

Fizyka kwantowa

Ψ . Falowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Próbujemy!

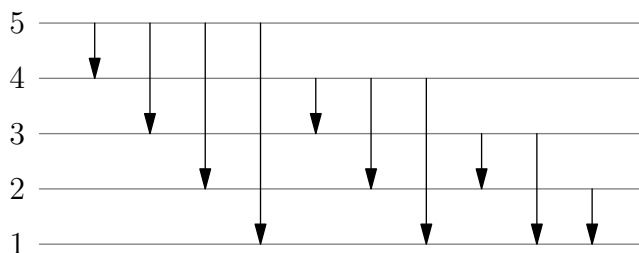
1 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.

- Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej n (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
- Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
- Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

Odpowiedź:

- Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



- Można zaobserwować 10 linii.
- Przejście z poziomu 5 na poziom 4.

2 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej l i magnetycznej m określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.

Odpowiedź: Możliwe stany to:

$$l = 0 \text{ z } m \in \{0\}$$

$$l = 1 \text{ z } m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$l = 2 \text{ z } m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$l = 3 \text{ z } m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$l = 4 \text{ z } m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

3 Zadanie – Liczba fotonów

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 760 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 76% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 34 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Odpowiedź: Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\text{abs}}/(\varepsilon_{\text{eff}} E_\gamma) \approx 1710 \cdot 10^{14}$.

4 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 270 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 2,21 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J · s = $4,136 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

Odpowiedź: Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 2,39$ eV.

5 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru w stanach:

a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2}\pi a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0,529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm^{-3} . Funkcje określone są w układzie kartezjańskim XYZ, jądro spoczywa w środku tego układu, a r jest odległością od środka układu do punktu (x, y, z) .

Odpowiedź:

a)

$$|\Psi_{100}(0,0,0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0,0,0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

6 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną x . Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \exp(-x/L) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L} + \frac{\pi}{4}\right)$$

gdzie N oraz $L = 8$ nm są stałymi. Zmienna x przyjmuje wartości od 0 do $\frac{3}{2}L$. Wypisz wszystkie wartości x w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np. $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.

Odpowiedź: Wartości x , w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: $3L/8$, $7L/8$, $11L/8$, a więc 3 nm, 7 nm, 11 nm.

7 Zadanie – Cząstka w sześciacie - pomiar energii

Cząstka o masie m jest uwięziona w sześciacie o krawędzi L . Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześciatu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześciatem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześciatu.

- Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.
- Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
- Dla cząstki znajdującej się w stanie

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} \sin(kx) \left(1 + 4\sqrt{2} \cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky) \sin(kz)e^{-i3\omega t}$$

gdzie $k \equiv \frac{\pi}{L}$ oraz $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$, wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

- Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

Wskazówka. Dla dodatnich liczb całkowitych p i r

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{pr}$$

Odpowiedź: a) Dla dodatnich liczb całkowitych n_x , n_y , n_z unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t) \psi_{n_y}(y,t) \psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n_x kx) e^{-in_x^2 \omega t}$$

- Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

- Możliwe mierzone wartości energii dla stanu Ψ_s to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów Ψ_{111} oraz Ψ_{211} .

- Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii $6\hbar\omega$ jest równe $\frac{8}{9} \approx 0,889$.