$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 1,2.

- Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
- Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
- Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



Wskazówka: Jakie siły działają na klocek podczas jego ruchu?

Wskazówka: Wartość opóźnienia klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F_T + F_s}{m},$$

gdzie F_T to siła tarcia, a F_s to siła zsuwająca, czyli

$$a = \frac{mgf \cos \alpha + mg \sin \alpha}{m}.$$

Wskazówka: Zależność czasu od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym to

$$t = \frac{|\Delta V|}{a}.$$

Wskazówka: Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym? **Albo:** Jak zmienia się energia całkowita klocka na skutek pracy siły tarcia?

Odpowiedź:

- a) Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi $a = g(f \cos \alpha + \sin \alpha) \approx 15,3 \text{ m/s}^2$, gdzie α to kąt nachylenia równi, a f to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
- b) Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to $t = \frac{V_0}{a} \approx 0,59 \text{ s}$.
- c) Droga hamowania to $s = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} V_0 t \approx 2,66 \text{ m}$.

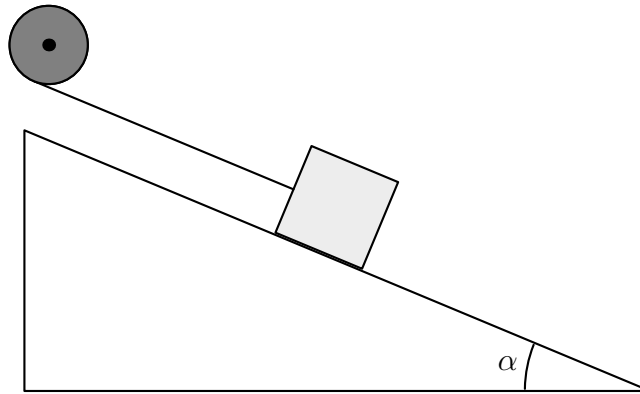
12 Zadanie – Sześcián na równi

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0006600, diff: 2

Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 25 dag i o długości krawędzi 6 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 85 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniższej położona krawędź sześcianu znajduje się 50 cm nad stołem.

- a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
- b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?

Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,3.



Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $\epsilon = \frac{M}{I}$, gdzie M to moment siły, a ϵ to przyśpieszenie kątowe. Moment bezwładności walca o promieniu R wynosi $I = \frac{1}{2} m_w R^2$.

Wskazówka: Przyśpieszenie kątowe walcowego bloku

$$\epsilon = \frac{a}{R},$$

gdzie a to przyśpieszenie liniowe sześcianu.

Wskazówka: Moment siły działający na walcowy blok

$$M = F_L R,$$

gdzie F_L to siła naciągu linki.

Wskazówka: Uwzględniając wszystkie siły działające na sześcián, otrzymujemy

$$a = \frac{m_s g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - F_L}{m_s}.$$

Wskazówka: Droga, jaką pokona sześcian, wynosi

$$s = \frac{h}{\sin \alpha},$$

gdzie h to wysokość względem stołu, na jakiej początkowo znajduje się najniżej położona krawędź sześcianu.

Odpowiedź:

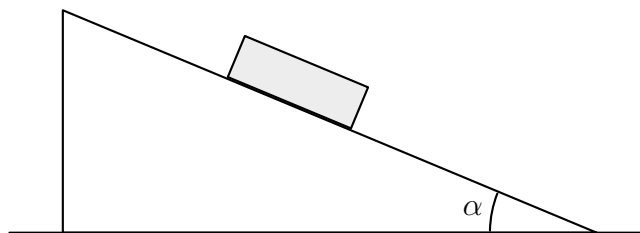
a) Przyspieszenie sześcianu o masie m_s wyniesie $a = m_s g \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{m_s + \frac{1}{2} m_w} = 0,872 \text{ m/s}^2$, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię, a m_w to masa walca.

b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1,52 \text{ s}$, gdzie s to droga jaką pokona sześcian.

13 Zadanie – Jeżdżąca równia

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0006700, diff: 3

Z jakim przyspieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie nacylenia $\alpha = 20^\circ$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,1.



Wskazówka: Należy znaleźć minimalne przyspieszenie równi (a_{min}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zsunie, oraz maksymalne przyspieszenie równi (a_{max}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zacznie wsuwać.

Wskazówka: Jakie siły działają na klocek w nieinercyjnym układzie związanym z równią?

Wskazówka: Żądamy, by wypadkowa sił działających na klocek w układzie związanym z równią była równa zero, wówczas składowe siły wzdłuż równi muszą spełniać równanie

$$F_s - F_T - F_b \cos \alpha = mg \sin \alpha - f(mg \cos \alpha + F_b \sin \alpha) - F_b \cos \alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{min},$$

gdzie F_s to siła zsuwająca, F_T to siła tarcia, F_b to siła bezwładności, a m to masa klocka.

Wskazówka: Gdy szukamy a_{max} w układzie związanym z równią, siła tarcia jest skierowana w dół równi

$$F_s + F_T - F_b \cos \alpha = mg \sin \alpha + f(mg \cos \alpha + F_b \sin \alpha) - F_b \cos \alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{max}.$$

Odpowiedź: Wartość przyspieszenia minimalnego wynosi $a_{min} = g \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = 2,5 \text{ m/s}^2$, a wartość przyspieszenia maksymalnego wynosi $a_{max} = g \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = 4,72 \text{ m/s}^2$, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię.

14 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-15, id: pl-dynamika-0006800, diff: 1

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 51 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 55 N na drodze 2,2 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 14 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Wskazówka: Jak praca wypadkowej siły związana jest ze zmianą szybkości ciała?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły działającej na łyżwiarza to $F - T$, gdzie F to wartość siły rozpędzającej, a T to wartość siły oporu.

Wskazówka: Praca wypadkowej siły na drodze S , czyli $W = (F - T)S$, jest równa zmianie energii kinetycznej łyżwiarza.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F - T)S/m} \approx 1,88$ m/s.

15 Zadanie – Pocisk

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0006850, diff: 2

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 51 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 40 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 548 m/s, a po przejściu przez drzewo zmniejszyła się do 428 m/s.

- Ile wynosi praca sił oporu?
- Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
- Ile wynosi czas przebijania drzewa?

Załącz, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

Wskazówka: Zmiana energii kinetycznej pocisku jest równa pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W.$$

Wskazówka: Praca siły tarcia

$$W = -F_o d,$$

gdzie F_o to wartość siły oporu drzewa.

Wskazówka: Wartość opóźnienia kuli

$$a = \frac{F_o}{m}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z zależności czasu od przyspieszenia dla ruchu jednostajnie opóźnionego

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t .

Odpowiedź:

- a) Praca sił oporu wynosi $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -2990$ J, gdzie V_1 i V_2 to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie m przed wbiciem w drzewo i po przebicciu drzewa.
 b) Wartość opóźnienia kuli wynosi $a = \frac{W}{md} \approx 146$ km/s², gdzie d to średnica drzewa.
 c) Czas wynosi $t = \frac{V_1 - V_2}{a} \approx 0,82$ ms.

16 Zadanie – Krążek hokejowy

Magda Gładka, update: 2017-09-20, id: pl-dynamika-0006900, diff: 2

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 3 m, a po zderzeniu przebył drogę 1 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,13. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

Wskazówka: Skorzystaj z zależności drogi od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$s = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2,$$

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t .

Albo: Skorzystaj z tego, że zmiana energii kinetycznej krążka o masie m to skutek pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W,$$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mas,$$

gdzie s to całkowita droga przebyta przez krążek, do momentu zatrzymania, a a to wartość opóźnienia krążka, równa wartości bezwzględnej przyspieszenia.

Wskazówka: Wartość opóźnienia krążka

$$a = gf.$$

Odpowiedź: Szybkość początkowa wynosi $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 3,19$ m/s, gdzie s_1 to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę, s_2 to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a f to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

17 Zadanie – Droga hamowania

Magda Gładka, update: 2017-07-03, id: pl-dynamika-0006950, diff: 2

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 90 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszał się samochód?

Wskazówka: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnym

$$s_1 = V_0 t_1.$$

Wskazówka: Jak zmienia się energia kinetyczna na skutek pracy siły tarcia? **Albo:** Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym i jak powiązane są prędkość początkowa z czasem tego ruchu?

Wskazówka: Zmiana energii kinetycznej na skutek pracy siły tarcia

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= W, \\ -\frac{mV_0^2}{2} &= -mgf s_2, \\ s_2 &= \frac{V_0^2}{2gf}, \end{aligned}$$

Albo: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$\begin{aligned} s_2 &= V_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}, \\ a &= gf, \\ t_2 &= \frac{|\Delta V|}{a}, \end{aligned}$$

gdzie a to wartość opóźnienia samochodu, ΔV to zmiana prędkości w czasie t_2 , gdzie t_2 to czas od momentu zadziałania hamulców do momentu zatrzymania samochodu.

Odpowiedź: Droga, jaką pokona samochód, wynosi $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 57,5$ m, gdzie V_0 to prędkość początkowa samochodu, t_1 to czas reakcji kierowcy, a f to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

18 Zadanie – Spacer z sankami

Piotr Niezurawski, update: 2017-10-27, id: pl-dynamika-0007000, diff: 1

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 40 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 52 N i tworzy on kąt 25° z poziomem.

Wskazówka: Jak obliczyć składową poziomą siły?

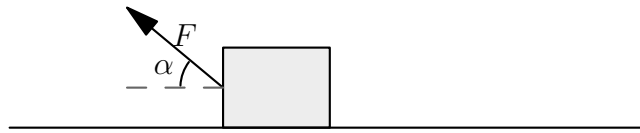
Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs \cos \alpha \approx 1890$ J.

19 Zadanie – Ukośna siła

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0007100, diff: 2

Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,8 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 7$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,07.

- Oblicz przyspieszenie klocka.
- Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
- Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



Wskazówka: Przyspieszenie klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F \cos \alpha - f(mg - F \sin \alpha)}{m},$$

gdzie f to współczynnik tarcia klocka o podłogę.

Wskazówka: Związek między przyspieszeniem a drogą w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Odpowiedź:

a) Przyspieszenie klocka wynosi $a \approx 5,93 \text{ m/s}^2$.

b) Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi $s_{0 \rightarrow 5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 74,2 \text{ m}$, gdzie t to czas.

c) Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi $s_3 = s_{0 \rightarrow 3} - s_{0 \rightarrow 2} \approx 14,8 \text{ m}$.

20 Zadanie – Przyspieszenie planety

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-19, id: pl-dynamika-0008000, diff: 1

Oblicz wartość przyspieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $9,13 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ i $3,37 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $148 \cdot 10^6 \text{ km}$ od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Zagadnienie rozważ w układzie inercyjnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Wskazówka: Jaka siła działa na planetę?

Wskazówka: Jak powiązane są przyspieszenie i siła?

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyspieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 10,3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$.

21 Zadanie – Samochód na moście

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0008050, diff: 2

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 70 m , aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 10% ciężaru samochodu?

Wskazówka: W układzie nieinercyjnym związanym z samochodem następujące siły muszą się równoważyć: siła grawitacji, siła odśrodkowa bezwładności i siła reakcji mostu na samochód.

Wskazówka: Siła reakcji mostu na auto F_r jest to wypadkowa dwóch sił: siły grawitacji F_g i siły odśrodkowej bezwładności F_o

$$F_r = F_g - F_o,$$

$$F_r = mg - \frac{mV^2}{R},$$

gdzie V to prędkość samochodu o masie m .

Odpowiedź: Prędkość wynosi $V = \sqrt{gR(1-k)} \approx 24,8$ m/s, gdzie $k = 10\%$, a R to promień krzywizny mostu.

22 Zadanie – Obrót Ziemi

Magda Gładka, update: 2017-10-01, id: pl-dynamika-0008060, diff: 2

Oblicz:

- z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 79% siły grawitacji działającej na niego.
- ile wynosi ciężar człowieka o masie 56 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

Wskazówka: W układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią na człowieka, stojącego na równiku, działa siła grawitacji, z którą jest on przyciągany i siła odśrodkowa bezwładności. Ciężar człowieka Q jest to wypadkowa tych dwóch sił

$$Q = G \frac{Mm}{R^2} - \frac{mV^2}{R},$$

$$Q = kmg,$$

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masa Ziemi i człowieka, a g to przyspieszenie ziemskie wynikające tylko z oddziaływania grawitacyjnego.

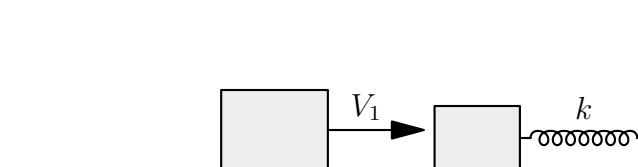
Odpowiedź:

- Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić $V = \sqrt{Rg(1-k)} \approx 3620$ m/s, gdzie R to promień Ziemi, a $k = 0,79$.
- Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 547 N.

23 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0008100, diff: 2

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,5 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 166$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześciący o masie 1 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 4$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepią się.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu

$$p_1 = p_2,$$

$$m_1 V_1 = V_2 (m_1 + m_2),$$

gdzie V_2 to prędkość zlepionych klocków po zderzeniu.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej - energia kinetyczna E_k zmienia się w energię potencjalną sprężystości E_{ps}

$$E_k = E_{ps},$$

$$\frac{(m_1 + m_2)V_2^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}.$$

Odpowiedź: Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1 + m_2)}} = 25,3$ cm, gdzie m_1 to masa uderzającego klocka, a m_2 to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

24 Zadanie – Sprężyna

Magda Gładka, update: 2017-07-08, id: pl-dynamika-0008150, diff: 2

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,5 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 1,2 cm.

a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 1,5 kg.

b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 2,25 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Wskazówka: Jakie siły działają na zawieszony odważnik na sprężynie?

Wskazówka: Ciężarek zawieszony na sprężynie jest w równowadze, więc siła grawitacji F_g równoważy siłę sprężystości sprężyny F_s

$$F_g = F_s$$

$$m_1 g = k_1 x.$$

Wskazówka: Okres drgań wahadła sprężynowego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_1}}.$$

Wskazówka: W momencie, gdy łączymy szeregowo dwie takie same sprężyny, to współczynnik sprężystości nowej sprężyny można obliczyć z

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_2},$$

czyli $k_2 = 2k_1$.

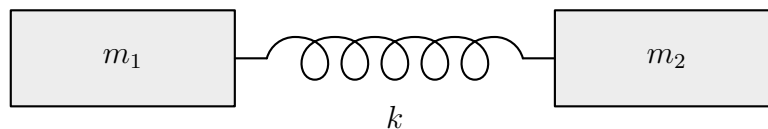
Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0,381$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.

b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0,33$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

25 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-25, id: pl-dynamika-0008200, diff: 1

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k . Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 56 \text{ N/m}$, $m_1 = 1 \text{ kg}$ oraz $m_2 = 4 \text{ kg}$.



Wskazówka: Opiszmy położenie ciężarków za pomocą współrzędnych x_1 oraz x_2 , przyjmijmy zwrot osi X w prawo. Odstęp między nimi to $u \equiv x_2 - x_1$.

Wskazówka: Niech l będzie długością swobodną sprężyny. Siła sprężystości działająca na drugi ciężarek będzie równa: $-k(u - l)$.

Wskazówka: Równania ruchu dla obu ciężarków:

$$m_1 \ddot{x}_1 = +k(u - l)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(u - l)$$

Wskazówka: Po wyznaczeniu przyspieszeń i odjęciu równań stronami otrzymujemy:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (u - l)$$

Ale

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{u}$$

Prowadzi to do równania oscylatora

$$\ddot{u} = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (u - l)$$

Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 0,751 \text{ s}$.

26 Zadanie – Ciężarek na lince

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-13, id: pl-dynamika-0008500, diff: 1

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,82 s zakreśla okrąg o promieniu 134 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 45 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Wskazówka: Jaka siła działa na ciężarek?

Wskazówka: Jaka wielkość jest zachowana w tym przypadku?

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu.

Wskazówka: Jak powiązana jest wartość prędkości z okresem w ruchu jednostajnym po okręgu?

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx 0,0925$ s.

27 Zadanie – Tarcza

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0008600, diff: 2

Na środku tarczy o średnicy 3 m i masie 115 kg, znajduje się człowiek o masie 69 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,6 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu

$$L_2 = L_1,$$

$$2\pi f_2 I_1 + 2\pi f_2 I_2 = 2\pi f_1 I_2,$$

gdzie I_1 to moment bezwładności punktu materialnego, a I_2 to moment bezwładności walca, względem osi obrotu tarczy.

Wskazówka: Moment bezwładności punktu materialnego o masie m w odległości r od osi obrotu to mr^2 , a walca o masie M i promieniu R to $\frac{1}{2}MR^2$.

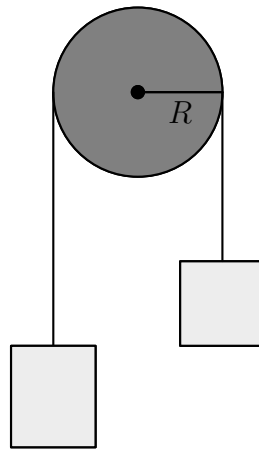
Odpowiedź: Częstotliwość układu wyniesie $f_2 = f_1 \frac{Md^2}{8mr^2 + Md^2} = 0,252$ Hz, gdzie d to średnica tarczy o masie M , f_1 to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a r to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie m od osi obrotu.

28 Zadanie – Maszyna Atwooda

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0008700, diff: 2

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0,6$ m i masie 3 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszono dwa obciążniki o masach 1,11 kg i 0,31 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomini. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:

- załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
- załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



Wskazówka: Jakie siły działają na obciążniki?

Wskazówka: Gdy nić ślizga się po nieruchomym bloczku, przyspieszenie dwóch obciążników połączonych nicią wynosi

$$a_1 = \frac{F_w}{m_c},$$

gdzie $m_c = m_1 + m_2$ to masa całkowita układu, a F_w to siła wypadkowa działająca na układ wzdłuż nici, przy czym $a_1 > 0$, gdy obciążnik m_1 przyspiesza w dół

$$a_1 = \frac{F_{g1} - F_{g2} - F_L + F_L}{m_1 + m_2},$$

gdzie F_{g1} i F_{g2} to odpowiednio wartości siły grawitacji cięższego i lżejszego obciążnika, a F_L to siły naciągu linki, wynikające z trzeciej zasady dynamiki Newtona.

Wskazówka: Gdy uwzględniamy bezwładność bloczka układamy cztery równania

$$\begin{aligned} m_1 a_2 &= m_1 g - F_{L1}, \\ m_2 a_2 &= -m_2 g + F_{L2}, \\ \epsilon &= \frac{M}{I} = \frac{(F_{L1} - F_{L2})R}{\frac{1}{2}m_3 R^2}, \\ \epsilon &= \frac{a_2}{R}, \end{aligned}$$

gdzie M to moment siły, I to moment bezwładności walca, a F_{L1} i F_{L2} to wartości siły naciągu nici.

Albo: Można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Przy założeniu, że w chwili początkowej środki mas nieruchomych obciążników były na tej samej wysokości, zmiana wysokości obciążnika o masie m_1 to $-h$, a obciążnika m_2 to $+h$

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2, \\ E_1 &= 0, \\ E_2 &= \frac{m_1 V^2}{2} - m_1 g h + \frac{m_2 V^2}{2} + m_2 g h + \frac{1}{2} I \omega^2, \end{aligned}$$

otrzymujemy wartość kwadratu prędkości obciążnika

$$V^2 = 2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3},$$

należy skorzystać z tego, że droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym, bez prędkości początkowej jest równa

$$h = \frac{V^2}{2a_2}.$$

Odpowiedź:

- a) Przyspieszenie układu wynosi $a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 5,52 \text{ m/s}^2$, gdzie m_1 i m_2 to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.
- b) Przyspieszenie układu wynosi $a_2 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3} = 2,69 \text{ m/s}^2$, gdzie m_3 to masa walca.

29 Zadanie – Naturalny satelita

Piotr Nieżurawski, update: 2017-04-25, id: pl-dynamika-0009000, diff: 2

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $48 \cdot 10^3 \text{ kg}$ okrążającego w czasie 53,2 h jednorodną planetę o masie $585 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Wskazówka: Z jakim przyspieszeniem porusza się satelita?

Wskazówka: Jak powiązane są przyspieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość satelity, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na satelitę?

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 71,3 \cdot 10^3 \text{ km}$.

30 Zadanie – Zmiana orbity

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0009100, diff: 2

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 560 kg znajduje się w odległości 5200 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8300 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyspieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi $3,69 \text{ m/s}^2$, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

Wskazówka: Praca, jaką trzeba wykonać, jest równa przyrostowi energii mechanicznej satelity

$$E_2 - E_1 = W.$$

Wskazówka: Całkowita energia satelity to suma energii kinetycznej E_k i potencjalnej grawitacji E_p

$$E = E_k + E_p = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{h + R},$$

gdzie h to odległość sztucznego satelity od powierzchni Marsa

$$M = 0,1M_z,$$

gdzie M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: W układzie nieinercyjnym satelity siła odśrodkowa bezwładności F_{ob} równoważy siłę grawitacji F_g

$$F_{ob} = F_g,$$

$$\frac{mV^2}{R + h} = \frac{GMm}{(R + h)^2},$$

więc prędkość satelity na orbicie to

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R + h}}.$$

Wskazówka: Przyspieszenie grawitacyjne na Marsie jest równe

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

więc promień planety Mars to

$$R = \sqrt{\frac{GM}{g}}.$$

Odpowiedź: Praca wyniesie $W = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2} \right) = 352 \text{ MJ}$, gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity, R to promień Marsa, a h_1 i h_2 to odległości satelity od powierzchni planety.

31 Zadanie – Prędkość ucieczki

Magda Gładka, update: 2017-07-02, id: pl-dynamika-0009180, diff: 2

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety Z90, stanowi 39% masy Ziemi, a jej promień wynosi 11200 km. Oblicz:

a) prędkość ucieczki ciała z planety Z90.

b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie Z90 do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 27 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

Wskazówka: Prędkość ucieczki można obliczyć z zasady zachowania energii mechanicznej. Ciało o masie m oddali się dowolnie daleko od planety, gdy ma odpowiednio dużą prędkość, tak by jego prędkość w nieskończoności była równa zero

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mV_\infty^2}{2} - \frac{GMm}{R_\infty},$$

ale

$$\frac{GMm}{R_\infty} \rightarrow 0 \text{ dla } R_\infty \rightarrow \infty,$$

$$\frac{mV_\infty^2}{2} \rightarrow 0 \text{ dla } V_\infty \rightarrow 0,$$

gdzie $M = 0,39M_z$, a M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: Aby znaleźć wysokość w rzucie pionowym w górę, można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Dla $h \ll R$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh,$$

gdzie

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Albo: Skorzystaj z zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$h = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$t = \frac{|\Delta V|}{g} = \frac{V_0}{g},$$

gdzie h to wysokość na jaką wzniesie się cało, V_0 to prędkość początkowa wyrzuconego pionowo ciała, ΔV to zmiana prędkości w czasie t , podczas wznoszenia się ciała.

Odpowiedź:

- a) Prędkość ucieczki wyniesie $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 5,27$ km/s, gdzie G to stała grawitacji, R to promień planety Z90 o masie M .
- b) Stosunek wysokości wyniesie $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 7,9$, gdzie h i h_z to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie Z90 i na Ziemi, a g i g_z to odpowiednio przyspieszenie na planecie Z90 i na Ziemi.

32 Zadanie – Tunel średnicowy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0009250, diff: 2

Oblicz szybkość, z jaką poruszałyby się jednoosobowa kapsuła w odległości 3300 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $7,18 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 6900 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg². Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Wskazówka: Jak powiązane są praca siły działającej na ciało i zmiana energii kinetycznej tego ciała?

Wskazówka: Siła grawitacji wewnątrz tej planety, w odległości r od jej środka jest równa sile grawitacji pochodzącej tylko od masy wewnątrz kuli o promieniu r i środku w środku planety.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1 \rightarrow 2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1 \rightarrow 2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm \frac{r}{R^3} \vec{e}_r$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a \vec{r} wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}' = - \int_R^r F(r') dr' = - \frac{GMm}{R^3} \int_R^r r' dr' = \frac{1}{2} GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 7320 \text{ m/s}$$

33 Zadanie – Kosmiczny walc

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-30, id: pl-dynamika-0009500, diff: 2

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T . Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.

- a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
- b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \rightarrow 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
- c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 47 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 66 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 600$ h. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg².

Wskazówka: Jakim ruchem poruszają się te obiekty?

Wskazówka: Jak powiązane są przyspieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość obiektu, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na obiekty?

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_a M_a = r_b M_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \rightarrow 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 121 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 86,2 \cdot 10^3$ km, $d \approx 207 \cdot 10^3$ km.

34 Zadanie – Dwie gwiazdy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-dynamika-0009600, diff: 1

Gwiazda A ma masę M_A , a gwiazda B masę M_B . Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercyjnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1} . Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2 , jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2} . Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 9 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 15 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 80$ km/s, $v_{B1} = 43$ km/s, $d_1 = 4 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 37$ km/s, $d_2 = 6 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg².

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Układ jest izolowany, więc zachowana jest całkowita energia.

Wskazówka: Zasadę zachowania energii dla dwóch ciał można zapisać następująco

$$E_{kA1} + E_{kB1} + E_{pA1-B1} = E_{kA2} + E_{kB2} + E_{pA2-B2}$$

Oznaczenia energii kinetycznych: E_{kA1} – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili początkowej; E_{kA2} – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili końcowej; analogicznie dla gwiazdy B . Oznaczenia energii potencjalnych: E_{pA1-B1} energia potencjalna układu obu gwiazd w chwili początkowej; analogicznie dla chwili końcowej.

Wskazówka: Zasada zachowania energii z użyciem wielkości wymienionych w treści zadania oraz z poszukiwaną szybkością v_{A2} :

$$\frac{1}{2}M_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B1}^2 - G \frac{M_A M_B}{d_1} = \frac{1}{2}M_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B2}^2 - G \frac{M_A M_B}{d_2}$$

Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

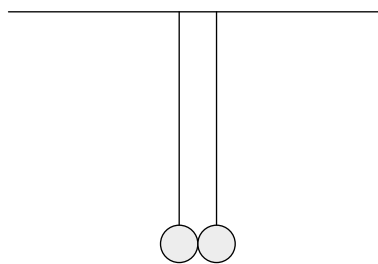
$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)}$$

$$\approx 74,4 \text{ km/s}$$

35 Zadanie – Dwie kulki na linkach

Magda Gładka, update: 2017-04-15, id: pl-dynamika-0009700, diff: 2

Dwie stykające się małe kulki o masach 0,9 kg i 0,3 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 1 m. Lżejsza kulka zostaje odchylna w płaszczyźnie linek o kąt 75° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



Wskazówka: Wysokość h , na jaką lżejsza kulka będzie uniesiona, zależy od kąta odchylenia α i od długości linki l

$$h = l(1 - \cos \alpha).$$

Wskazówka: Jeżeli przyjmiemy, że początkowe położenie kulek odpowiada energii potencjalnej równej zero, to zasada zachowania energii mechanicznej dla lżejszej kulki wygląda następująco

$$E_2 = E_1,$$

$$\frac{mV^2}{2} = mgh,$$

gdzie V to prędkość lżejszej kulki tuż przed zderzeniem.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu, aby obliczyć prędkość zlepionych kulek po zderzeniu V_x

$$p_2 = p_1,$$

$$(m + M)V_x = mV.$$

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej dla zlepionych kulek

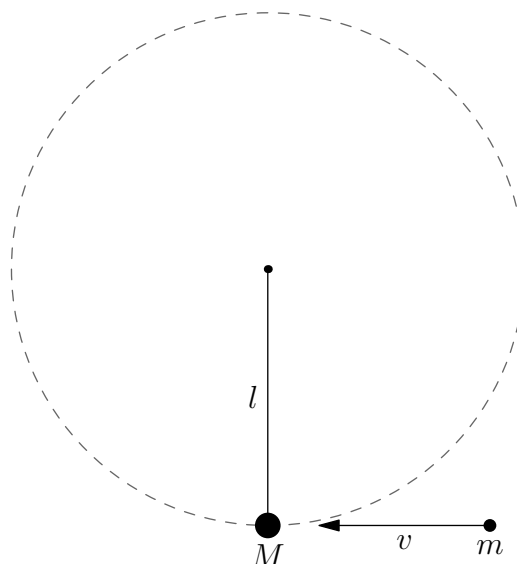
$$(m + M)gH = \frac{(m + M)V_x^2}{2}.$$

Odpowiedź: Wysokość wyniesie $H = \frac{m^2 l (1 - \cos \alpha)}{(m + M)^2} = 4,6$ cm, gdzie m i M są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki, l to długość linki, a α to kąt odchylenia.

36 Zadanie – Postrzelone wahadło

Piotr Niezurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0010000, diff: 2

Metalowy ciężarek o masie $M = 220$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 53$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 43$ g. Pocisk zlepią się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe $9,8$ m/s². Pomiń opory ruchu bryły.



Wskazówka: Jaka będzie prędkość powstałej bryły tuż po zderzeniu i zlepieniu się ciężarka i pocisku?

Wskazówka: Jaka będzie prędkość bryły w najwyższym punkcie okręgu?

Wskazówka: Jaki warunek musi być spełniony w najwyższym punkcie okręgu, by torem bryły był właśnie okrąg?

Wskazówka: Ile jest równa minimalna wartość prędkości spełniająca ten warunek?

Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

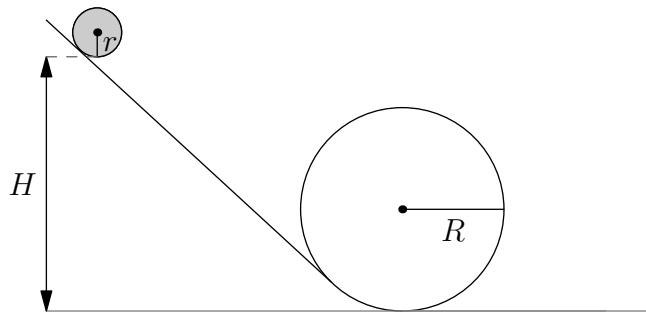
$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 31,2$ m/s.

37 Zadanie – Pętla śmierci

Magda Gładka, update: 2017-07-04, id: pl-dynamika-0010500, diff: 2

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0,08$ m, żeby pokonała ona pętlę śmierci o promieniu $R = 0,7$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej.

Wskazówka: Uwzględnij energię kinetyczną ruchu obrotowego kuli o masie m i promieniu r . Moment bezwładności jednorodnej kuli $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej w układzie związanym z pętlą

$$mg(H + r) = mg(2R - r) + \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

$$\omega = \frac{V}{r},$$

gdzie V i ω to odpowiednio prędkość liniowa kuli i prędkość kątowa kuli w najwyższym punkcie pętli.

Wskazówka: Rozpatrując problem w układzie inercjalnym, w najwyższym punkcie pętli przyspieszenie ziemskie pełni rolę przyspieszenia dośrodkowego

$$\frac{mV^2}{R - r} = mg.$$

Odpowiedź: Minimalna wysokość wynosi $H = 2,7(R - r) = 1,67$ m.

38 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Piotr Nieżurawski, update: 2016-12-15, id: pl-dynamika-0020000, diff: 2

Proton porusza się z prędkością o wartości 7000 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 4,4 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1,602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1,673 \cdot 10^{-27}$ kg.

Wskazówka: Ile wynosi wartość działającej na proton siły?

Wskazówka: Na proton działa siła Lorentza o wartości $F = qvB \approx 493 \cdot 10^{-17}$ N.

Odpowiedź: Proton porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = F/m \approx 295 \cdot 10^{10}$ m/s².

39 Zadanie – Przyssawka

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-28, id: pl-statyka-0001000, diff: 1

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 15 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1019 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s².

Wskazówka: $F = pA$

Wskazówka: $A = \pi(d/2)^2$

Wskazówka: $F \approx 1800$ N.

Wskazówka: $m = F/g$

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 184 kg.

40 Zadanie – Pod wodą

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-21, id: pl-statyka-0002000, diff: 1

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 20 m. Przyjmij gęstość wody 1013 kg/m³ oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Wskazówka: $p = dgh$

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 199 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

41 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-28, id: pl-statyka-0003000, diff: 1

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 6 cm, a duży średnicę 39 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 1300 kg leżącą na dużym tłoku?

Wskazówka: $p = mg/S$, gdzie $S = \pi r^2$

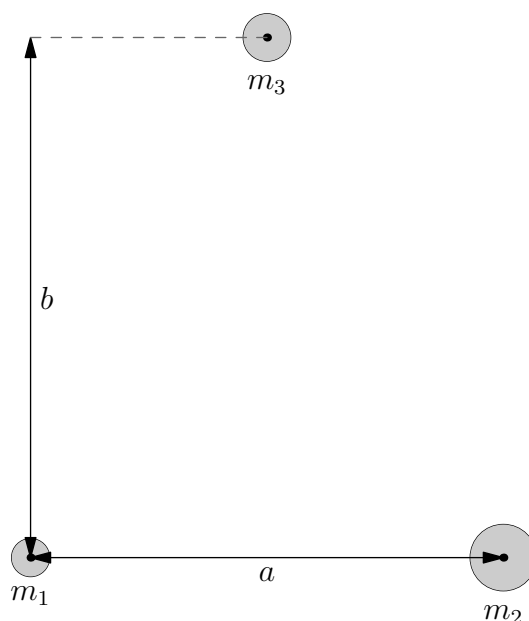
Wskazówka: $p_1 = p_2$

Odpowiedź: Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 30,8 kg.

42 Zadanie – Środek masy

Magda Gładka, update: 2017-05-18, id: pl-statyka-0004000, diff: 2

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0,4$ kg, $m_2 = 1$ kg, $m_3 = 0,8$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 8$ cm, a wysokość to $b = 12$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy m_1 .



Wskazówka: Współrzędne środka masy to

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i},$$

$$y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i},$$

gdzie x_c to współrzędna pozioma, a y_c to współrzędna pionowa środka masy.

Odpowiedź: Środek masy znajduje się w punkcie $S = (x_c, y_c)$, gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 5,09 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 4,36 \text{ cm}.$$