Środek Masy, 26 lutego 2017 r.

Dynamika

F. Dośrodkowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Działamy!

1 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-18, id: pl-dynamika-0000500, diff: 1

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $14 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 3,6 m/s. Druga część o masie $24{,}8 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 9,4 m/s.

Wskazówka: Jakie wielkości są zachowane?

Wskazówka: Którą z zachowanych wielkości można obliczyć na podstawie danych?

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3 v_3 = m_1 v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1 v_1 / v_3 \approx 5{,}36 \cdot 10^3$ kg.

2 Zadanie – Spadochroniarz

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0001000, diff: 1

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 109 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 5,2 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Wskazówka: Jakim ruchem względem Ziemi porusza się spadochroniarz? Jakie siły na niego działają i jaki związek zachodzi między nimi?

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 1070$ N.

3 Zadanie – Zderzenie wagonów

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0002000, diff: 1

Wagon kolejowy o masie 32 ton, jadąc po poziomych torach z prędkością o wartości 2 m/s, uderzył w stojący skład 4 wagonów. Po zderzeniu wszystkie wagony poruszają się razem, ze stałą prędkością. Wszystkie wagony są identyczne. Można pominąć wpływ zewnętrznych sił poziomych. Oblicz:
a) wartość prędkości, z jaką poruszają się wagony tuż po zderzeniu i połączeniu,
b) o ile zmniejszyła się na skutek sczepienia wagonów energia kinetyczna ich ruchu postępowego.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Zasada zachowania pędu (składowa pozioma) prowadzi do równania $mv_0 = (n+1)mv$, a więc po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}4$ m/s.

Odpowiedź:
a) Po sczepieniu skład porusza się z prędkością $v = 0{,}4$ m/s.
b) Energia kinetyczna ruchu postepowego zmniejszyła się o $\Delta E_k = m(v_0^2 - (n+1)v^2)/2 \approx 51{,}2$ kJ.

4 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0004000, diff: 2

Kula o masie 3 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 40 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 8 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Wskazówka: Pod jakim względnym kątem skierowane są dwie siły? Z jakiego twierdzenia dotyczącego trójkąta prostokątnego można skorzystać?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły to ok. 49,6 N. Z której zasady dynamiki należy skorzystać, by obliczyć przyśpieszenie kuli?

Wskazówka: Wartość przyśpieszenia to ok. 16,5 m/s^2. Przyśpieszenie to jest stałe. Jaką prędkość po czasie t osiągnie ciało poruszające się ze stałym przyśpieszeniem a?

Odpowiedź:
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 49,6 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 16{,}5$ m/s^2.
c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 132$ m/s.

5 Zadanie – Kula w cieczy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-29, id: pl-dynamika-0004500, diff: 1

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 1200 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 2100 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Wskazówka: Jakie siły działają na kulę?

Wskazówka: Jaka jest wartość wypadkowej siły?

Wskazówka: $V_2\, d_l\, g = V d_b\, g$

Wskazówka: $V_1 + V_2 = V$

Wskazówka: $V_1/V = 1 - V_2/V$

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}429$.

6 Zadanie – Ołów, lód i woda

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-dynamika-0004750, diff: 2

Kulę o masie 6,3 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,32 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10800 $\mathrm{kg/m}^3$, a gęstość wody 1000 $\mathrm{kg/m}^3$. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Wskazówka: Jak związana jest wysokość lustra wody w pojemniku z objętością wody i ciał w niej zanurzonych?

Wskazówka: Jaką objętość wody wypiera kula lodowa zawierająca kulę ołowianą?

Wskazówka: Jaką objętość wody wyprze ołowiana kula po stopieniu lodu?

Wskazówka: Ile wody powstanie ze stopionego lodu?

Wskazówka: Kula lodowa zawierająca kulę ołowianą wypiera objętość wody równą $(m_p + m_i)/\rho_w$, gdzie m_p jest masą ołowianej kuli, m_i masą lodu, a ρ_w gęstością wody.

Wskazówka: Po stopieniu lodu ołowiana kula opadnie na dno i będzie wypierać objętość wody równą własnej objętości, a więc m_p/ρ_p, gdzie ρ_p to gęstość użytego stopu ołowiu.

Wskazówka: Lód stopi się, a powstała woda będzie mieć objętość m_i/ρ_w, czyli taką samą, jaką wypierał lód.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -17{,}9 \text{ mm}$$

A więc poziom wody w pojemniku się obniży.

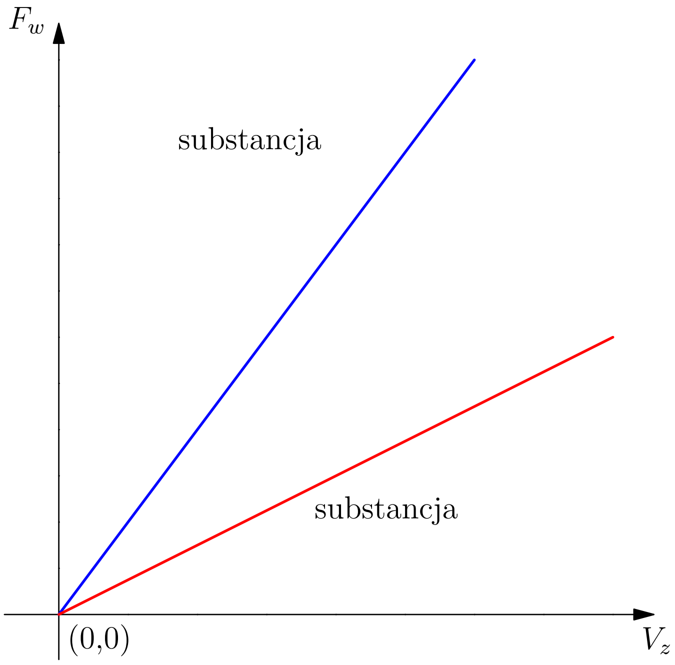
7 Zadanie – Która to ciecz?

Zofia Drabek, update: 2018-07-21, id: pl-dynamika-0004800, diff: 2

Prostopadłościan wykonany z porcelany zawieszono na siłomierzu i zmierzono jego ciężar Q. Następnie zanurzano prostopadłościan w cieczy A, a później w cieczy B. Notowano przy tym wartości wskazywane przez siłomierz oraz objętość zanurzonej części prostopadłościanu. Poniższa tabela przedstawia wyniki pomiarów.

siła ciężkości Q [N]	odczyt z siłomierza [N]	siła wyporu F_w [N]	objętość zanurzonej części V_z [cm^3]
substancja A			
0,100	0,074	0,026	2
0,100	0,064	0,036	3
0,100	0,052	0,048	4
substancja B			
0,100	0,083	0,017	2
0,100	0,074	0,026	3
0,100	0,067	0,033	4

a) Poniżej przedstawiono wykresy zależności siły wyporu F_w od objętości zanurzonej części prostopadłościanu V_z dla dwóch cieczy. Podpisz odpowiednio: „substancja A”, „substancja B”.



b) Która z wymienionych niżej cieczy mogłaby być substancją A, a która substancją B? Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

ciecz	gęstość $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}]$
gliceryna	1260
woda	1000
etanol	785

c) Jakie prawo opisuje badane tutaj zjawisko? Opisz je.

Wskazówka:

a) Która substancja działa większą siłą wyporu dla takiej samej objętości zanurzonej części ciała? Jaki ma to związek z gęstością cieczy?

Wskazówka:

b) Siła wyporu zależy w następujący sposób od gęstości:

$$F_w = \rho_c g V_z,$$

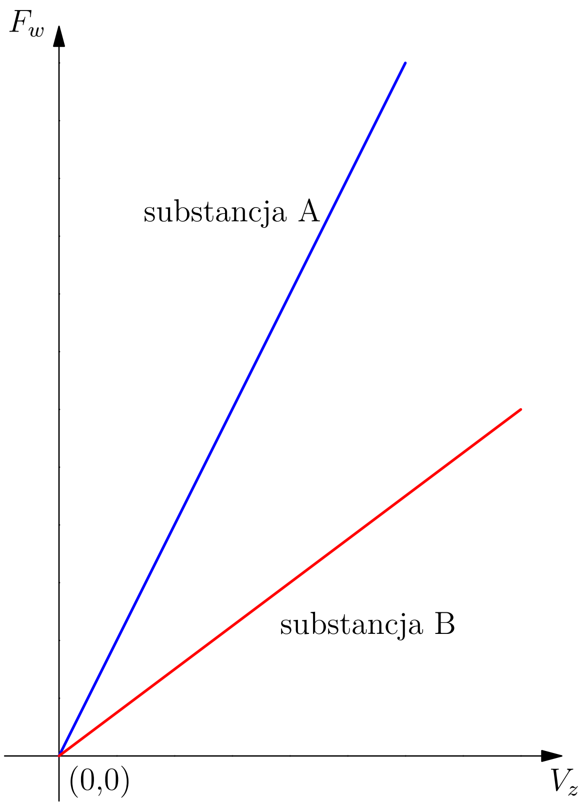
gdzie ρ_c oznacza gęstość cieczy, a g przyspieszenie ziemskie. Zatem gęstość obliczymy z zależności:

$$\rho_c = \frac{F_w}{gV_z}.$$

Pamiętaj że obliczona gęstość może nie być dokładnie taka, jak w tabelce, ze względu na niepewności pomiarowe. Obliczenia najlepiej jest wykonać dla największego podanego V_z, wtedy względna niepewność jest najmniejsza.

Odpowiedź:

a)



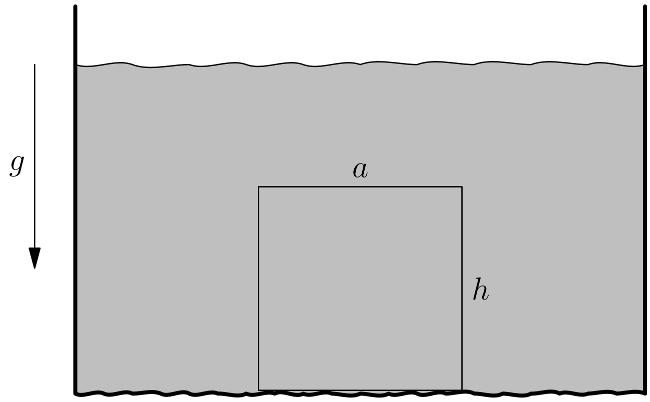
b) Substancją A mogłaby być gliceryna, a substancją B etanol.

c) Badane zjawisko jest opisywane przez prawo Archimedesa. Mówi ono, że na ciało zanurzone w cieczy działa siła skierowana pionowo ku górze równa ciążarowi wypartej cieczy. Opisana jest wspomnianym już wzorem $F_w = \rho_c g V_z$.

8 Zadanie – Wyciąganie bloku z morza

Zofia Drabek, Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-12, id: pl-dynamika-0004850, diff: 3

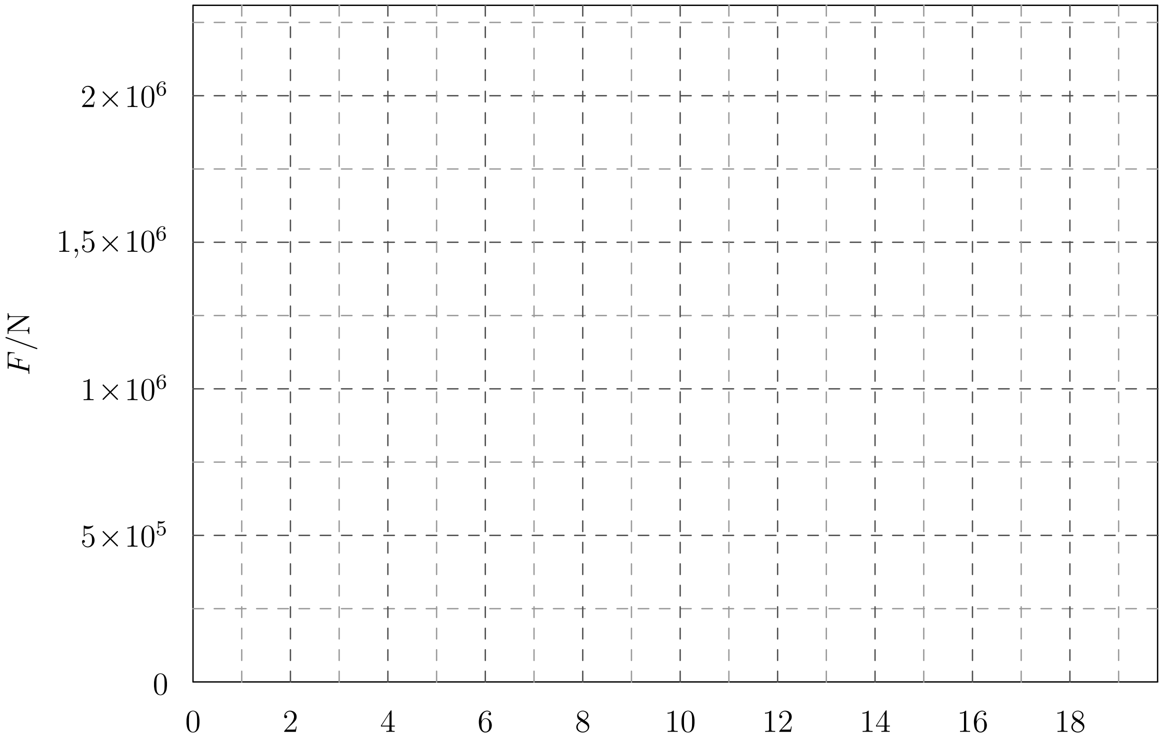
Na poziomym, kamienistym dnie morza spoczywa prostopadłościenny betonowy blok o wymiarach podstawy $a = 3$ m, $b = 4$ m oraz wysokości $h = 8$ m. Głębokość wody w tym miejscu wynosi $H = 18$ m. Postanowiono wyciągnąć blok z wody.



a) Przedstaw na wykresie zależność minimalnej siły F potrzebnej do wyciągnięcia bloku od położenia dolnej podstawy bryły y.

b) Oblicz minimalną pracę, jaką należy wykonać w celu wyciągnięcia bloku z wody. Wynik podaj w kJ z dokładnością do 3 cyfr znaczących.

Przyjmij, że gęstość wody morskiej wynosi $\rho_w = 1030\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, przyspieszenie ziemskie $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ oraz gęstość betonu $\rho_b = 2186\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Wyciąganie było bardzo powolne oraz odbywało się ruchem jednostajnym, pomiń opory ruchu oraz wpływ powietrza. Przyjmij, że woda znajdowała się pod całą powierzchnią dolnej podstawy spoczywającego na kamienistym dnie bloku.



Wskazówka: a) Należy zastanowić się, jak siła wyciągająca zmieniała się podczas wyciągania. W dół cały czas działa siła ciężkości $Q = mg$. Do góry działa siła wyporu. Jej wartość nie jest stała, zależy od objętości zanurzonej części ciała V_z, która się zmienia.

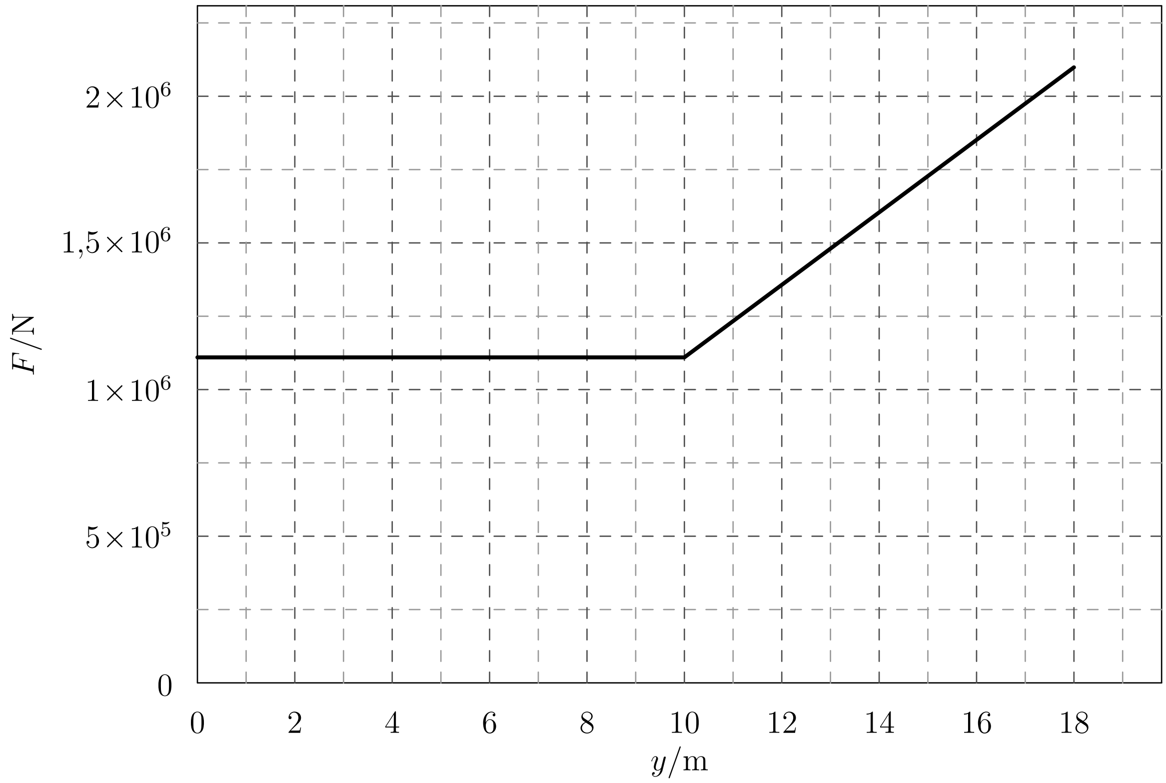
Wskazówka: Wyciąganie bloku można podzielić na 3 etapy:

1) gdy blok jest cały zanurzony (dolna podstawa znajduje się na wysokości od 0 do $H - h$)
2) gdy blok jest częściowo zanurzony w wodzie (dolna podstawa znajduje się na wysokości od $H - h$ do H)
3) gdy blok jest ponad taflą wody (dolna podstawa znajduje się powyżej H)

Wskazówka: Wartość siły wyporu w kolejnych etapach wyraża się wzorami:

1) $F_w = \rho_w \cdot g \cdot V_z = \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot h$ i jest stała,
2) $F_w = \rho_w \cdot g \cdot V_z$, w tym przypadku jednak objętość zanurzonej części ciała V_z nie jest stała, lecz zależy od wysokości y, na której znajduje się w danej chwili dolna podstawa prostopadłościanu, więc $F_w = \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot (H - y)$,
3) $F_w = 0$.

Na podstawie powyższych wyrażeń oraz zależności $F = Q - F_w$, gdzie F jest siłą wyciągającą, należy narysować wykres zgodnie z poleceniem w podpunkcie a).



Wskazówka: b) Pracę W można wyznaczyć jako pole powierzchni pod wykresem $F(y)$ dla $y \in [0; H]$. Można również obliczyć ją, uwzględniając wartość siły w kolejnych etapach:

1) Na blok działa stała siła wyciągająca i działa na odcinku o długości $H - h$

$$W = (mg - \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot h) \cdot (H - h).$$

2) siła wyciągająca nie jest stała, ale wzrasta jednostajnie (zobacz, jak to wygląda na wykresie), dlatego możemy użyć jej wartości średniej.

$$W = \frac{(mg - \rho_w \cdot g \cdot a \cdot b \cdot h) + (mg - 0)}{2} h$$

W celu obliczenia całej pracy należy zsumować wartości otrzymane w 1) i 2). Zauważ, że w 1) obliczyliśmy pole prostokąta, a w 2) pole trapezu.

Odpowiedź: b) Minimalna praca potrzebna do wyciągnięcia bloku wynosi około 23900 kJ.

9 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0005000, diff: 1

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3700 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 2 kg, a każdy student może wykonać pracę 29000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 19 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Wskazówka: O ile zmieni się energia potencjalna cegieł?

Wskazówka: Ilu studentów potrzeba, by zmienić energię potencjalną cegieł o 1377880 J? Zwróć uwagę na fakt, że część studenta nie może wnosić cegieł :-)

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 48.

10 Zadanie – Wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0006000, diff: 1

Kulkę o masie 20 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 8 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania możesz skorzystać?

Wskazówka: Korzystając z równania opisującego zasadę zachowania energii mechanicznej, oblicz wartość prędkości kulki w najniższym punkcie jej toru.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 1,25 m/s.

11 Zadanie – Wyrzutnia piłek do tenisa

Zofia Drabek, update: 2018-07-19, id: pl-dynamika-0006300, diff: 3

Wyrzutnia w postaci prostej lufy, w której porusza się tłok o kształcie walca prostego, wyrzuca piłki o masie 58 g z szybkością 69 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mechanizm wyrzucający działa tak, że przez cały czas, gdy piłka jest w kontakcie z wyrzutnią, poruszający się tłok działa na piłkę stałą siłą i trwa to 0,2 s. Wiadomo, że przed uruchomieniem wyrzutni spoczywająca piłka działa na tłok siłą $R = 0{,}41$ N.

a) Jaką siłą działa poruszający się tłok na piłkę?

b) Oblicz średnią moc, z jaką wyrzutnia wyrzuca piłki.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Pomiń opory ruchu piłki.

Wskazówka: a) Siła F, z jaką tłok dział na piłkę, przeciwdziała sile R oraz powoduje przyrost pędu Δp w czasie Δt. Z czego wynikają poniższe zależności:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} + R = \frac{\Delta v \cdot m}{\Delta t} + R,$$

gdzie Δv jest przyrostem prędkości, a m masą piłki. Piłki początkowo spoczywają, więc przyrost prędkości jest równy prędkości, jaką piłka osiąga po rozpędzeniu przez tłok.

Wskazówka: b) Korzystamy z tego, że wartość siły była stała. Średnią moc P możemy obliczyć z zależności:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Fs}{\Delta t},$$

$$s = \frac{a(\Delta t)^2}{2}.$$

gdzie W oznacza pracę, a a to przyspieszenie równe $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. A więc:

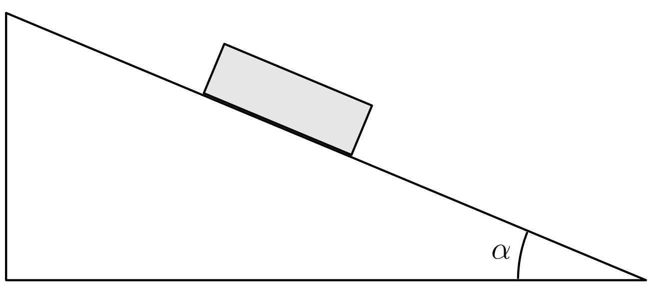
$$P = \frac{F\Delta v}{2}.$$

Odpowiedź: a) Poruszający się tłok działa na piłkę siłą ok. 5,97 N.
b) Piłki wyrzucane są ze średnią mocą ok. 57,2 W.

12 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Piotr Nieżurawski, update: 2018-05-14, id: pl-dynamika-0006450, diff: 1

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 27°$ zsuwa się cegła o masie 5,2 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

Wskazówka: Ile wynosi składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do równi?

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin \alpha \approx 4{,}45$ m/s^2, w dół równi.

13 Zadanie – Równia pochyła

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-29, id: pl-dynamika-0006500, diff: 1

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu 26° zsuwa się cegła o masie 5 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

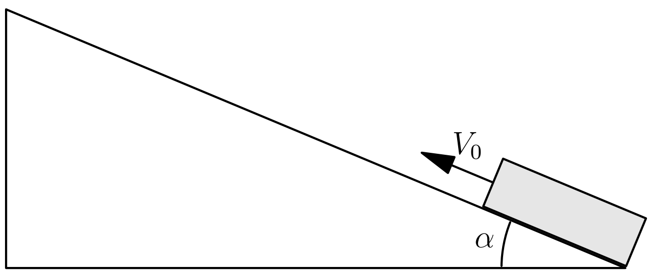
Wskazówka: Ile wynosi składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do równi?

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin \alpha \approx 4{,}3$ m/s^2, w dół równi.

14 Zadanie – Klocek na równi pochyłej

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0006550, diff: 2

U podstawy nieruchomej równi znajdował się klocek o masie równej 543 g, który został wystrzelony z prędkością początkową $V_0 = 5$ m/s wzdłuż równi. Kąt nachylenia równi względem poziomu jest równy $\alpha = 25°$. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o powierzchnię równi wynosi 0,8.
a) Oblicz opóźnienie klocka podczas ruchu wzdłuż równi.
b) Oblicz, po jakim czasie klocek się zatrzyma.
c) Oblicz, jaką drogę pokona klocek podczas tego ruchu.



Wskazówka: Jakie siły działają na klocek podczas jego ruchu?

Wskazówka: Wartość opóźnienia klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F_T + F_s}{m},$$

gdzie F_T to siła tarcia, a F_s to siła zsuwająca, czyli

$$a = \frac{mgf\cos\alpha + mg\sin\alpha}{m}.$$

Wskazówka: Zależność czasu od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym to

$$t = \frac{|\Delta V|}{a}.$$

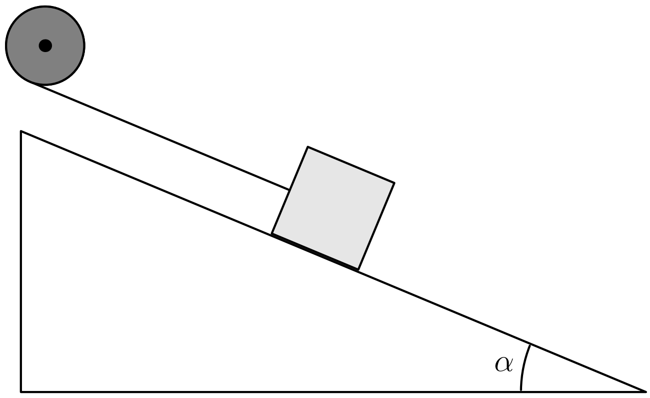
Wskazówka: Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym? **Albo:** Jak zmienia się energia całkowita klocka na skutek pracy siły tarcia?

Odpowiedź:
a) Wartość opóźnienia klocka na równi wynosi $a = g(f\cos\alpha + \sin\alpha) \approx 11{,}2$ m/s^2, gdzie α to kąt nachylenia równi, a f to współczynnik tarcia klocka o powierzchnię równi.
b) Czas, po jakim się klocek zatrzyma, to $t = \frac{V_0}{a} \approx 0{,}45$ s.
c) Droga hamowania to $s = V_0t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}V_0t \approx 1{,}11$ m.

15 Zadanie – Sześcian na równi

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0006600, diff: 2

Na nieruchomej równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 30°$, która stoi na poziomym stole, znajduje się nieruchomy sześcienny klocek, o masie 40 dag i o długości krawędzi 4 cm. Do klocka przyczepiono i poprowadzono nić równoległą do równi. Reszta nici jest nawinięta na jednorodny, walcowy blok o masie 75 dag, który może obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Najniżej położona krawędź sześcianu znajduje się 70 cm nad stołem.
a) Ile wyniesie przyśpieszenie sześcianu podczas zsuwania się?
b) Ile wyniesie czas zsuwania się sześcianu do momentu, gdy najniższa krawędź dotknie blatu stołu?
Współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego między klockiem a równią wynosi 0,47.



Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $\epsilon = \frac{M}{I}$, gdzie M to moment siły, a ϵ to przyśpieszenie kątowe. Moment bezwładności walca o promieniu R wynosi $I = \frac{1}{2}m_wR^2$.

Wskazówka: Przyśpieszenie kątowe walcowego bloku

$$\epsilon = \frac{a}{R},$$

gdzie a to przyśpieszenie liniowe sześcianu.

Wskazówka: Moment siły działający na walcowy blok

$$M = F_L R,$$

gdzie F_L to siła naciągu linki.

Wskazówka: Uwzględniając wszystkie siły działające na sześcian, otrzymujemy

$$a = \frac{m_s g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - F_L}{m_s}.$$

Wskazówka: Droga, jaką pokona sześcian, wynosi

$$s = \frac{h}{\sin\alpha},$$

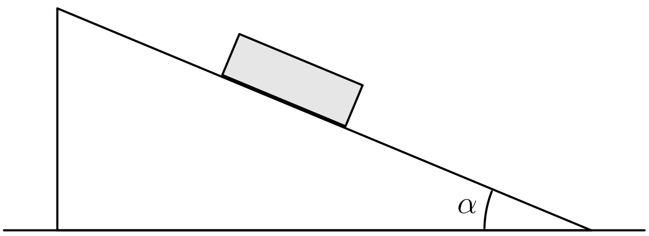
gdzie h to wysokość względem stołu, na jakiej początkowo znajduje się najniżej położona krawędź sześcianu.

Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie sześcianu o masie m_s wyniesie $a = m_s g \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{m_s + \frac{1}{2}m_w} = 0{,}47\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię, a m_w to masa walca.
b) Czas zjeżdżania z równi wyniesie $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 2{,}44$ s, gdzie s to droga jaką pokona sześcian.

16 Zadanie – Jeżdżąca równia

Magda Gładka, update: 2018-06-07, id: pl-dynamika-0006700, diff: 3

Z jakim przyśpieszeniem powinna poruszać się równia pochyła w kierunku poziomym, o kącie nachylenia $\alpha = 25°$, aby leżący na niej prostopadłościenny klocek nie przesuwał się względem równi? Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a równią wynosi 0,4.



Wskazówka: Należy znaleźć minimalne przyśpieszenie równi (a_{min}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zsunie, oraz maksymalne przyśpieszenie równi (a_{max}), czyli takie przy którym ciało jeszcze się nie zacznie wsuwać.

Wskazówka: Jakie siły działają na klocek w nieinercjalnym układzie związanym z równią?

Wskazówka: Żądamy, by wypadkowa sił działających na klocek w układzie związanym z równią była równa zero, wówczas składowe sił wzdłuż równi muszą spełniać równanie

$$F_s - F_T - F_b\cos\alpha = mg\sin\alpha - f(mg\cos\alpha + F_b\sin\alpha) - F_b\cos\alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{min},$$

gdzie F_s to siła zsuwająca, F_T to siła tarcia, F_b to siła bezwładności, a m to masa klocka.

Wskazówka: Gdy szukamy a_{max} w układzie związanym z równią, siła tarcia jest skierowana w dół równi

$$F_s + F_T - F_b \cos\alpha = mg\sin\alpha + f(mg\cos\alpha + F_b \sin\alpha) - F_b\cos\alpha = 0,$$

$$F_b = ma_{max}.$$

Odpowiedź: Wartość przyśpieszenia minimalnego wynosi $a_{min} = g\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 0{,}548$ m/s^2, a wartość przyśpieszenia maksymalnego wynosi $a_{max} = g\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 10{,}4$ m/s^2, gdzie f to współczynnik tarcia klocka o równię.

17 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-15, id: pl-dynamika-0006800, diff: 1

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 69 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 45 N na drodze 3,7 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 12 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Wskazówka: Jak praca wypadkowej siły związana jest ze zmianą szybkości ciała?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły działającej na łyżwiarza to $F - T$, gdzie F to wartość siły rozpędzającej, a T to wartość siły oporu.

Wskazówka: Praca wypadkowej siły na drodze S, czyli $W = (F - T)S$, jest równa zmianie energii kinetycznej łyżwiarza.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F-T)S/m} \approx 1{,}88$ m/s.

18 Zadanie – Pocisk

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0006850, diff: 2

Wystrzelono poziomo pocisk o masie 53 g, który przebił drzewo wzdłuż jego średnicy o długości 37 cm. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w drzewo była równa 795 m/s, a po przejściu przez drzewo zmiejszyła się do 675 m/s.
a) Ile wynosi praca sił oporu?
b) Ile wynosi wartość opóźnienia kuli?
c) Ile wynosi czas przebijania drzewa?
Załóż, że pocisk podczas przebijania drzewa poruszał się tylko poziomo, ze stałym opóźnieniem.

Wskazówka: Zmiana enegii kinetycznej pocisku jest równa pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W.$$

Wskazówka: Praca siły tarcia

$$W = -F_o d,$$

gdzie F_o to wartość siły oporu drzewa.

Wskazówka: Wartość opóźnienia kuli

$$a = \frac{F_o}{m}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z zależności czasu od przyśpieszenia dla ruchu jednostajnie opóźnionego

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t.

Odpowiedź:
a) Praca sił oporu wynosi $W = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \approx -4670$ J, gdzie V_1 i V_2 to odpowiednio prędkość pozioma pocisku o masie m przed wbiciem w drzewo i po przebiciu drzewa.
b) Wartość opóźnienia kuli wynosi $a = \frac{W}{md} \approx 238$ km/s^2, gdzie d to średnica drzewa.
c) Czas wynosi $t = \frac{V_1 - V_2}{a} \approx 0{,}503$ ms.

19 Zadanie – Krążek hokejowy

Magda Gładka, update: 2017-09-20, id: pl-dynamika-0006900, diff: 2

Znajdź szybkość początkową poruszającego się po poziomym lodowisku krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył drogę 3 m, a po zderzeniu przebył drogę 1 m do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód wynosi 0,07. Przyjmij, że podczas zderzenia z bandą nie ma strat energii mechanicznej.

Wskazówka: Skorzystaj z zależności drogi od opóźnienia w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}at^2,$$

$$t = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie ΔV to zmiana prędkości w czasie t.
Albo: Skorzystaj z tego, że zmiana energii kinetycznej krążka o masie m to skutek pracy siły tarcia

$$\Delta E_k = W,$$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mas,$$

gdzie s to całkowita droga przebyta przez krążek, do momentu zatrzymania, a a to wartość opóźnienia krążka, równa wartości bezwzględnej przyśpieszenia.

Wskazówka: Wartość opóźnienia krążka

$$a = gf.$$

Odpowiedź: Szybkość początkowa wynosi $V_0 = \sqrt{2gf(s_1 + s_2)} = 2{,}34$ m/s, gdzie s_1 to droga przebyta przez krążek przed uderzeniem w bandę, s_2 to droga przebyta przez krążek po uderzeniu w bandę, a f to współczynnik tarcia kinetycznego krążka o lód.

20 Zadanie – Droga hamowania

Magda Gładka, update: 2017-07-03, id: pl-dynamika-0006950, diff: 2

Oblicz, jaką drogę pokona samochód od momentu pojawienia się przeszkody. Samochód poruszał się na asfaltowej powierzchni z prędkością początkową 70 km/h. Typowy czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od chwili pojawienia się przeszkody do chwili wciśnięcia pedału hamulca, wynosi 0,8 s. Przyjmij, że wciśnięcie pedału hamulca blokuje koła. Współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię asfaltową wynosi 0,85.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszał się samochód?

Wskazówka: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnym

$$s_1 = V_0 t_1.$$

Wskazówka: Jak zmienia się energia kinetyczna na skutek pracy siły tarcia? **Albo:** Jaka jest zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym i jak powiązane są prędkość początkowa z czasem tego ruchu?

Wskazówka: Zmiana energii kinetycznej na skutek pracy siły tarcia

$$E_2 - E_1 = W,$$

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -mgfs_2,$$

$$s_2 = \frac{V_0^2}{2gf},$$

Albo: Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$s_2 = V_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2},$$

$$a = gf,$$

$$t_2 = \frac{|\Delta V|}{a},$$

gdzie a to wartość opóźnienia samochodu, ΔV to zmiana prędkości w czasie t_2, gdzie t_2 to czas od momentu zadziałania hamulców do momentu zatrzymania samochodu.

Odpowiedź: Droga, jaką pokona samochód, wynosi $s = s_1 + s_2 = V_0 t_1 + \frac{V_0^2}{2gf} = 38{,}3$ m, gdzie V_0 to prędkość początkowa samochodu, t_1 to czas reakcji kierowcy, a f to współczynnik tarcia kinetycznego opon o suchą nawierzchnię.

21 Zadanie – Spacer z sankami

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-27, id: pl-dynamika-0007000, diff: 1

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 20 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 62 N i tworzy on kąt 25° z poziomem.

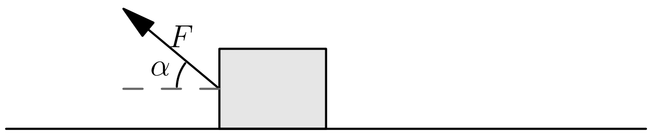
Wskazówka: Jak obliczyć składową poziomą siły?

Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 1120$ J.

22 Zadanie – Ukośna siła

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0007100, diff: 2

Na poziomej podłodze znajduje się początkowo spoczywający klocek o masie 0,8 kg. Przykładamy do niego siłę $F = 7$ N skierowaną pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego i statycznego klocka o podłogę wynosi 0,05.
a) Oblicz przyśpieszenie klocka.
b) Jaką drogę pokona klocek w ciągu pierwszych pięciu sekund ruchu?
c) Jaką drogę pokona klocek w trzeciej sekundzie ruchu?



Wskazówka: Przyśpieszenie klocka o masie m wynosi

$$a = \frac{F\cos\alpha - f(mg - F\sin\alpha)}{m},$$

gdzie f to współczynnik tarcia klocka o podłogę.

Wskazówka: Związek między przyśpieszeniem a drogą w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej

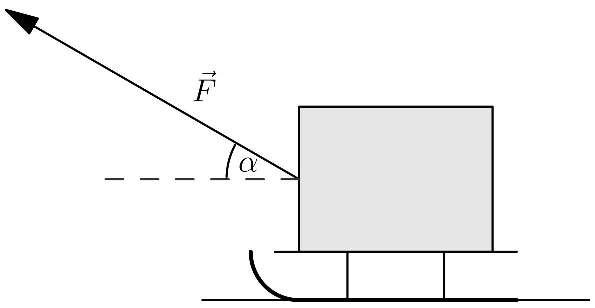
$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie klocka wynosi $a \approx 6{,}01$ m/s^2.
b) Droga, jaką pokona ciało w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu, wynosi $s_{0\to5} = \frac{1}{2}at^2 \approx 75{,}1$ m, gdzie t to czas.
c) Droga, jaką pokona ciało w trzeciej sekundzie ruchu, wynosi $s_3 = s_{0\to3} - s_{0\to2} \approx 15$ m.

23 Zadanie – Sanki

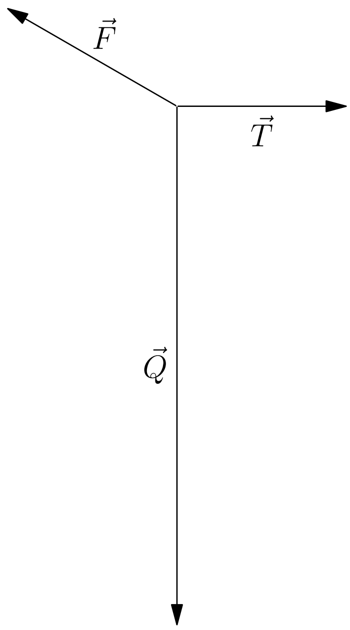
Zofia Drabek, update: 2018-07-19, id: pl-dynamika-0007150, diff: 3

Mama ciągnęła sanki z dzieckiem po śniegu, działając siłą o wartości $F = 99$ N. Sznurek podczas ruchu był cały czas napięty i nachylony do poziomu pod kątem $\alpha = 30°$. Masa sanek i dziecka wynosiła $m = 36$ kg. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ oraz że ruch był jednostajny prostoliniowy i odbywał się w poziomie.



a) Oblicz pracę, jaką wykonała mama, ciągnąc sanki z dzieckiem na drodze $s = 199$ m.

b) Na poniższym rysunku przedstawiono następujące siły działające na sanki z dzieckiem: $\vec{F}$ - siła ciągnąca, $\vec{T}$ - siła tarcia, $\vec{Q}$ - siła ciężkości. Brakuje na nim pionowej składowej siły reakcji podłoża $\vec{R}$. Zaznacz ją na tym rysunku, zachowaj odpowiednie proporcje.



c) Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego μ sanek o śnieg.

Wskazówka: a) Pamiętaj, że aby obliczyć pracę siły ciągnącej, należy uwzględnić jej składową poziomą (wzdłuż przemieszczenia).

Wskazówka: Długość składowej poziomej siły ciągnącej wynosi $F_x = \frac{\sqrt{3}}{2}F$. Wiemy to na podstawie znajomości stosunków boków w trójkącie o kątach 30°, 60°, 90°. Pracę można obliczyć za pomocą zależności:

$$W = \frac{\sqrt{3}}{2}Fs.$$

Wskazówka: b) Skoro sanki poruszają się ruchem jednostajnym, to siła wypadkowa musi być równa 0.

Wskazówka: Składowa pozioma siły ciągnącej $\vec{F_x}$ jest równa co do wartości sile tarcia $\vec{T}$. W pionie wartości sił zależą od siebie w następujący sposób:

$$R + F_y = Q,$$

gdzie F_y jest wartością pionowej składowej siły ciągnącej. Zauważ, że siła nacisku, równa co do wartości sile R, nie jest równa sile ciężkości sanek z dzieckiem Q.
Aby skonstruować $\vec{R}$ należy:

- rozłożyć $\vec{F}$ na składowe (pionową $\vec{F_y}$ i poziomą $\vec{F_x}$),
- odmierzyć cyrklem F_y oraz odłożyć tę długość na $\vec{Q}$ tak, aby móc odmierzyć długość $Q - F_y$, taką właśnie długość ma wektor $\vec{R}$,

- narysować pionowo do góry wektor o otrzymanej poprzednio długości.

Wskazówka: c) Wartość siły tarcia wynosi $T = \mu R$. Siła wypadkowa jest równa 0, więc otrzymujemy układ równań z dwoma niewiadomymi (μ oraz R):

$$\begin{cases} F_x = T \\ R + F_y = Q \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}F = \mu R \\ R + \frac{1}{2}F = Q \end{cases}$$

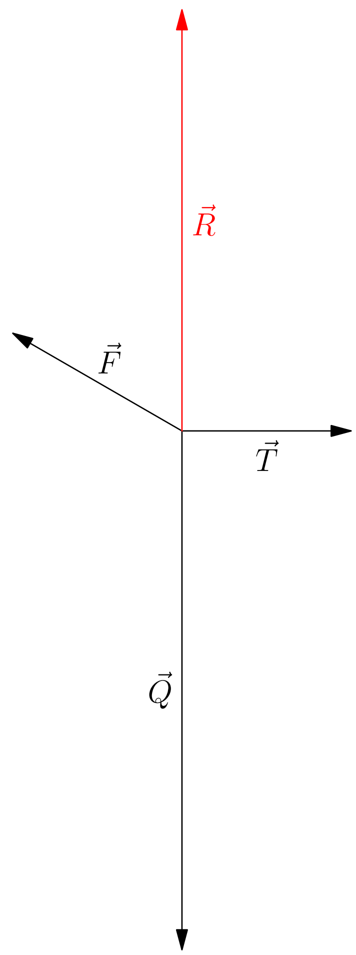
gdzie μ oznacza współczynnik tarcia. Rozwiązując układ równań, otrzymamy zależność na współczynnik tarcia:

$$\mu = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}F}{Q - \frac{1}{2}F}.$$

Odpowiedź:

a) Mama wykonała pracę równą około 17100 J.

b)



c) Współczynnik tarcia sanek o śnieg wynosi około 0,28.

24 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-19, id: pl-dynamika-0008000, diff: 1

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $7{,}28 \cdot 10^{24}$ kg i $4{,}44 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $252 \cdot 10^6$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Wskazówka: Jaka siła działa na planetę?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie i siła?

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 4{,}66 \cdot 10^{-3}$ $\mathrm{m/s^2}$.

25 Zadanie – Samochód na moście

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0008050, diff: 2

Z jaką prędkością ma jechać samochód po wypukłym moście, o promieniu krzywizny 75 m, aby w najwyższym punkcie mostu siła, jaką most działa na samochód, wynosiła 70% ciężaru samochodu?

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym związanym z samochodem następujące siły muszą się równoważyć: siła grawitacji, siła odśrodkowa bezwładności i siła reakcji mostu na samochód.

Wskazówka: Siła reakcji mostu na auto F_r jest to wypadkowa dwóch sił: siły grawitacji F_g i siły odśrodkowej bezwładności F_o

$$F_r = F_g - F_o,$$

$$F_r = mg - \frac{mV^2}{R},$$

gdzie V to prędkość samochodu o masie m.

Odpowiedź: Prędkość wynosi $V = \sqrt{gR(1-k)} \approx 14{,}8$ m/s, gdzie $k = 70\%$, a R to promień krzywizny mostu.

26 Zadanie – Obrót Ziemi

Magda Gładka, update: 2017-10-01, id: pl-dynamika-0008060, diff: 2

Oblicz:
a) z jaką prędkością liniową na równiku powinna obracać się Ziemia wokół własnej osi, aby ciężar człowieka stojącego na równiku stanowił 78% siły grawitacji działającej na niego.
b) ile wynosi ciężar człowieka o masie 52 kg na równiku, jeżeli liniowa prędkość Ziemi, wynikająca z jej ruchu obrotowego, w tym miejscu wynosi 1667 km/h.

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym związanym z Ziemią na człowieka, stojącego na równiku, działa siła grawitacji, z którą jest on przyciągany i siła odśrodkowa bezwładności. Ciężar człowieka Q jest to wypadkowa tych dwóch sił

$$Q = G\frac{Mm}{R^2} - \frac{mV^2}{R},$$

$$Q = kmg,$$

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

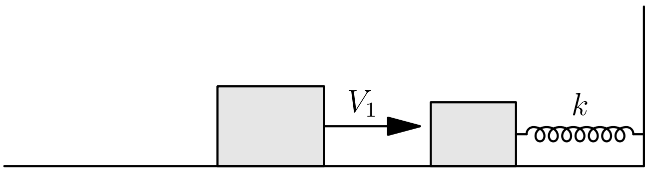
gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masa Ziemi i człowieka, a g to przyśpieszenie ziemskie wynikające tylko z oddziaływania grawitacyjnego.

Odpowiedź:
a) Prędkość liniowa Ziemi na równiku powinna wynosić $V = \sqrt{Rg(1-k)} \approx 3710$ m/s, gdzie R to promień Ziemi, a $k = 0{,}78$.
b) Ciężar człowieka na równiku wynosi ok. 508 N.

27 Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0008100, diff: 2

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,7 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości $k = 151$ N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześcian o masie 1,2 kg, poruszający się z prędkością $V_1 = 2$ m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu

$$p_1 = p_2,$$

$$m_1V_1 = V_2(m_1 + m_2),$$

gdzie V_2 to prędkość zlepionych klocków po zderzeniu.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej - energia kinetyczna E_k zmienia się w energię potencjalną sprężystości E_{ps}

$$E_k = E_{ps},$$

$$\frac{(m_1 + m_2)V_2^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}.$$

Odpowiedź: Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi $x_{max} = m_1V_1\sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}} = 14{,}2$ cm, gdzie m_1 to masa uderzającego klocka, a m_2 to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

28 Zadanie – Sprężyna

Magda Gładka, update: 2017-07-08, id: pl-dynamika-0008150, diff: 2

Do wiszącej pionowo w polu grawitacyjnym sprężyny, podwieszono odważnik o masie 0,5 kg i zauważono, że wydłużyła się ona o 1,3 cm.
a) Oblicz okres pionowych drgań wahadła sprężynowego, zbudowanego z opisanej sprężyny i podwieszonej kulki o masie 1,5 kg.
b) Sprężynę przecięto tak, że powstały dwie identyczne sprężyny i do jednej z nich podwieszono klocek o masie 2,25 kg. Oblicz okres drgań takiego wahadła sprężynowego.

Wskazówka: Jakie siły działają na zawieszony odważnik na sprężynie?

Wskazówka: Ciężarek zawieszony na sprężynie jest w równowadze, więc siła grawitacji F_g równoważy siłę sprężystości sprężyny F_s

$$F_g = F_s$$

$$m_1 g = k_1 x.$$

Wskazówka: Okres drgań wahadła sprężynowego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_1}}.$$

Wskazówka: W momencie, gdy łączymy szeregowo dwie takie same sprężyny, to współczynnik sprężystości nowej sprężyny można obliczyć z

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_2},$$

czyli $k_2 = 2k_1$.

Odpowiedź: a) Gdy podwieszono odważnik o masie m_1 to okres drgań wahadła wynosił $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 x}{m_1 g}} = 0{,}396$ s, gdzie m_2 to masa kulki, a x to wydłużenie sprężyny.
b) Okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3 x}{2m_1 g}} = 0{,}343$ s, gdzie m_3 to masa klocka.

29 Zadanie – Drążek pogo

Klaudia Dec, update: 2018-03-04, id: pl-dynamika-0008170, diff: 2

Janek uwielbia skakać na drążku pogo, którego wysokość bez obciążenia wynosi 95 cm. Gdy Janek stoi na drążku, wysokość drążka zmniejsza się o 8 cm i o tyle samo ściskana jest sprężyna. Na jaką wysokość ponad ziemię jest się w stanie wzbić Janek, wykorzystując jedynie energię zgromadzoną w ściśniętej sprężynie, gdy minimalna wysokość drążka podczas odbicia będzie wynosić 75 cm? Janek waży 58 kg, a masę drążka pogo można pominąć.

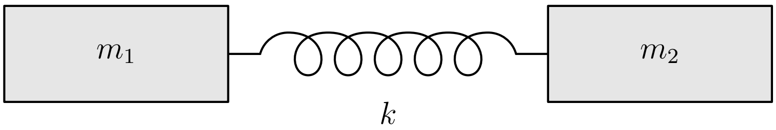
Wskazówka:
a) Jakie siły działają na Janka w momencie stanięcia na drążku?
b) Jak zmienia się energia w tym układzie?

Odpowiedź: Janek może wzbić się maksymalnie na wysokość równą: $h = \frac{(l-y_{max})^2}{2x} + y_{max} \approx$ 100 cm, gdzie l to długość swobodna drążka, x to długość, o którą skróci się sprężyna, gdy stoi na niej Janek, y_{max} to długość drążka w momencie maksymalnego ściśnięcia sprężyny.

30 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Piotr Nieżurawski, update: 2018-05-14, id: pl-dynamika-0008200, diff: 1

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 32$ N/m, $m_1 = 3$ kg oraz $m_2 = 7$ kg.



Wskazówka: Opiszmy położenie ciężarków za pomocą współrzędnych x_1 oraz x_2, przyjmijmy zwrot osi X w prawo. Odstęp między nimi to $u \equiv x_2 - x_1$.

Wskazówka: Niech l będzie długością swobodną sprężyny. Siła sprężystości działająca na drugi ciężarek będzie równa: $-k(u - l)$.

Wskazówka: Równiania ruchu dla obu ciężarków:

$$m_1\ddot{x}_1 = +k(u - l)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(u - l)$$

Wskazówka: Po wyznaczeniu przyśpieszeń i odjęciu równań stronami otrzymujemy:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Ale

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{u}$$

Prowadzi to do równania oscylatora

$$\ddot{u} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 1{,}61$ s.

31 Zadanie – Ciężarek na lince

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-13, id: pl-dynamika-0008500, diff: 1

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,96 s zakreśla okrąg o promieniu 134 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 55 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Wskazówka: Jaka siła działa na ciężarek?

Wskazówka: Jaka wielkość jest zachowana w tym przypadku?

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu.

Wskazówka: Jak powiązana jest wartość prędkości z okresem w ruchu jednostajnym po okręgu?

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx$ 0,162 s.

32 Zadanie – Tarcza

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0008600, diff: 2

Na środku tarczy o średnicy 2 m i masie 117 kg, znajduje się człowiek o masie 63 kg. Układ ten obraca się z częstotliwością 18 obr./min. wokół osi symetrii obrotowej tarczy. Oblicz częstotliwość układu, gdy człowiek w wyniku przejścia wzdłuż promienia tarczy znajdzie się w odległości 0,4 m od jej środka. Wynik podaj w hercach. Tarcza jest jednorodnym walcem. Potraktuj człowieka jako punkt materialny.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu

$$L_2 = L_1,$$

$$2\pi f_2 I_1 + 2\pi f_2 I_2 = 2\pi f_1 I_2,$$

gdzie I_1 to moment bezwładności punktu materialnego, a I_2 to moment bezwładności walca, względem osi obrotu tarczy.

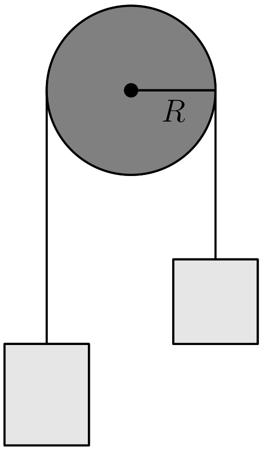
Wskazówka: Moment bezwładności punktu materialnego o masie m w odległości r od osi obrotu to mr^2, a walca o masie M i promieniu R to $\frac{1}{2}MR^2$.

Odpowiedź: Częstotliwość układu wyniesie $f_2 = f_1 \frac{Md^2}{8mr^2+Md^2} = 0{,}256$ Hz, gdzie d to średnica tarczy o masie M, f_1 to początkowa częstotliwość układu od osi obrotu, a r to odległość, na jaką oddali się człowiek o masie m od osi obrotu.

33 Zadanie – Maszyna Atwooda

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0008700, diff: 2

Maszyna Atwooda zbudowana jest z jednorodnego bloczka w kształcie walca, o promieniu $R = 0{,}6$ m i masie 2 kg, przyczepionego do ściany za pomocą poziomej osi. Na bloczku na nierozciągliwej nici zawieszone są dwa obciążniki o masach 1,26 kg i 0,46 kg. Masę nitki i opór na osi bloku pomiń. Oblicz wartość przyśpieszenia obciążników w dwóch przypadkach:
a) załóż, że bloczek się nie obraca, a nić ślizga się po bloczku bez tarcia.
b) załóż, że bloczek się obraca i nie ma poślizgu nici na bloczku.



Wskazówka: Jakie siły działają na obciążniki?

Wskazówka: Gdy nić ślizga się po nieruchomym bloczku, przyśpieszenie dwóch obciążników połączonych nicią wynosi

$$a_1 = \frac{F_w}{m_c},$$

gdzie $m_c = m_1 + m_2$ to masa całkowita układu, a F_w to siła wypadkowa działająca na układ wzdłuż nici, przy czym $a_1 > 0$, gdy obciążnik m_1 przyśpiesza w dół

$$a_1 = \frac{F_{g1} - F_{g2} - F_L + F_L}{m_1 + m_2},$$

gdzie F_{g1} i F_{g2} to odpowiednio wartości siły grawitacji cięższego i lżejszego obciążnika, a F_L to siły naciągu linki, wynikające z trzeciej zasady dynamiki Netwona.

Wskazówka: Gdy uwzględniamy bezwładność bloczka układamy cztery równania

$$m_1 a_2 = m_1 g - F_{L1},$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + F_{L2},$$

$$\epsilon = \frac{M}{I} = \frac{(F_{L1} - F_{L2})R}{\frac{1}{2} m_3 R^2},$$

$$\epsilon = \frac{a_2}{R},$$

gdzie M to moment siły, I to moment bezwładności walca, a F_{L1} i F_{L2} to wartości siły naciągu nici.
Albo: Można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Przy założeniu, że w chwili początkowej środki mas nieruchomych obciążników były na tej samej wysokości, zmiana wysokości obciążnika o masie m_1 to $-h$, a obciążnika m_2 to $+h$

$$E_1 = E_2,$$

$$E_1 = 0,$$
$$E_2 = \frac{m_1 V^2}{2} - m_1 gh + \frac{m_2 V^2}{2} + m_2 gh + \frac{1}{2} I\omega^2,$$

otrzymujemy wartość kwadratu prędkości obciążnika

$$V^2 = 2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3},$$

należy skorzystać z tego, że droga w ruchu jednostajnie przyśpieszonym, bez prędkości początkowej jest równa

$$h = \frac{V^2}{2a_2}.$$

Odpowiedź:
a) Przyśpieszenie układu wynosi $a_1 = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 4{,}56\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie m_1 i m_2 to odpowiednio masy cięższego i lżejszego obciążnika.
b) Przyśpieszenie układu wynosi $a_2 = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3} = 2{,}88\ \mathrm{m/s^2}$, gdzie m_3 to masa walca.

34 Zadanie – Naturalny satelita

Piotr Nieżurawski, update: 2017-04-25, id: pl-dynamika-0009000, diff: 2

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $85 \cdot 10^3$ kg okrążającego w czasie 27,6 h jednorodną planetę o masie $493 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Wskazówka: Z jakim przyśpieszeniem porusza się satelita?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość satelity, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na satelitę?

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 43{,}5 \cdot 10^3$ km.

35 Zadanie – Zmiana orbity

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-dynamika-0009100, diff: 2

Sztuczny satelita Marsa *MPT19* o masie 410 kg znajduje się w odległości 5400 km od powierzchni Marsa. Postanowiono, że zostanie on przeniesiony na dalszą orbitę, która znajduje się w odległości 8800 km od powierzchni tej planety. Jaką trzeba wykonać pracę podczas przenoszenia, jeżeli przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi $3{,}69\ \mathrm{m/s^2}$, a masa tej planety stanowi 10% masy Ziemi?

Wskazówka: Praca, jaką trzeba wykonać, jest równa przyrostowi energii mechanicznej satelity

$$E_2 - E_1 = W.$$

Wskazówka: Całkowita energia satelity to suma energii kinetycznej E_k i potencjalnej grawitacji E_p

$$E = E_k + E_p = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{h+R},$$

gdzie h to odległość sztucznego satelity od powierzchni Marsa

$$M = 0{,}1M_z,$$

gdzie M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: W układzie nieinercjalnym satelity siła odśrodkowa bezwładności F_{ob} równoważy siłę grawitacji F_g

$$F_{ob} = F_g,$$

$$\frac{mV^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2},$$

więc prędkość satelity na orbicie to

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}.$$

Wskazówka: Przyśpieszenie grawitacyjne na Marsie jest równe

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

więc promień planety Mars to

$$R = \sqrt{\frac{GM}{g}}.$$

Odpowiedź: Praca wyniesie $W = \frac{GMm}{2}(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2}) = 265$ MJ, gdzie G to stała grawitacji, M i m to odpowiednio masy Marsa i sztucznego satelity, R to promień Marsa, a h_1 i h_2 to odległości satelity od powierzchni planety.

36 Zadanie – Prędkość ucieczki

Magda Gładka, update: 2017-07-02, id: pl-dynamika-0009180, diff: 2

Masa jednorodnej, sferycznie symetrycznej planety $Z90$, stanowi 38% masy Ziemi, a jej promień wynosi 12200 km. Oblicz:
a) prędkość ucieczki ciała z planety $Z90$.
b) ile wynosi stosunek wysokości uzyskanej przez ciało na planecie $Z90$ do wysokości uzyskanej na Ziemi podczas rzutu pionowego w górę, jeżeli nadajemy mu prędkość początkową równą 13 m/s. Załóż, że dla wysokości dużo mniejszych od promienia planety pole grawitacyjne jest jednorodne.

Wskazówka: Prędkość ucieczki można obliczyć z zasady zachowania energii mechanicznej. Ciało o masie m oddali się dowolnie daleko od planety, gdy ma odpowiednio dużą prędkość, tak by jego prędkość w nieskończoności była równa zero

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mV_\infty^2}{2} - \frac{GMm}{R_\infty},$$

ale

$$\frac{GMm}{R_\infty} \to 0 \text{ dla } R_\infty \to \infty,$$

$$\frac{mV_\infty^2}{2} \to 0 \text{ dla } V_\infty \to 0,$$

gdzie $M = 0{,}38M_z$, a M_z to masa Ziemi.

Wskazówka: Aby znaleźć wysokość w rzucie pionowym w górę, można skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Dla $h \ll R$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh,$$

gdzie

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Albo: Skorzystaj z zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$h = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$t = \frac{|\Delta V|}{g} = \frac{V_0}{g},$$

gdzie h to wysokość na jaką wzniesie się cało, V_0 to prędkość początkowa wyrzuconego pionowo ciała, ΔV to zmiana prędkości w czasie t, podczas wznoszenia się ciała.

Odpowiedź:
a) Prędkość ucieczki wyniesie $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 4{,}98$ km/s, gdzie G to stała grawitacji, R to promień planety $Z90$ o masie M.
b) Stosunek wysokości wyniesie $\frac{h}{h_z} = \frac{g_z}{g} \approx 9{,}62$, gdzie h i h_z to odpowiednio wysokości uzyskane przez ciało na planecie $Z90$ i na Ziemi, a g i g_z to odpowiednio przyśpieszenie na planecie $Z90$ i na Ziemi.

37 Zadanie – Tunel średnicowy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0009250, diff: 2

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 4300 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $7{,}14 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 6900 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Wskazówka: Jak powiązane są praca siły działającej na ciało i zmiana energii kinetycznej tego ciała?

Wskazówka: Siła grawitacji wewnątrz tej planety, w odległości r od jej środka jest równa sile grawitacji pochodzącej tylko od masy wewnątrz kuli o promieniu r i środku w środku planety.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to 2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to 2} = \int_R^r \vec{F}(r')\cdot d\vec{r}\,' = -\int_R^r F(r')\,dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\,dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

. Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 6500 \text{ m/s}$$

38 Zadanie – Kosmiczny walc

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-30, id: pl-dynamika-0009500, diff: 2

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 33\cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 80\cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 670$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszają się te obiekty?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość obiektu, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na obiekty?

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_aM_a = r_bM_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_aM_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 158 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 65{,}2 \cdot 10^3$ km, $d \approx 223 \cdot 10^3$ km.

39 Zadanie – Dwie gwiazdy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-dynamika-0009600, diff: 1

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 6 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 13 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 56$ km/s, $v_{B1} = 39$ km/s, $d_1 = 6 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 31$ km/s, $d_2 = 15 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Układ jest izolowany, więc zachowana jest całkowita energia.

Wskazówka: Zasadę zachowania energii dla dwóch ciał można zapisać następująco

$$E_{k\,A1} + E_{k\,B1} + E_{p\,A1-B1} = E_{k\,A2} + E_{k\,B2} + E_{p\,A2-B2}$$

Oznaczenia energii kinetycznych: $E_{k\,A1}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili początkowej; $E_{k\,A2}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili końcowej; analogicznie dla gwiazdy B. Oznaczenia energii potencjalnych: $E_{p\,A1-B1}$ energia potencjalna układu obu gwiazd w chwili początkowej; analogicznie dla chwili końcowej.

Wskazówka: Zasada zachowania energii z użyciem wielkości wymienionych w treści zadania oraz z poszukiwaną szybkością v_{A2}:

$$\frac{1}{2}M_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B1}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_1} = \frac{1}{2}M_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B2}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_2}$$

Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

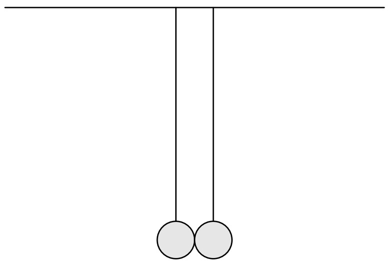
$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$

$$\approx 51{,}1 \text{ km/s}$$

40 Zadanie – Dwie kulki na linkach

Magda Gładka, update: 2017-04-15, id: pl-dynamika-0009700, diff: 2

Dwie stykające się małe kulki o masach 0,6 kg i 0,5 kg wiszą na dwóch identycznych, równoległych linkach, każda o długości 0,9 m. Lżejsza kulka zostaje odchylona w płaszczyźnie linek o kąt 85° od pionu i zostaje puszczona. Kulki podczas zderzenia zlepiają się. Na jaką wysokość wzniosą się kule?



Wskazówka: Wysokość h, na jaką lżejsza kulka będzie uniesiona, zależy od kąta odchylenia α i od długości linki l

$$h = l(1 - \cos\alpha).$$

Wskazówka: Jeżeli przyjmiemy, że początkowe położenie kulek odpowiada energii potencjalnej równej zero, to zasada zachowania energii mechanicznej dla lżejszej kulki wygląda następująco

$$E_2 = E_1,$$

$$\frac{mV^2}{2} = mgh,$$

gdzie V to prędkość lżejszej kulki tuż przed zderzeniem.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania pędu, aby obliczyć prędkość zlepionych kulek po zderzeniu V_x

$$p_2 = p_1,$$

$$(m + M)V_x = mV.$$

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej dla zlepionych kulek

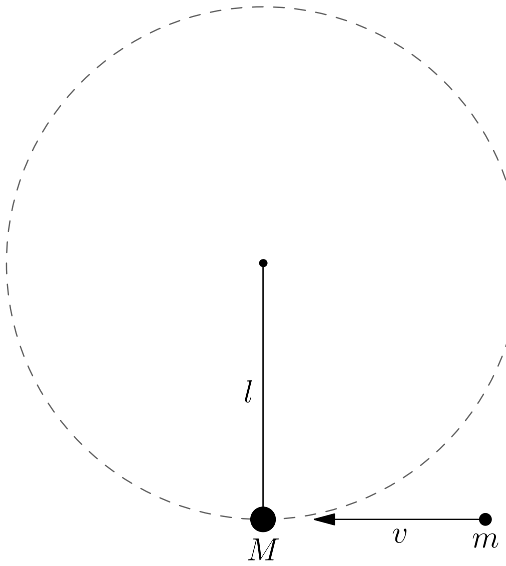
$$(m + M)gH = \frac{(m + M)V_x^2}{2}.$$

Odpowiedź: Wysokość wyniesie $H = \frac{m^2 l(1-\cos\alpha)}{(m+M)^2} = 17$ cm, gdzie m i M są masami odpowiednio lżejszej i cięższej kulki, l to długość linki, a α to kąt odchylenia.

41 Zadanie – Postrzelone wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0010000, diff: 2

Metalowy ciężarek o masie $M = 319$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 46$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 33$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Pomiń opory ruchu bryły.



Wskazówka: Jaka będzie prędkość powstałej bryły tuż po zderzeniu i zlepienu się ciężarka i pocisku?

Wskazówka: Jaka będzie prędkość bryły w najwyższym punkcie okręgu?

Wskazówka: Jaki warunek musi być spełniony w najwyższym punkcie okręgu, by torem bryły był właśnie okrąg?

Wskazówka: Ile jest równa minimalna wartość prędkości spełniająca ten warunek?

Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

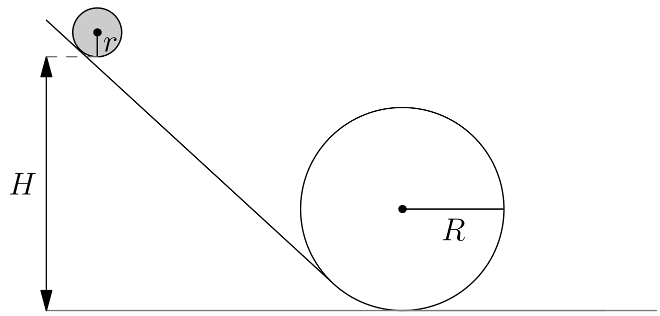
$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 50{,}6$ m/s.

42 Zadanie – Pętla śmierci

Magda Gładka, update: 2017-07-04, id: pl-dynamika-0010500, diff: 2

Z jakiej minimalnej wysokości należy puścić jednorodną kulę o promieniu $r = 0{,}03$ m, żeby pokonała ona *pętlę śmierci* o promieniu $R = 1{,}5$ m? Kula toczy się bez poślizgu. Pomiń opory powietrza oraz tarcie toczne.



Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej.

Wskazówka: Uwzględnij energię kinetyczną ruchu obrotowego kuli o masie m i promieniu r. Moment bezwładności jednorodnej kuli $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Wskazówka: Zasada zachowania energii mechanicznej w układzie związanym z pętlą

$$mg(H + r) = mg(2R - r) + \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

$$\omega = \frac{V}{r},$$

gdzie V i ω to odpowiednio prędkość liniowa kuli i prędkość kątowa kuli w najwyższym punkcie pętli.

Wskazówka: Rozpatrując problem w układzie inercjalnym, w najwyższym punkcie pętli przyśpieszenie ziemskie pełni rolę przyśpieszenia dośrodkowego

$$\frac{mV^2}{R - r} = mg.$$

Odpowiedź: Minimalna wysokość wynosi $H = 2{,}7(R - r) = 3{,}97$ m.

43 Zadanie – Proton w polu magnetycznym

Piotr Nieżurawski, update: 2016-12-15, id: pl-dynamika-0020000, diff: 2

Proton porusza się z prędkością o wartości 3000 m/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości 3,1 T. Wektor prędkości jest prostopadły do pola magnetycznego. Oblicz przyśpieszenie, z jakim porusza się proton. Ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, a jego masa jest równa $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg.

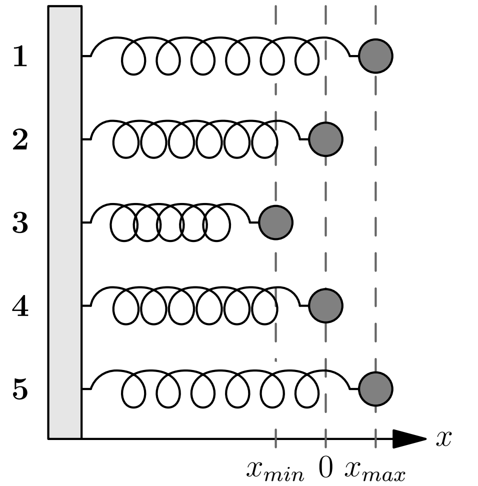
Wskazówka: Ile wynosi wartość działającej na proton siły?

Wskazówka: Na proton działa siła Lorentza o wartości $F = qvB \approx 149 \cdot 10^{-17}$ N.

Odpowiedź: Proton porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = F/m \approx 89{,}1 \cdot 10^{10}$ m/s^2.

44 Zadanie – Oscylator harmoniczny

Klaudia Dec, update: 2018-04-03, id: pl-dynamika-drgania-0002000, diff: 1

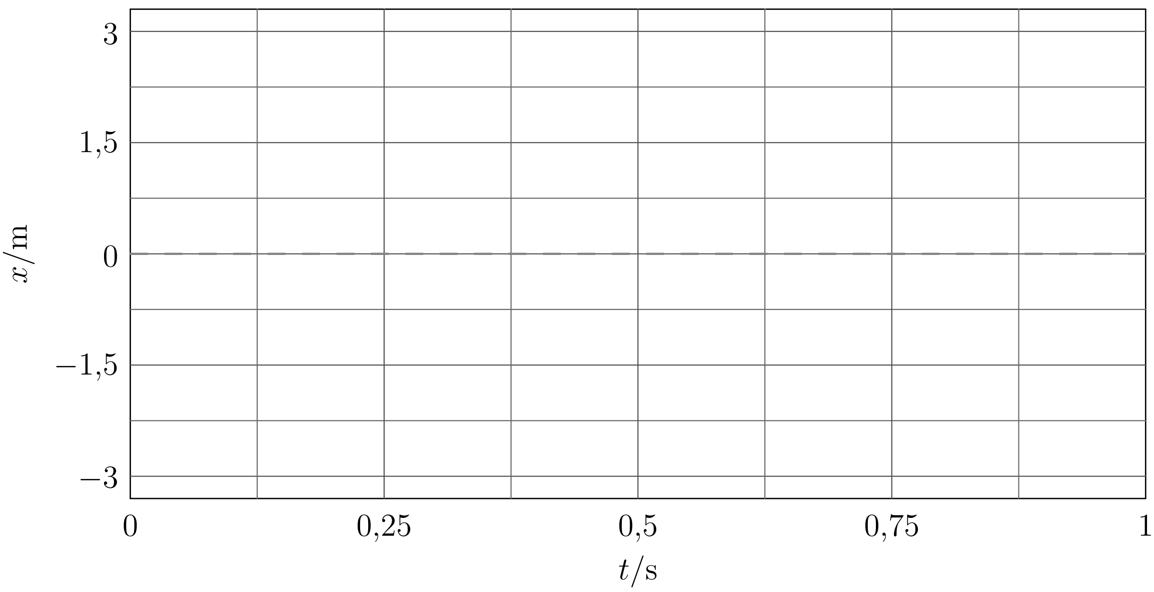


Przyjrzyjmy się prostemu układowi drgającemu, którego równanie ruchu ma postać:

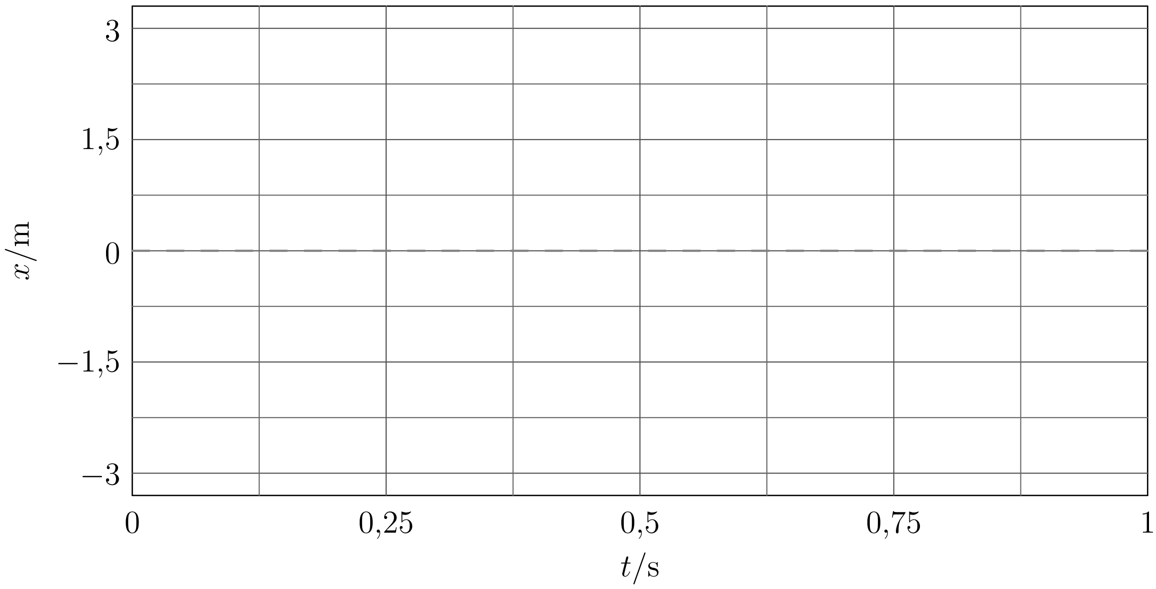
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

gdzie x_m, ω i ϕ są stałymi. Na rysunku można dostrzec ekstremalne momenty ruchu kulki: 1 i 5 odpowiadają maksymalnemu wychyleniu kulki, 3 minimalnemu. W momentach 2 i 4 kulka przechodzi przez położenie równowagi.

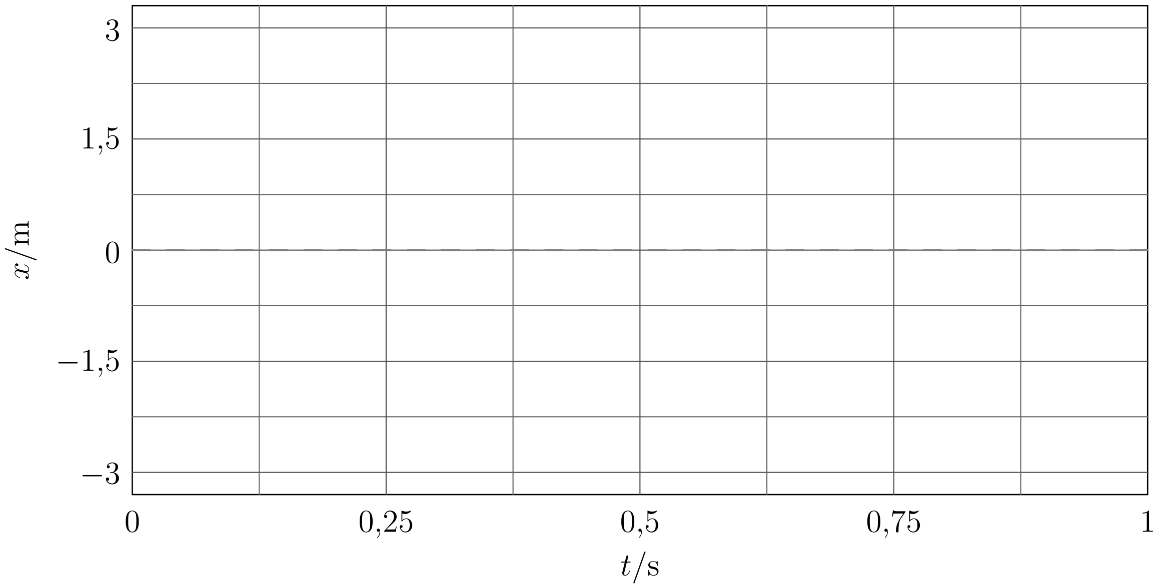
a) Narysuj wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu od momentu 1 do 5.



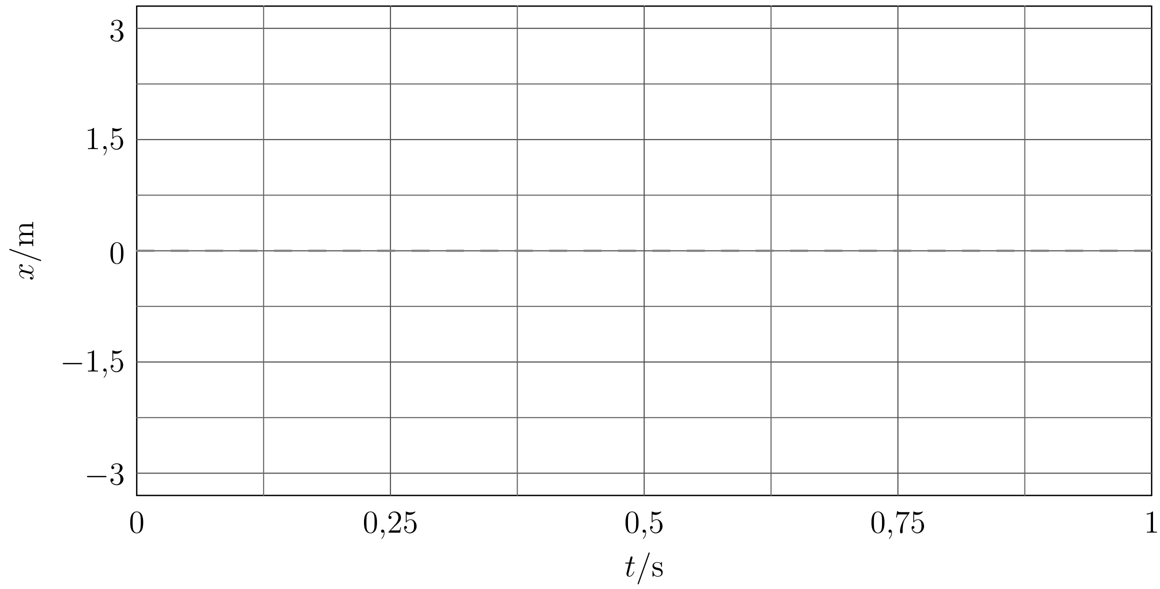
b) Narysuj wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Narysuj wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

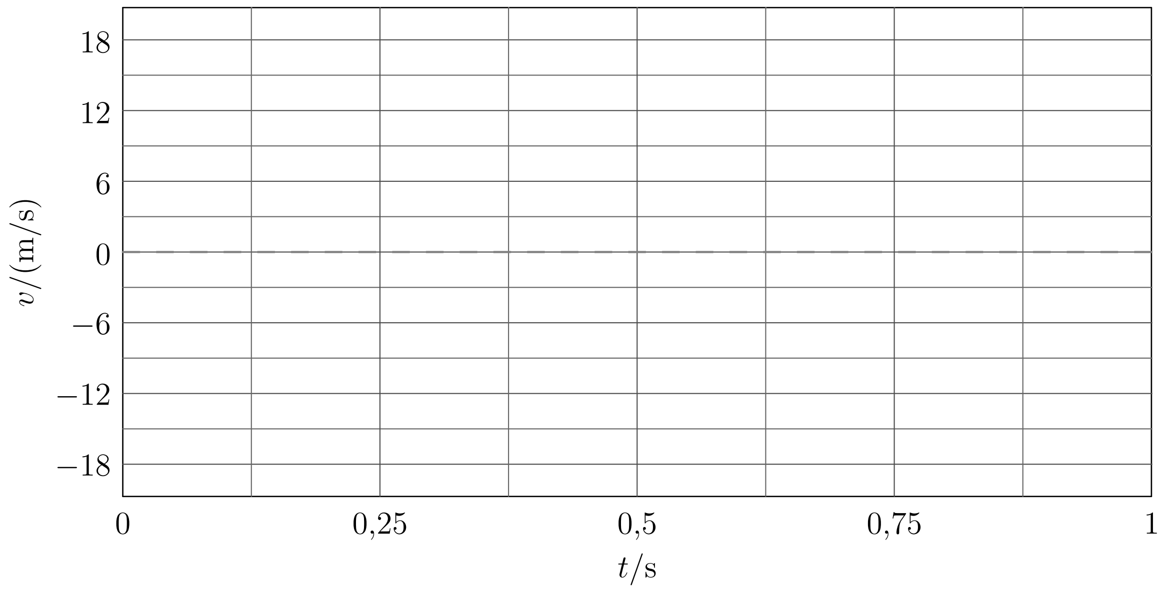


d) Narysuj wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



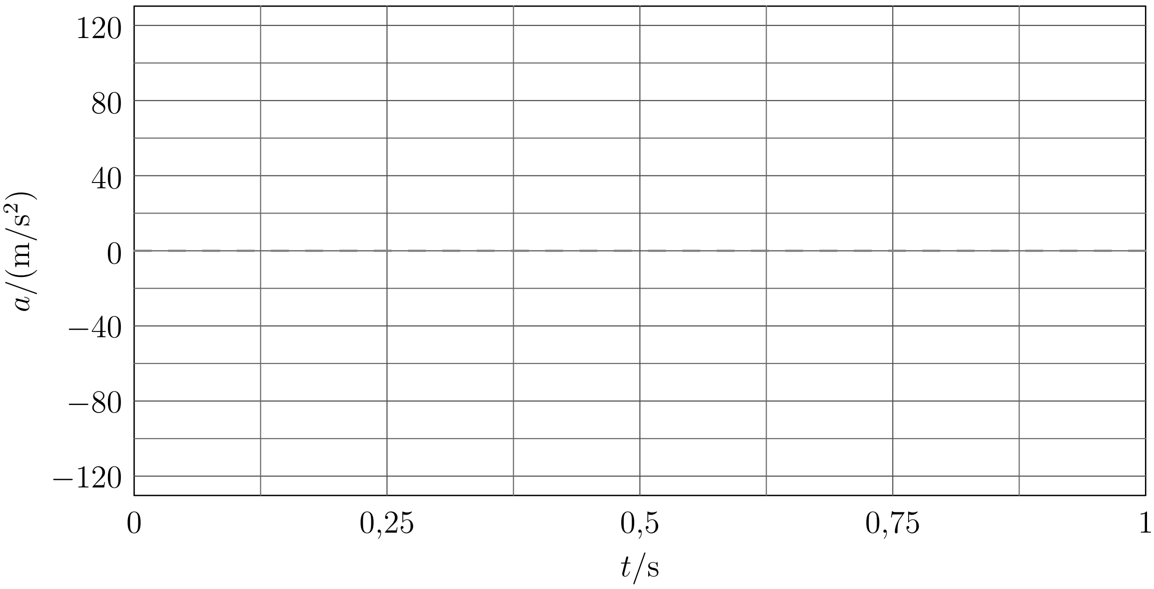
e) Jaką postać ma równanie opisujące prędkość kulki?

Narysuj wykres zależności prędkości kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).



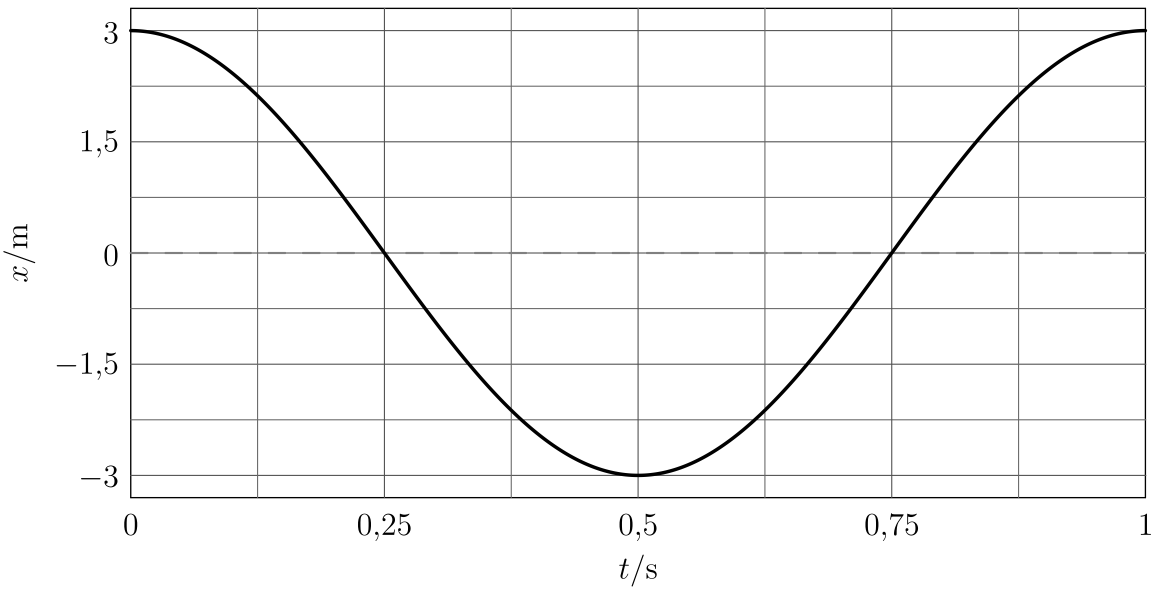
f) Jaką postać ma równanie opisujące przyspieszenie kulki?

Narysuj wykres zależności przyspieszenia kulki od czasu zgodny z wykresem z podpunktu a).

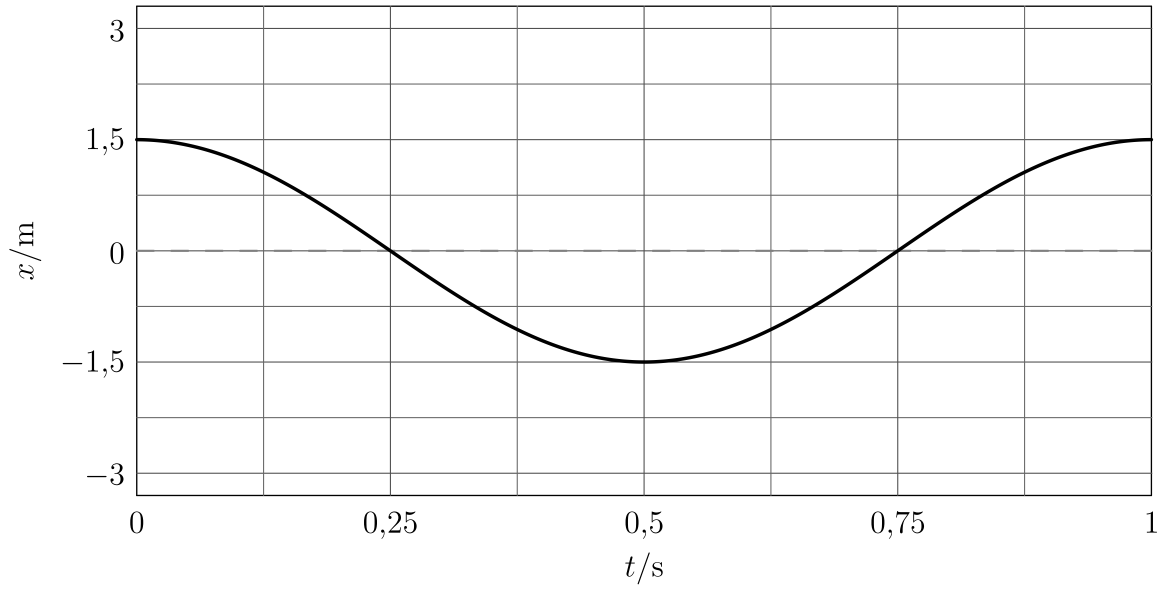


Odpowiedź:

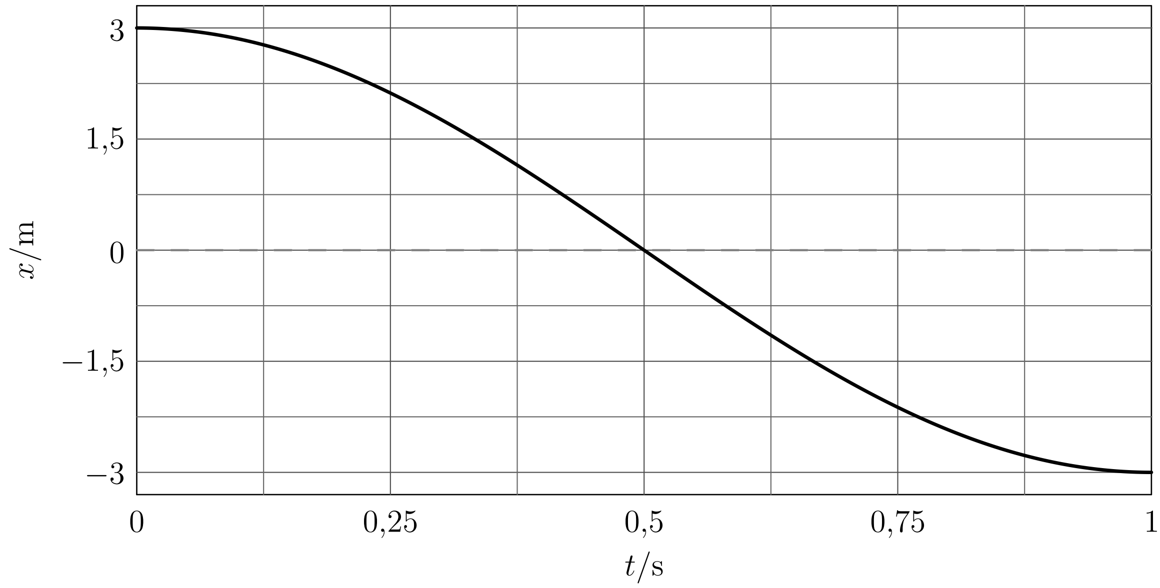
a) Wykres przedstawiający zależność położenia kulki od czasu.



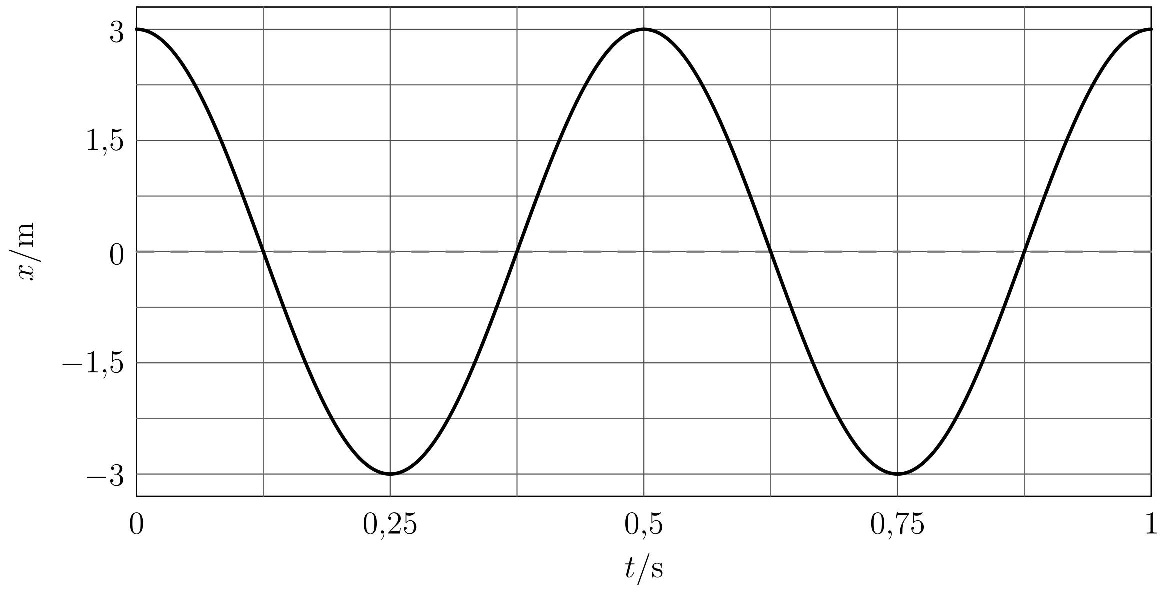
b) Wykres, na którym amplituda jest dwukrotnie mniejsza niż w podpunkcie a).



c) Wykres, na którym okres drgań jest dwukrotnie większy niż w podpunkcie a).

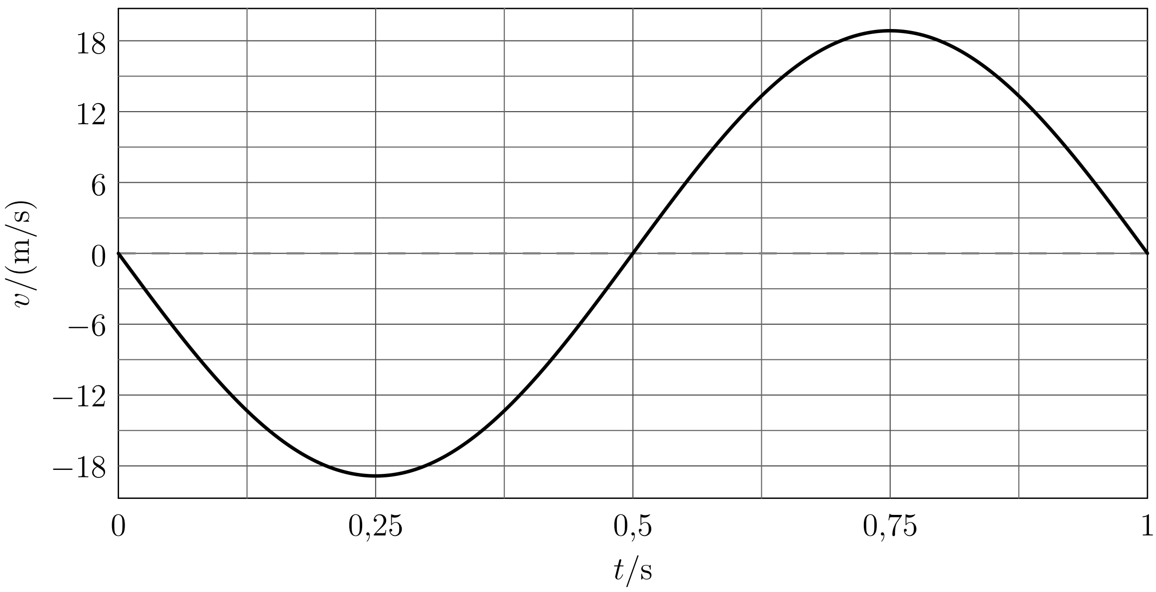


d) Wykres, na którym częstotliwość drgań jest dwukrotnie większa niż w podpunkcie a).



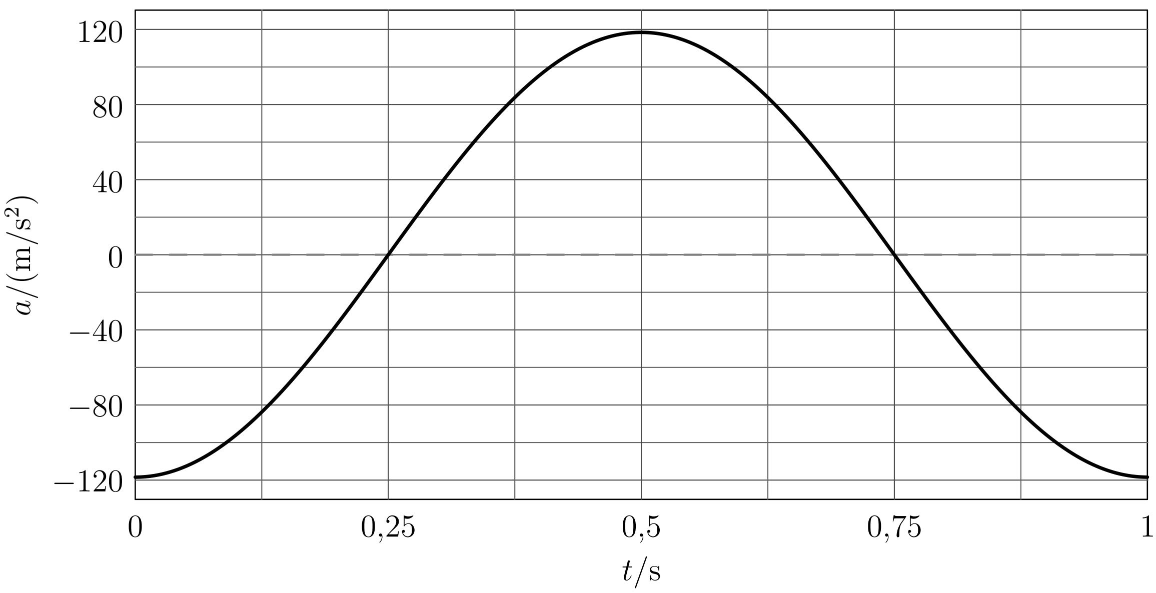
e) Wykres przedstawiający zależność prędkości kulki od czasu.
Równanie:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$



f) Wykres przedstawiający zależność przyspieszenia kulki od czasu.
Równanie:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



45 Zadanie – Kulka na sprężynie

Klaudia Dec, update: 2018-04-12, id: pl-dynamika-drgania-0002100, diff: 1

Po idealnie gładkim stole porusza się kulka o masie 680 g, która umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości 67 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Kulkę odciągnięto na odległość 10 cm od położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie. Pomiń opory ruchu.
a) Wyznacz amplitudę.
b) Wyznacz okres drgań.
c) Wyznacz częstotliwość
d) Wyznacz częstość kołową.

e) Wyznacz maksymalną prędkość kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
f) Wyznacz maksymalne przyspieszenie kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięte.
g) Wyznacz maksymalną energię potencjalną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.
h) Wyznacz maksymalną energię kinetyczną kulki i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

Odpowiedź:
a) Amplituda wynosi: $x_m = 10$ cm.
b) Okres drgań wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}633$ s, gdzie m to masa kulki, a k to stała sprężystości.
c) Częstotliwość wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 1{,}58$ Hz.
d) Częstość kołowa wynosi: $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 9{,}93\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
e) Maksymalna prędkość kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$v_{max} = \omega x_m \approx 0{,}993\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
f) Maksymalne przyspieszenie kulki zostaje osiągnięte na krańcach toru i wynosi:
$a_{max} = \omega^2 x_m \approx 9{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
g) Maksymalna energia potencjalna kulki zostaje osiągnięta na krańcach toru i wynosi:
$E_{pot} = \frac{k{x_m}^2}{2} \approx 0{,}335$ J.
h) Maksymalna energia kinetyczna kulki zostaje osiągnięta w punkcie równowagi i wynosi:
$E_{kin} = \frac{m{v_m}^2}{2} \approx 0{,}335$ J.

46 Zadanie – Drgająca ciecz

Klaudia Dec, update: 2018-04-18, id: pl-dynamika-drgania-0002300, diff: 2

Jaś nalał pewną ciecz o objętości 12 cm^3 do pionowo ustawionej U-rurki, której przekrój poprzeczny wynosił 0,4 cm^2. Następnie dmuchnął do jednego z ramion tak mocno, że poziom wody podniósł się w drugim ramieniu. Zmiany poziomu cieczy zachodzą jedynie w prostych fragmentach ramion rurki. Pomiń opory ruchu cieczy.
a) Wykaż, że siła, która dąży do przywrócenia stanu równowagi, to siła harmoniczna.
b) Oblicz częstotliwość, z jaką będzie drgała ciecz.

Wskazówka:
a) Jaka siła powoduje ruch? Jak zmieni się poziom cieczy w pierwszym ramieniu, jeżeli w drugim ciecz podniesie się o x?
b) Zauważ podobieństwo do ruchu ciężarka na sprężynie.

Odpowiedź:
a) Siła, która powoduje ruch to siła ciężkości: $Q = mg$, gdzie m to masa części cieczy, g to przyspieszenie ziemskie. Masę możemy wyrazić jako: $m = \rho V_{nad}$, gdzie ρ to gęstość cieczy, V_{nad} to objętość części cieczy. Objętość natomiast to: $V_{nad} = 2xS$, gdzie x to wychylenie cieczy ponad poziom równowagi, a S to przekrój poprzeczny. Zbierając wszystko razem otrzymujemy: $Q = 2Sg\rho x = kx$. Wartość siły ciężkości jest więc proporcjonalna do wychylenia cieczy z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi, zatem spełnia cechy siły harmonicznej.
b) Ciecz będzie drgała z częstotliwością: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Sg}{V}} \approx 1{,}29$ Hz.

47 Zadanie – Wahadło na planecie

Klaudia Dec, update: 2018-07-05, id: pl-dynamika-drgania-0002500, diff: 1

Na pewnej planecie mała kulka o masie 50 g została zawieszona na nitce o długości 20 cm. Kulka waha się z okresem wynoszącym 0,6 s oraz amplitudą znacznie mniejszą od długości nici. Opory ruchu można pominąć.
a) Czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne tej planety? Jeśli tak, to ile ono wynosi?
b) Jak zmieni się okres wahań kulki, jeżeli zwiększymy jej masę trzykrotnie?
c) Jaka musi być długość nici, aby ta sama kulka wahała się z okresem równym 1,2 s?

Wskazówka:
a) Jak zależy okres wahań od przyspieszenia grawitacyjnego planety?
b) Od czego zależy okres wahań?
c) Jak zależy okres wahań od długości wahadła?

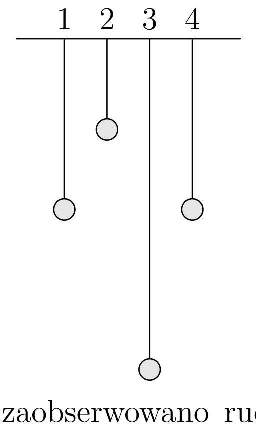
Odpowiedź:
a) Tak, przyspieszenie grawitacyjne wynosi: $g = \frac{4\pi^2}{T^2}l \approx 21{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, gdzie l to długość nici, a T to okres drgań.
b) Okres wahań nie zależy od masy kulki, więc okres wahań się nie zmieni.
c) Długość nici musi wynosić: $L = 4l = 80$ cm.

48 Zadanie – Rezonans mechaniczny

Klaudia Dec, update: 2018-03-07, id: pl-dynamika-drgania-0002600, diff: 2

Na rozciągniętej poziomo lince zawieszamy cztery wahadła. W poniższej tabeli zestawiono wartości ich długości oraz mas zawieszonych ciężarków, gdzie l i m są jednostkami odpowiednio długości i masy.

numer wahadła	1	2	3	4
długość	l	$0{,}5l$	$2l$	l
masa	m	$2m$	m	$3m$



Pierwsze wahadło wprawiono w ruch. Po pewnym czasie zaobserwowano ruch pozostałych wahadeł. Które z nich miało największe wychylenie? Drugie, ponieważ znajduje się najbliżej? Trzecie, ponieważ ma taką samą masę? Czy może czwarte, ponieważ ma taką samą długość nici?

Wskazówka: Od czego zależy okres drgań wahadła matematycznego?

Odpowiedź: Najbardziej w ruch zostanie wprawione wahadło czwarte, ponieważ jego okres drgań jest równy okresowi drgań wahadła pierwszego.

49 Zadanie – Przyssawka

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-28, id: pl-statyka-0001000, diff: 1

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 11 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1004 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Wskazówka: $F = p\,A$

Wskazówka: $A = \pi(d/2)^2$

Wskazówka: $F \approx 954$ N.

Wskazówka: $m = F/g$

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 97,4 kg.

50 Zadanie – Pod wodą

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-21, id: pl-statyka-0002000, diff: 1

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 15 m. Przyjmij gęstość wody 1027 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Wskazówka: $p = dgh$

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 151 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

51 Zadanie – Prasa hydrauliczna

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-28, id: pl-statyka-0003000, diff: 1

Dwa walcowe tłoki prasy hydraulicznej mogą poruszać się w pionie. Gdy są nieobciążone, znajdują się na tym samym poziomie. Mniejszy tłok ma średnicę 2 cm, a duży średnicę 47 cm. Jaki odważnik trzeba umieścić na małym tłoku, by utrzymać bryłę o masie 1700 kg leżącą na dużym tłoku?

Wskazówka: $p = mg/S$, gdzie $S = \pi r^2$

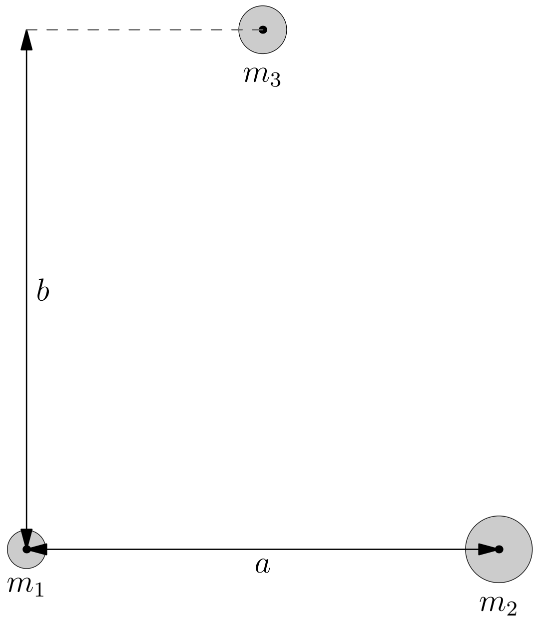
Wskazówka: $p_1 = p_2$

Odpowiedź: Na małym tłoku należy umieścić odważnik o masie ok. 3,08 kg.

52 Zadanie – Środek masy

Magda Gładka, update: 2017-05-18, id: pl-statyka-0004000, diff: 2

Środki mas pokazanych na rysunku tworzą trójkąt równoramienny, gdzie: $m_1 = 0{,}4$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg, $m_3 = 0{,}8$ kg. Podstawa trójkąta równoramiennego to $a = 4$ cm, a wysokość to $b = 6$ cm. Znajdź środek masy układu. Jako początek układu współrzędnych przyjmij środek masy m_1.



Wskazówka: Współrzędne środka masy to

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i},$$

$$y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i},$$

gdzie x_c to współrzędna pozioma, a y_c to współrzędna pionowa środka masy.

Odpowiedź: Środek masy znajduje się w punkcie $S = (x_c, y_c)$, gdzie

$$x_c = \frac{m_2 a + \frac{1}{2} m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}67 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3} = 2 \text{ cm}.$$