Stan Własny, 26 lutego 2017 r.

Fizyka kwantowa

Ψ. Falowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Próbujemy!

1 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-06, id: pl-fizyka-kwantowa-0001000, diff: 1

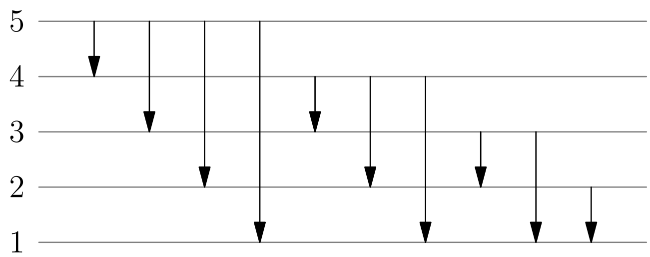
Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej n (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

Wskazówka: $n = 1, 2, ...$

Wskazówka: $E_\gamma = E_i - E_f = hf$.

Wskazówka: $E_n \propto -n^{-2}$.

Odpowiedź:
a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



b) Można zaobserwować 10 linii.
c) Przejście z poziomu 5 na poziom 4.

2 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-18, id: pl-fizyka-kwantowa-0002000, diff: 1

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej l i magnetycznej m określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 3$.

Wskazówka: $l = 0, 1, ..., n - 1$.

Wskazówka: $m = -l, ..., 0, ..., +l$.

Odpowiedź: Możliwe stany to:
$l = 0$ z $m \in \{0\}$
$l = 1$ z $m \in \{-1, 0, 1\}$
$l = 2$ z $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

3 Zadanie – Liczba fotonów

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0003000, diff: 1

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 520 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 66% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 16 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Wskazówka:
$$E_\gamma = hf$$
E_γ – energia fotonu; f – częstotliwość światła.

Wskazówka:
$$\lambda = c/f$$
λ – długość fali.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 3{,}82 \cdot 10^{-19}$ J.

Wskazówka:
$$E_i = E_{\mathrm{abs}}/\varepsilon_{\mathrm{eff}}$$
E_i – energia impulsu; E_{abs} – energia zaabsorbowana przez płytkę; $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ – efektywność pochłaniania energii przez płytkę.

Odpowiedź: Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\mathrm{abs}}/(\varepsilon_{\mathrm{eff}} E_\gamma) \approx 634 \cdot 10^{14}$.

4 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0004000, diff: 1

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 270 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 1,01 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s $= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

Wskazówka:
$$E_\gamma = W + E_k$$
E_γ – energia fotonu; W – praca wyjścia; E_k – maksymalna energia kinetyczna elektronu.

Wskazówka:
$$E_\gamma = hf$$
f – częstotliwość światła.

Wskazówka:

$$\lambda = c/f$$

λ – długość fali światła.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 4{,}6$ eV.

Odpowiedź: Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 3{,}59$ eV.

5 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa na środku studni

Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-04, id: pl-fizyka-kwantowa-0004800, diff: 1

Cząstka jest uwięziona w jednowymiarowej, nieskończenie głębokiej studni potencjału. Studnia ma szerokość L. Położenie cząstki opisujemy zmienną $x \in [0, L]$. Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia tej cząstki na środku studni, czyli dla $x = L/2$. Kwantowa funkcja falowa opisująca cząstkę jest równa

$$\Psi(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

gdzie $n = 5$, $L = 37 \cdot 10^{-10}$ m. Wynik podaj w jednostkach nm^{-1}.

Wskazówka: Gęstość prawdopodobieństwa jest równa

$$|\Psi(x)|^2$$

Wskazówka:

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2(n\frac{\pi}{L}x)$$

Wskazówka: Dla n nieparzystego

$$\sin^2(n\frac{\pi}{2}) = 1$$

Odpowiedź:

$$|\Psi|^2 = \frac{2}{L} \approx 0{,}541\ \mathrm{nm}^{-1}$$

6 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Andrzej Twardowski, Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-04, id: pl-fizyka-kwantowa-0004900, diff: 2

Dla każdego ze stanów opisanych następującymi funkcjami falowymi oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru:
a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi}a_0^{5/2}}e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm^{-3}. Funkcje falowe określone są w układzie kartezjańskim XYZ, jądro spoczywa w środku tego układu, a r jest odległością od środka układu do punktu (x, y, z).

Wskazówka:

$$e^0 = 1$$

Wskazówka:

$$\Psi_{210} \propto z$$

Odpowiedź:
a)

$$|\Psi_{100}(0,0,0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0,0,0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

7 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-19, id: pl-fizyka-kwantowa-0005000, diff: 1

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną x. Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \left(x - \frac{L}{4}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$$

gdzie N oraz $L = 8$ nm są stałymi. Zmienna x przyjmuje wartości od 0 do $\frac{3}{4}L$. Wypisz wszystkie wartości x w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np. $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.

Wskazówka: Prawdopodobieństwo jest najmniejsze w pobliżu miejsc zerowych funkcji falowej.

Wskazówka: $\sin(n\pi) = 0$ oraz $\cos(\pi/2 + n\pi) = 0$ dla n całkowitego.

Odpowiedź: Wartości x, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: 0, $L/4$, $L/2$, a więc 0 nm, 2 nm, 4 nm.

8 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-04, id: pl-fizyka-kwantowa-0010100, diff: 3

Cząstka o masie m jest uwięziona w sześcianie o krawędzi L. Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.
a) Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.
b) Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
c) Dla cząstki znajdującej się w stanie opisywanym funkcją falową

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(kx) \left(1 - 2\sqrt{2}\cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky) \sin(kz) e^{-i3\omega t}$$

gdzie $k \equiv \frac{\pi}{L}$ oraz $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$, wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

d) Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

Wskazówka. Dla dodatnich liczb całkowitych p i r

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{pr}$$

Wskazówka: Spróbuj rozwiązać równanie Schrödingera, zakładając rozwiązanie postaci

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,t)\,\psi(y,t)\,\psi(z,t)$$

gdzie

$$\psi(x,t) = \eta(x)\,e^{-i\omega_x t}$$

Wskazówka: Zapisz Ψ_s jako sumę stanów o określonej energii.
Albo: Skorzystaj z tego, że $\left\langle \Psi_{n_x n_y n_z} \middle| \Psi_s \right\rangle$ jest równe współczynnikowi przy $\Psi_{n_x n_y n_z}$ w rozkładzie Ψ_s na stany o określonej energii.

Odpowiedź: a) Dla dodatnich liczb całkowitych n_x, n_y, n_z unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t)\,\psi_{n_y}(y,t)\,\psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n_x k x) e^{-i n_x^2 \omega t}$$

b) Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

c) Możliwe mierzone wartości energii dla stanu Ψ_s to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów Ψ_{111} oraz Ψ_{211}.
d) Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii $6\hbar\omega$ jest równe $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$.

