Węzeł, 26 lutego 2017 r.

Fale

I. Konstruktywna

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania.

1 Zadanie – Generator fal

Uczeń nalał wody do wanny. Na powierzchni wody położył drewnianą listewkę połączoną z generatorem drgań. Generator poruszał listewką pionowo, ze stałą częstotliwością tak, że listewka cały czas była w kontakcie z wodą. W górnym położeniu znajdowała się co 0,18 s. Uczeń wytworzył w ten sposób na powierzchni wody falę płaską. Jej prędkość wynosi 0,29 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Oblicz częstotliwość wytwarzanych fal oraz odległość między kolejnymi grzbietami.

Odpowiedź: Częstotliwość wytwarzanych fal wynosi ok. 5,6 Hz, a odległość między kolejnymi grzbietami fali ok. 5,2 cm.

2 Zadanie – Dźwięk w piaskowcu

Prędkość dźwięku w piaskowcu jest równa 2800 m/s. Oblicz okres oraz częstotliwość fali rozchodzącej się w płycie z tego piaskowca, jeśli długość fali jest równa 1,4 km.

Odpowiedź: Okres fali $T = \lambda/v \approx 0{,}5$ s, a jej częstotliwość $f = 1/T \approx 2$ Hz.

3 Zadanie – Częstotliwość światła

Wiązka światła o długości fali 550 nm w próżni pada na powierzchnię szkła o bezwzględnym współczynniku załamania tego światła równym 1,67. Oblicz częstotliwość i długość fali tego światła w szkle. Przyjmij wartość prędkości światła w próżni $3 \cdot 10^8$ m/s.

Odpowiedź: Częstotliwość fali w szkle $f_2 = f_1 = c/\lambda_1 \approx 545$ THz, gdzie f_1 i λ_1 to odpowiednio częstotliwość i długość fali w próżni. Długośc fali w szkle $\lambda_2 = v_2 T = cT/n = \lambda_1/n \approx 329$ nm, gdzie v_2 to prędkość fali w szkle.

4 Zadanie – Fala biegnąca

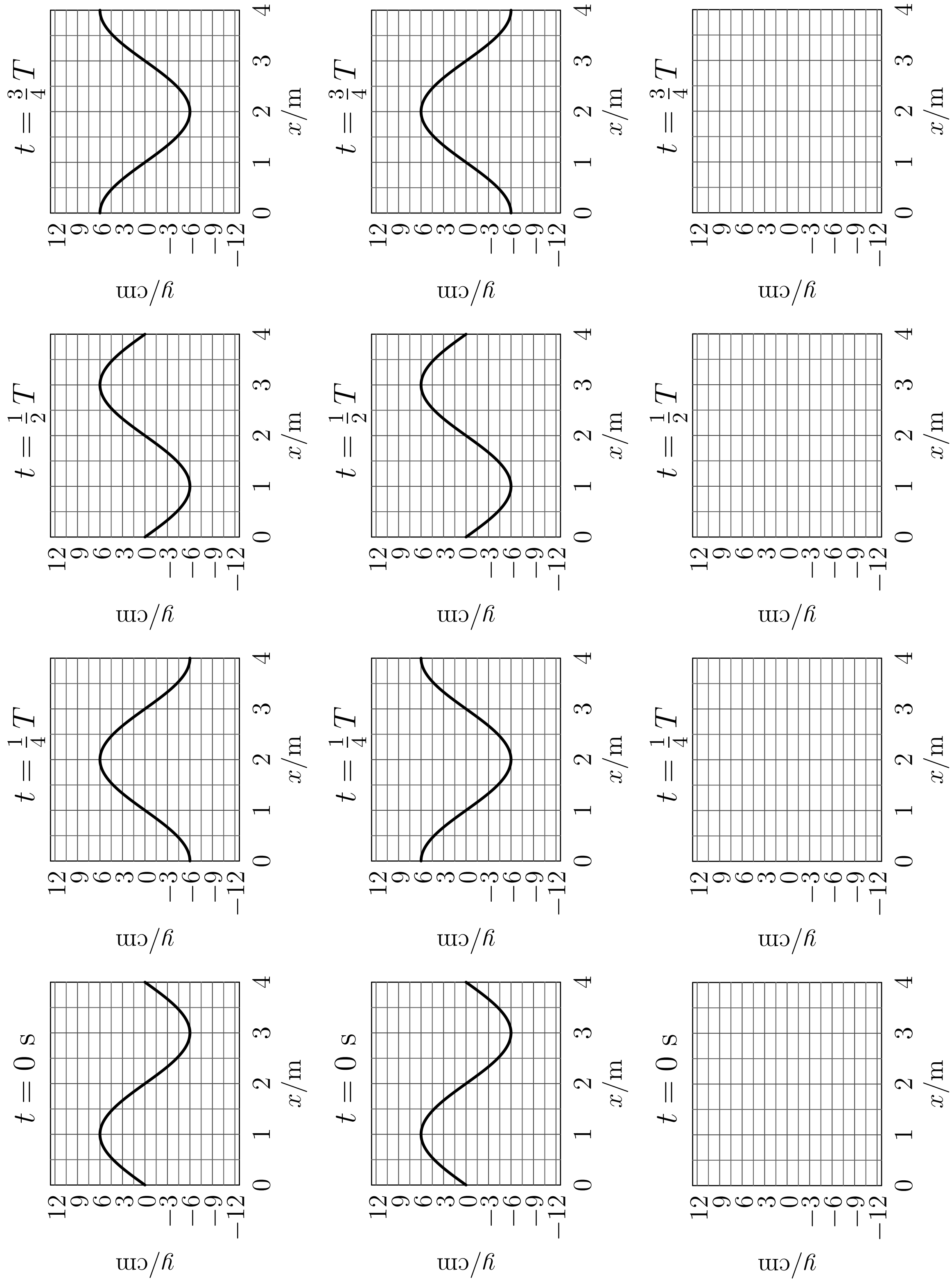
Wzdłuż sznurka biegnie fala, która opisana jest wzorem: $y(x,t) = A\cos(Bx - Ct + D)$, gdzie x to położenie, a t to czas. Stałe numeryczne wynoszą odpowiednio: $A = 4$ mm, $B = 73$ rad/m, $C = 34$ rad/s, $D = 1$ rad.

a) Wyznacz amplitudę fali.
b) Wyznacz długość fali.
c) Wyznacz okres fali.
d) Wyznacz częstotliwość fali.
e) Wyznacz prędkość fali.
f) Wyznacz przemieszczenie sznurka w punkcie $x = 12{,}5$ cm w chwili $t = 8{,}9$ s.

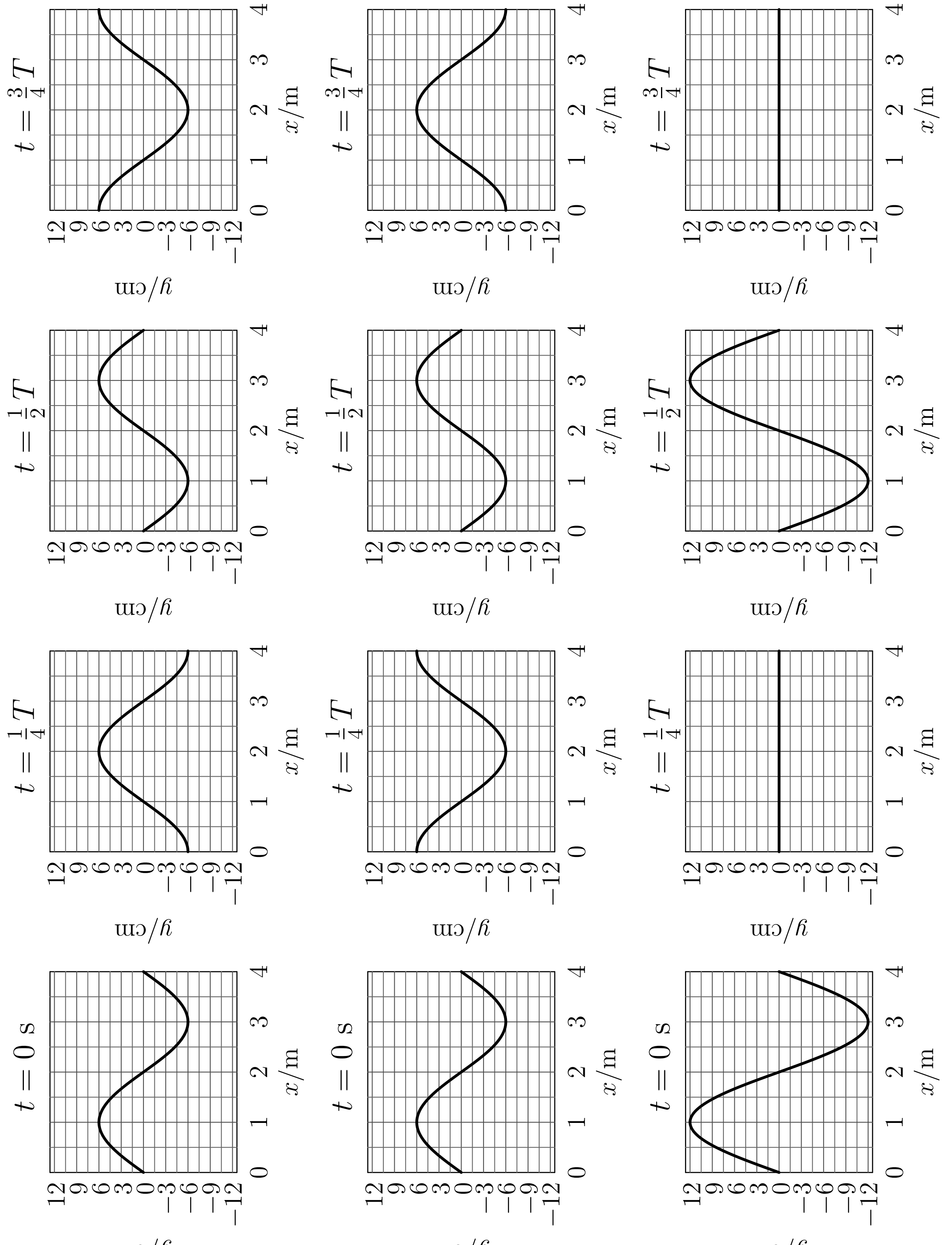
Odpowiedź:
a) Amplituda fali wynosi: $y_m = 4$ mm i jest równa co do wartości parametrowi A.
b) Długość fali wynosi: $\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx 8{,}6$ cm, gdzie k to liczba falowa równa co do wartości parametrowi B.
c) Okres fali wynosi: $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0{,}19$ s, gdzie ω to częstość kołowa równa co do wartości parametrowi C.
d) Częstotliwość fali wynosi: $f = \frac{1}{T} \approx 5{,}4$ Hz.
e) Prędkość fali wynosi: $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \approx 0{,}47\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
f) Przemieszczenie w punkcie x w chwili t wynosi:
$y = 0{,}004 \cdot \cos(73 \cdot 0{,}125 - 34 \cdot 8{,}9 + 1)\,\mathrm{m} \approx -3{,}8$ mm.

5 Zadanie – Fale przeciwbieżne

Na poniższym rysunku umieszczono zależności wychylenia y od położenia x w wyróżnionych chwilach t dla dwóch fal: dla pierwszej fali w pierwszym rzędzie i dla drugiej fali w drugim rzędzie. Jak będzie wyglądała ich suma (superpozycja)? Narysuj odpowiednie zależności $y(x)$ w trzecim rzędzie.



Odpowiedź:



6 Zadanie – Kuter rybacki

Dwóch rybaków wypłynęło kutrem rybackim na morze w poszukiwaniu ławicy ryb. Płynęli z prędkością 18 km na godzinę względem dna. Fale morskie, płynące w przeciwną stronę, uderzały w przednią część kadłuba około 75 razy w ciągu minuty. Odległość między kolejnymi grzbietami fal wynosiła 5 m.

W celu znalezienia ławicy ryb, rybacy wykorzystali sonar, czyli urządzenie, które wysyłało pionowo w głąb wody fale ultradźwiękowe o częstotliwości 160 kHz i długości 9 mm. Od chwili

wysłania impulsu do chwili jego powrotu po odbiciu się od ławicy ryb upłynęło 70 ms.
a) Ile wynosi szybkość przemieszczania się fal morskich względem dna?
b) Ile wynosi szybkość rozchodzenia się fal ultradźwiękowych emitowanych przez sonar?
c) Jaka jest głębokość, na której znajduje się ławica ryb?

Odpowiedź:
a) Szybkość przemieszczania się fal morskich względem dna wynosi $v_f = \lambda_f f_f - v_k \approx 1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie λ_f - odległość między grzbietami fal, f_f - częstotliwość uderzania fal morskich o kuter, v_k - prędkość kutra.
b) Szybkość rozchodzenia się fal ultradźwiękowych wynosi $v_s = \lambda_s f_s \approx 1440\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie λ_s to długość fali, a f_s to częstotliwość fali wysłanej przez sonar.
c) Ławica ryb znajduje się na głębokości $h = \lambda_s f_s \frac{t}{2} \approx 50$ m, gdzie t to czas od wysłania do powrotu impulsu.

7 Zadanie – Struna

Rozważmy gitarową strunę o długości 0,66 m, która rozpięta jest pomiędzy dwoma zaciskami. Przy częstościach rezonansowych, w wyniku interferencji, w strunie powstaje fala stojąca. Drganie własne o najniższej częstości rezonansowej nazywamy modem podstawowym lub pierwszą harmoniczną. W przypadku powyższej struny częstotliwość modu podstawowego wynosi 335 Hz.
a) Z jaką prędkością rozchodzi się fala w strunie?
b) Jaką częstotliwość ma druga harmoniczna?

Odpowiedź:
a) Fala rozchodzi się z prędkością $v = 2lf_1 \approx 442\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie l to długość struny, a f_1 to częstotliwość modu podstawowego.
b) Druga harmoniczna ma częstotliwość równą $f_2 = 670$ Hz.

8 Zadanie – Prędkość dźwięku w stali

Paweł i Gaweł stoją na szynach kolejowych w odległości 1089 m od siebie. Paweł uderzył młotkiem w szynę. Gaweł, przykładając ucho do szyny, usłyszał dźwięk o 3 sekundy wcześniej niż dźwięk, który doleciał w powietrzu. Oblicz prędkość, z jaką rozchodzi się dźwięk w stali, z której zrobiono szyny. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 339 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Odpowiedź: Prędkość rozchodzenia się dźwięku w stali wynosi: $v_s = \frac{1}{\frac{1}{v_p} - \frac{\Delta t}{s}} \approx 5130\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gdzie v_p to prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu, Δt to różnica w czasie, s to odległość pomiędzy Pawłem a Gawłem.

9 Zadanie – Radiowóz policyjny

Syrena radiowozu policyjnego wydaje dźwięk o częstotliwości 970 Hz. Samochód zbliża się ze stałą prędkością z oddali do ludzi stojących na przystanku, którzy odbierają dźwięk o częstotliwości 1040 Hz. Prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu wynosi 339 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
a) Ile wynosi prędkość radiowozu?
b) Znając prędkość radiowozu, oblicz częstotliwość dźwięku, jaką usłyszą ludzie na przystanku, gdy radiowóz znajdzie się w znacznej odległości, oddalając się od nich.

Odpowiedź:
a) Prędkość radiowozu wynosi: $v_r = v_p \frac{f^{'} - f_s}{f^{'}} \approx 82{,}1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, gdzie v_p to prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu, f_s to częstotliwość syreny, $f^{'}$ to częstotliwość, którą odbierają ludzie na przystanku.
b) Częstotliwość dźwięku, którą odbiorą ludzie na przystanku po przejechaniu radiowozu będzie wynosić: $f^{''} = f_s \frac{v_p}{v_p + v_r} \approx 909$ Hz.

10 Zadanie – Nietoperz

Nietoperz orientuje się w przestrzeni, wysyłając i odbierając odbite fale dźwiękowe. Spoczywający nietoperz wysyła dźwięki o częstotliwości 75 kHz. Wydając ten sam dźwięk, osobnik leciał z prędkością 13 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, prostopadle do pionowej ściany jaskini. Jaką częstotliwość miała odbierana przez nietoperza fala dźwiękowa, która wróciła do niego po odbiciu? Prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu wynosi 339 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Odpowiedź: Fala dźwiękowa, która wróciła do nietoperza, miała częstotliwość równą: $f^{'} = f \frac{v_p + v_n}{v_p - v_n} \approx 81$ kHz, gdzie f to częstotliwość fali wysłanej przez nietoperza, v_p to prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu, v_n to prędkość nietoperza.

11 Zadanie – Nietoperz i mucha [do dokończenia]

W jednowymiarowym świecie jednowymiarowy nietoperz leci z prędkością 2 m/s względem układu współrzędnych związanym z torami naprzeciw jadącego pociągu. W chwili $t = 0$ s znajduje się w odległości 153 m od pociągu. Chce złapać muchę, znajdującą się między nim a pociągiem i oddaloną od niego w $t = 0$ s o 30 m. Wysyła sygnał echolokacyjny o częstotliwości 45 kHz. Wracają do niego dwa sygnały o częstotliwościach 45,53 kHz i 50,92 kHz. Czy nietoperzowi uda się złapać tę muchę? Odpowiedź uzasadnij odpowiednimi obliczeniami. Załóż, że prędkości nietoperza, pociągu i muchy są dużo mniejsze od prędkości dźwięku w powietrzu 340 m/s.

Odpowiedź: Nietoperzowi nie udało się złapać muchy, ponieważ czas potrzebny na dolecenie nietoperza do muchy jest dłuższy od tego, który jest potrzebny na dolecenie nietoperza do pociągu.

12 Zadanie – Przesunięcie linii widmowej

Długość fali dla linii widmowej wodoru wynosi λ_H =656,28 nm. Na niebie zaobserwowano gwiazdę, która emituje między innymi falę o długości λ =674,66 nm. Wiedząc, że jest to ta sama, lecz przesunięta linia widmowa, oblicz z jaką prędkością względem ziemskiego obserwatora porusza się ta gwiazda.

Odpowiedź: Gwiazda porusza się z prędkością $V = \frac{\lambda^2 - \lambda_H^2}{\lambda^2 + \lambda_H^2} c = 8283941$ m/s.

13 Zadanie – Odkurzacz

Natężenie fali dźwiękowej I to moc fali przypadająca na jednostkę powierzchni, przez którą przechodzi fala. Poziom natężenia dźwięku β definiujemy jako $\beta = (10\ \mathrm{dB}) \log \frac{I}{I_0}$, gdzie I_0 to standardowe natężenie odniesienia, $I_0 = 10^{-12} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Jednostką natężenia dźwięku jest decybel. Poziom natężenia szeptu wynosi 21 dB, a odpowiadające mu natężenie I_1 jest 10000 razy mniejsze niż natężenie I_2 pracującego odkurzacza. Oblicz poziom natężenia dźwięku w decybelach pracującego odkurzacza.

Odpowiedź: Poziom natężenia pracującego odkurzacza wynosi $\beta_{odku} = (10\ \mathrm{dB}) \log \frac{I_2}{I_0} = (10\ \mathrm{dB}) \log \frac{10000\, I_1}{I_0} = (10\ \mathrm{dB}) \log 10^4 + (10\ \mathrm{dB}) \log \frac{I_1}{I_0} = 40\ \mathrm{dB} + 21\ \mathrm{dB} = 61\ \mathrm{dB}$.

14 Zadanie – Fala podłużna w pręcie

Oblicz prędkość rozchodzenia się podłużnej fali w długim, metalowym pręcie. Długość fali jest znacznie większa od średnicy pręta. Gęstość metalu, z którego wykonano pręt, jest równa 7700 kg/m^3, a moduł Younga tego metalu jest równy 171 GPa. Jeśli nie pamiętasz zależności prędkości fali od modułu Younga i gęstości, to w opisanym przypadku możesz ją uzyskać, rozważając wymiary tych wielkości.

Odpowiedź: Prędkość fali jest równa $v = \sqrt{E/\rho} \approx 4710\ \mathrm{m/s}$.

15 Zadanie – Interferencja fal dźwiękowych

W jednorodnym ośrodku umieszczono dwa głośniki. Pierwszy głośnik znajduje się w odległości 7,5 m, a drugi w odległości 4 m od mikrofonu. Każdy z głośników oddzielnie wytwarzał w okolicy mikrofonu falę o takiej samej amplitudzie, a w obszarze między tym głośnikiem a mikrofonem zmiany ciśnienia można było w przybliżeniu opisać jako falę płaską o długości fali 140 cm. Następnie włączono oba głośniki. Drgają one w taki sam sposób, czyli w zgodnej fazie. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ, czy w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, nastąpi wzmocnienie czy osłabienie dźwięku w porównaniu z sytuacją, gdy był włączony tylko jeden z głośników.

Odpowiedź: Iloczyn wartości bezwzględnej różnicy odległości i długości fali $|d_1 - d_2|/\lambda = 2{,}5$, a więc w miejscu, gdzie znajduje się mikrofon, fale spotykają się w przeciwnej fazie – nastąpi osłabienie.

16 Zadanie – Siatka dyfrakcyjna

Wiązka monochromatycznego światła oświetla siatkę dyfrakcyjną posiadającą 500 rys na jednym milimetrze. Na ekranie zaobserwowano prążek pierwszego rzędu pod kątem 16°.
a) Jaka jest długość fali światła?
b) Jaka to barwa światła?

Odpowiedź: Długość fali światła wynosi: $\lambda = \frac{\sin\alpha}{mn} \approx 551\ \mathrm{nm}$, gdzie α to kąt pod jakim obserwuje się prążek, m to liczba rys na jednym milimetrze siatki dyfrakcyjnej, n to numer rzędu. Dana długość fali odpowiada barwie zielonej.

17 Zadanie – Doświadczenie Younga

Zielone światło o długości fali 550 nm oświetla dwie bardzo wąskie szczeliny odległe o 1,2 mm. Ekran, na którym obserwujemy obraz interferencyjny, jest odległy od szczelin o 5,7 m. Ile wynosi odległość między jasnymi prążkami?

Odpowiedź: Odległość między jasnymi prążkami wynosi: $x \approx \frac{nL\lambda}{d} \approx 2{,}6$ mm, gdzie n to numer rzędu, L odległość ekranu od szczelin, λ długość fali i d odległość między szczelinami.

18 Zadanie – Czy to fala?

W strefie subdukcji miało miejsce trzęsienie ziemi. Po analizie danych sejsmicznych stwierdzono, że wychylenie skorupy ziemskiej można opisać następującą funkcją zależną od położenia x oraz czasu t:

$$f(x,t) = N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) + K$$

gdzie N, L, T, a, b, K są stałymi. Funkcja opisywała wychylenie dla $x \in (0, L)$ oraz $t \in (0, T)$. Sprawdź, czy ta funkcja spełnia równanie falowe, a więc czy opisywane wychylenie było falą.

Odpowiedź:

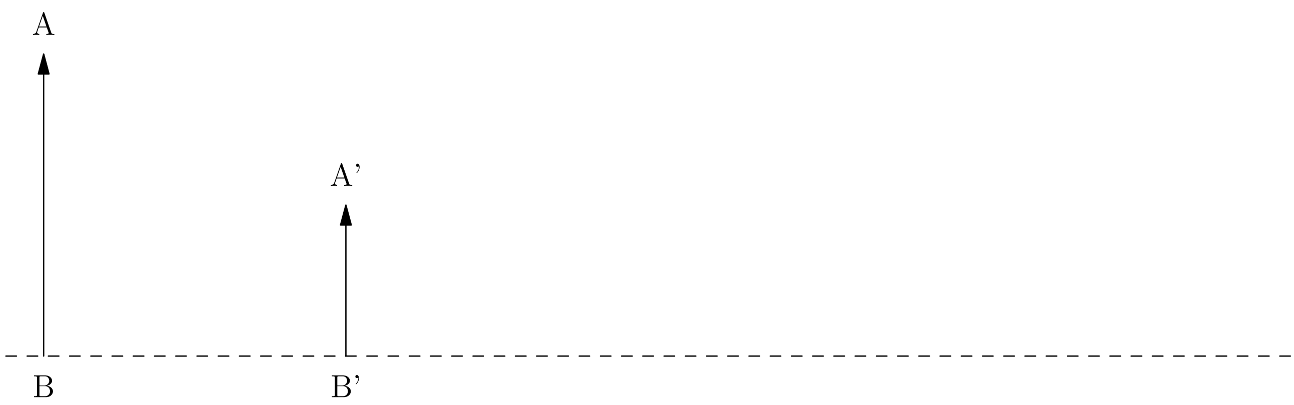
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / L^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -N \cdot \sin\left(\frac{x}{L} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + b\right) / T^2$$

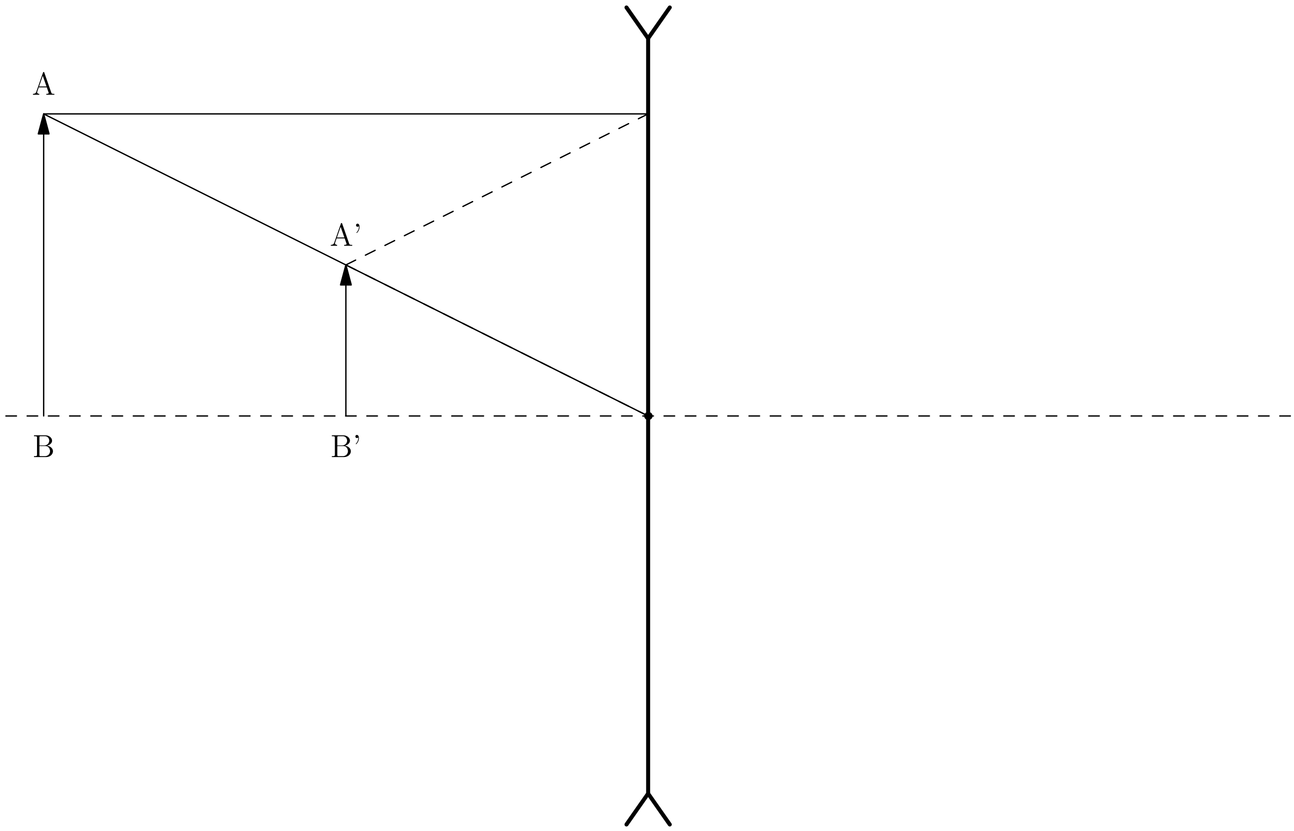
Funkcja $f(x,t)$ spełnia równanie falowe, a więc opisuje falę.

19 Zadanie – Gdzie ta soczewka?

Poniższy rysunek przedstawia w schematyczny sposób przedmiot AB oraz obraz A'B' powstały po przejściu przez cienką soczewkę światła emitowanego przez przedmiot AB. Zaznaczono też oś optyczną BB'. Wypisz 3 cechy obrazu. Znajdź położenie soczewki oraz rozstrzygnij, czy użyto soczewki skupiającej, czy rozpraszającej.



Odpowiedź: Obraz jest pomniejszony, prosty i pozorny.



Soczewka jest rozpraszająca.

20 Zadanie – Odległość do diody

Cienka soczewka o ogniskowej 15 cm musi być odsunięta na odległość 18 cm od ekranu, aby uzyskać na nim ostry obraz świecącej diody znajdującej się na osi optycznej soczewki.
a) Oblicz odległość od soczewki do diody.
b) Oblicz stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu.

Odpowiedź:
a) Odległość od soczewki do diody to 90 cm.
b) Stosunek wysokości diody do wysokości jej obrazu to 5.

21 Zadanie – Płytka równoległościenna

Wiązka światła pada na szklaną płytkę równoległościenną znajdującą się w powietrzu. Promień padający tworzy z powierzchnią graniczną kąt 45°. Bezwzględne współczynniki załamania światła dla powietrza i szklanej płytki wynoszą odpowiednio: $n_1 = 1{,}003$ i $n_2 =$1,662.
a) Ile wynosi kąt odbicia przy pierwszej powierzchni?
b) Ile wynosi kąt załamania przy pierwszej powierzchni?
c) Ile wynosi kąt odbicia przy drugiej powierzchni?
d) Ile wynosi kąt załamania przy drugiej powierzchni?
e) Czy wychodząca wiązka jest równoległa do wchodzącej?

Odpowiedź:
a) Kąt odbicia przy pierwszej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{odb,I}} = 90° - 45° = 45°$.
b) Kąt załamania przy pierwszej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{zał,I}} = \arcsin(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_{\text{pad,I}})) \approx 25°$.
c) Kąt odbicia przy drugiej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{odb,II}} = \alpha_{\text{pad,II}} = \alpha_{\text{zał,I}} = 25°$.

d) Kąt załamania przy drugiej powierzchni wynosi: $\alpha_{\text{zał,II}} = \arcsin(\frac{n_2}{n_1}\sin(\alpha_{\text{pad,II}})) = \alpha_{\text{pad,I}} = 44°$.
e) Tak, wychodząca wiązka jest równoległa do wchodzącej.

22 Zadanie – Kij w basenie

Z poziomego dna basenu, prostopadle do dna, wystaje kij o długości 2,1 m. Ponad powierzchnią wody znajduje się 27% jego długości. Padają na niego promienie słoneczne pod kątem 56° do powierzchni wody. Ile wynosi długość cienia kija na dnie basenu? Współczynnik załamania wody wynosi 1,33, a powietrza 1.

Odpowiedź: Długość cienia na dnie basenu wynosi: $x = a + b \approx 1{,}09$ m.
Zmienna a to długość cienia na powierzchni wody: $a = \frac{lp}{\operatorname{tg}\phi} \approx 0{,}38$ m, gdzie l to długość kija, p to procent jego długości, która wystaje ponad wodę, ϕ to kąt padania promieni do powierzchni wody.
Zmienna b to długość fragmentu cienia na dnie basenu: $b = l(1-p)\operatorname{tg}\beta \approx 0{,}71$ m, gdzie β to kąt załamania uzyskany z prawa załamania: $\sin\beta = \frac{n_p}{n_w}\sin(90° - \phi) \approx 0{,}4204$, gdzie n_p to współczynnik załamania powietrza, a n_w to współczynnik załamania wody.

23 Zadanie – Polaryzacja odbitego światła

Studenci powinni określić materiał, z którego została wykonana sześcienna bryła. Mają tego dokonać tylko na podstawie badania polaryzacji odbitego od jej ściany światła. Dysponują wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskali, gdy kąt między normalną do ściany a odbitą wiązką był równy 55,6°. Na podstawie odpowiednich obliczeń wskaż, z którego z następujących materiałów najprawdopodobniej wykonano bryłę (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): korund (1,77), szkło kwarcowe (1,46), fluorek sodu (1,33). Bryła znajduje się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Odpowiedź: Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 1{,}46$. A więc materiałem jest najprawdopodobniej szkło kwarcowe.

24 Zadanie – Polaryzacja i geolog

Młoda geolog podczas wycieczki w Sudetach znalazła fragment kryształu. W celu jego identyfikacji badała polaryzację odbitego od ściany kryształu światła. Dysponowała wiązką światła o długości fali 589 nm. Maksymalną polaryzację liniową odbitej wiązki uzyskała, gdy kąt między normalną do ściany kryształu a odbitą wiązką był równy 57°. Na podstawie odpowiednich obliczeń określ najbardziej prawdopodobny minerał, którego fragment był badany. Wybierz spośród (w nawiasach podano bezwzględny współczynnik załamania światła dla referencyjnej próbki): fluoryt (1,43), halit (1,54), szkło kwarcowe (1,46). Kryształ znajdował się w powietrzu, dla którego przyjmij bezwzględny współczynnik załamania światła równy 1.

Odpowiedź: Bezwzględny współczynnik załamania jest równy $n_2 = n_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 1{,}54$. A więc minerałem jest najprawdopodobniej halit.