

## Fizyka kwantowa

$\Psi$ . Falowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Próbujemy!

### 1 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-06, id: pl-fizyka-quantowa-0001000, diff: 1*

Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej  $n = 5$ .

a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej  $n$  (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.

b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.

c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

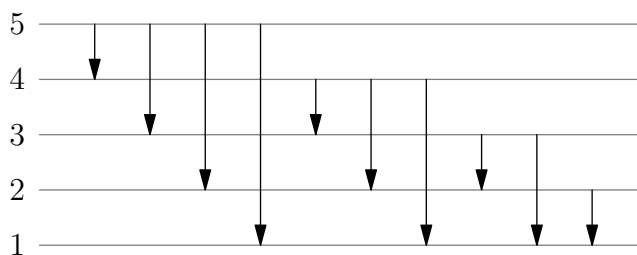
**Wskazówka:**  $n = 1, 2, \dots$

**Wskazówka:**  $E_\gamma = E_i - E_f = hf$ .

**Wskazówka:**  $E_n \propto -n^{-2}$ .

**Odpowiedź:**

a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



b) Można zaobserwować 10 linii.

c) Przejście z poziomu 5 na poziom 4.

### 2 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-18, id: pl-fizyka-quantowa-0002000, diff: 1*

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej  $l$  i magnetycznej  $m$  określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej  $n = 5$ .

**Wskazówka:**  $l = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Wskazówka:**  $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$ .

**Odpowiedź:** Możliwe stany to:

$$l = 0 \text{ z } m \in \{0\}$$

$$l = 1 \text{ z } m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$l = 2 \text{ z } m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$l = 3 \text{ z } m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$l = 4 \text{ z } m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

### 3 Zadanie – Liczba fotonów

*Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0003000, diff: 1*

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 490 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 67% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 31 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s i stałej Plancka  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J · s.

**Wskazówka:**

$$E_\gamma = hf$$

$E_\gamma$  – energia fotonu;  $f$  – częstotliwość światła.

**Wskazówka:**

$$\lambda = c/f$$

$\lambda$  – długość fali.

**Wskazówka:**  $E_\gamma = hc/\lambda \approx 4,06 \cdot 10^{-19}$  J.

**Wskazówka:**

$$E_i = E_{\text{abs}}/\varepsilon_{\text{eff}}$$

$E_i$  – energia impulsu;  $E_{\text{abs}}$  – energia zaabsorbowana przez płytkę;  $\varepsilon_{\text{eff}}$  – efektywność pochłaniania energii przez płytkę.

**Odpowiedź:** Liczba fotonów w impulsie  $n = E_i/E_\gamma = E_{\text{abs}}/(\varepsilon_{\text{eff}}E_\gamma) \approx 1140 \cdot 10^{14}$ .

### 4 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

*Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0004000, diff: 1*

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 300 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 1,37 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, ładunku elementarnego  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C, stałej Plancka  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J · s =  $4,136 \cdot 10^{-15}$  eV · s.

**Wskazówka:**

$$E_\gamma = W + E_k$$

$E_\gamma$  – energia fotonu;  $W$  – praca wyjścia;  $E_k$  – maksymalna energia kinetyczna elektronu.

**Wskazówka:**

$$E_\gamma = hf$$

 $f$  – częstotliwość światła.**Wskazówka:**

$$\lambda = c/f$$

 $\lambda$  – długość fali światła.**Wskazówka:**  $E_\gamma = hc/\lambda \approx 4,14$  eV.**Odpowiedź:** Praca wyjścia  $W = E_\gamma - E_k \approx 2,77$  eV.

## 5 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa na środku studni

*Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-04, id: pl-fizyka-kwantowa-0004800, diff: 1*

Cząstka jest uwięziona w jednowymiarowej, nieskończenie głębokiej studni potencjału. Studnia ma szerokość  $L$ . Położenie cząstki opisujemy zmienną  $x \in [0, L]$ . Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia tej cząstki na środku studni, czyli dla  $x = L/2$ . Kwantowa funkcja falowa opisująca cząstkę jest równa

$$\Psi(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

gdzie  $n = 3$ ,  $L = 22 \cdot 10^{-10}$  m. Wynik podaj w jednostkach  $\text{nm}^{-1}$ .**Wskazówka:** Gęstość prawdopodobieństwa jest równa

$$|\Psi(x)|^2$$

**Wskazówka:**

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

**Wskazówka:** Dla  $n$  nieparzystego

$$\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

**Odpowiedź:**

$$|\Psi|^2 = \frac{2}{L} \approx 0,909 \text{ nm}^{-1}$$

## 6 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

*Andrzej Twardowski, Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-04, id: pl-fizyka-kwantowa-0004900, diff: 2*

Dla każdego ze stanów opisanych następującymi funkcjami falowymi oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru:

a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi}a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie  $a_0 \approx 0,529 \cdot 10^{-10}$  m. Wyniki podaj w jednostkach  $\text{nm}^{-3}$ . Funkcje falowe określone są w układzie kartezjańskim  $XYZ$ , jądro spoczywa w środku tego układu, a  $r$  jest odległością od środka układu do punktu  $(x, y, z)$ .

**Wskazówka:**

$$e^0 = 1$$

**Wskazówka:**

$$\Psi_{210} \propto z$$

**Odpowiedź:**

a)

$$|\Psi_{100}(0,0,0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0,0,0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

## 7 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-19, id: pl-fizyka-kwantowa-0005000, diff: 1*

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną  $x$ . Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot x \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$$

gdzie  $N$  oraz  $L = 20$  nm są stałymi. Zmienna  $x$  przyjmuje wartości od 0 do  $L$ . Wypisz wszystkie wartości  $x$  w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np.  $\sin(\pi/2) = 1$ ,  $\cos(\pi/2) = 0$ .

**Wskazówka:** Prawdopodobieństwo jest najmniejsze w pobliżu miejsc zerowych funkcji falowej.**Wskazówka:**  $\sin(n\pi) = 0$  oraz  $\cos(\pi/2 + n\pi) = 0$  dla  $n$  całkowitego.**Odpowiedź:** Wartości  $x$ , w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: 0,  $L/4$ ,  $3L/4$ , a więc 0 nm, 5 nm, 15 nm.

## 8 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

*Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-04, id: pl-fizyka-kwantowa-0010100, diff: 3*

Cząstka o masie  $m$  jest uwięziona w sześcianie o krawędzi  $L$ . Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.

a) Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.

- b) Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.  
 c) Dla cząstki znajdującej się w stanie opisywanym funkcją falową

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} \sin(kx) \left(1 - 4\sqrt{2} \cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky) \sin(kz)e^{-i3\omega t}$$

gdzie  $k \equiv \frac{\pi}{L}$  oraz  $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$ , wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

- d) Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

*Wskazówka.* Dla dodatnich liczb całkowitych  $p$  i  $r$

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{pr}$$

**Wskazówka:** Spróbuj rozwiązać równanie Schrödingera, zakładając rozwiązanie postaci

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,t) \psi(y,t) \psi(z,t)$$

gdzie

$$\psi(x,t) = \eta(x) e^{-i\omega_x t}$$

**Wskazówka:** Zapisz  $\Psi_s$  jako sumę stanów o określonej energii.

*Albo:* Skorzystaj z tego, że  $\langle \Psi_{n_x n_y n_z} | \Psi_s \rangle$  jest równe współczynnikowi przy  $\Psi_{n_x n_y n_z}$  w rozkładzie  $\Psi_s$  na stany o określonej energii.

**Odpowiedź:** a) Dla dodatnich liczb całkowitych  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t) \psi_{n_y}(y,t) \psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n_x kx) e^{-in_x^2 \omega t}$$

- b) Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

- c) Możliwe mierzone wartości energii dla stanu  $\Psi_s$  to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów  $\Psi_{111}$  oraz  $\Psi_{211}$ .

- d) Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii  $6\hbar\omega$  jest równe  $\frac{8}{9} \approx 0,889$ .