Stan Własny, 26 lutego 2017 r.

# Fizyka kwantowa

Ψ. Falowa

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Próbujemy!

## 1 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-06, id: pl-fizyka-kwantowa-0001000, diff: 1*

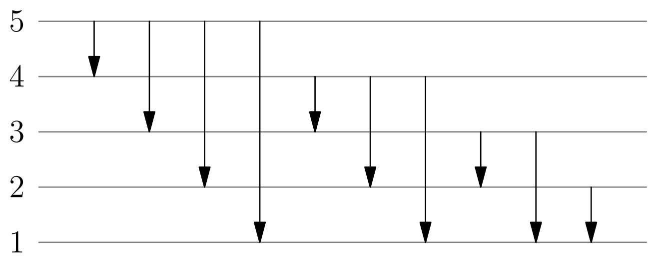
Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej $n$ (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

**Wskazówka:** $n = 1, 2, ...$

**Wskazówka:** $E_\gamma = E_i - E_f = hf$.

**Wskazówka:** $E_n \propto -n^{-2}$.

**Odpowiedź:**
a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):




b) Można zaobserwować 10 linii.
c) Przejście z poziomu 5 na poziom 4.

## 2 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-18, id: pl-fizyka-kwantowa-0002000, diff: 1*

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej $l$ i magnetycznej $m$ określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.

**Wskazówka:** $l = 0, 1, ..., n - 1$.

**Wskazówka:** $m = -l, ..., 0, ..., +l$.

**Odpowiedź:** Możliwe stany to:
$l = 0$ z $m \in \{0\}$
$l = 1$ z $m \in \{-1, 0, 1\}$
$l = 2$ z $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$l = 3$ z $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$l = 4$ z $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

## 3 Zadanie – Liczba fotonów

*Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0003000, diff: 1*

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 760 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 76% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 34 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s.

**Wskazówka:**
$$E_\gamma = hf$$
$E_\gamma$ – energia fotonu; $f$ – częstotliwość światła.

**Wskazówka:**
$$\lambda = c/f$$
$\lambda$ – długość fali.

**Wskazówka:** $E_\gamma = hc/\lambda \approx 2{,}62 \cdot 10^{-19}$ J.

**Wskazówka:**
$$E_i = E_{\mathrm{abs}}/\varepsilon_{\mathrm{eff}}$$
$E_i$ – energia impulsu; $E_{\mathrm{abs}}$ – energia zaabsorbowana przez płytkę; $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ – efektywność pochłaniania energii przez płytkę.

**Odpowiedź:** Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\mathrm{abs}}/(\varepsilon_{\mathrm{eff}} E_\gamma) \approx 1710 \cdot 10^{14}$.

## 4 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

*Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0004000, diff: 1*

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 270 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 2,21 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s $= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

**Wskazówka:**
$$E_\gamma = W + E_k$$
$E_\gamma$ – energia fotonu; $W$ – praca wyjścia; $E_k$ – maksymalna energia kinetyczna elektronu.

**Wskazówka:**

$$E_\gamma = hf$$

$f$ – częstotliwość światła.

**Wskazówka:**

$$\lambda = c/f$$

$\lambda$ – długość fali światła.

**Wskazówka:** $E_\gamma = hc/\lambda \approx 4{,}6$ eV.

**Odpowiedź:** Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 2{,}39$ eV.

## 5 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

*Andrzej Twardowski, Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-30, id: pl-fizyka-kwantowa-0004900, diff: 2*

Oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru w stanach:
a)

$$\Psi_{100}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x,y,z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi} a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm$^{-3}$. Funkcje określone są w układzie kartezjańskim $XYZ$, jądro spoczywa w środku tego układu, a $r$ jest odległością od środka układu do punktu $(x,y,z)$.

**Wskazówka:**

$$e^0 = 1$$

**Wskazówka:**

$$\Psi_{210} \propto z$$

**Odpowiedź:**
a)

$$|\Psi_{100}(0{,}0{,}0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0{,}0{,}0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

## 6 Zadanie – Elektron i najmniejsze prawdopodobieństwo

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-19, id: pl-fizyka-kwantowa-0005000, diff: 1*

Elektron znajduje się w układzie, w którym położenie opisujemy zmienną $x$. Kwantowa funkcja falowa opisująca elektron jest równa

$$\Psi(x) = N \cdot \exp(-x/L) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L} + \frac{\pi}{4}\right)$$

gdzie $N$ oraz $L = 8$ nm są stałymi. Zmienna $x$ przyjmuje wartości od 0 do $\frac{3}{2}L$. Wypisz wszystkie wartości $x$ w tym zakresie, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze. Argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby, np. $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.

**Wskazówka:** Prawdopodobieństwo jest najmniejsze w pobliżu miejsc zerowych funkcji falowej.

**Wskazówka:** $\sin(n\pi) = 0$ oraz $\cos(\pi/2 + n\pi) = 0$ dla $n$ całkowitego.

**Odpowiedź:** Wartości $x$, w pobliżu których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest najmniejsze, to: $3L/8$, $7L/8$, $11L/8$, a więc 3 nm, 7 nm, 11 nm.

## 7 Zadanie – Cząstka w sześcianie - pomiar energii

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-11, id: pl-fizyka-kwantowa-0010100, diff: 3*

Cząstka o masie $m$ jest uwięziona w sześcianie o krawędzi $L$. Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześcianu jest równa 0. Cząstka nie może przebywać poza sześcianem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu.
a) Wyznacz unormowane funkcje falowe opisujące stany o określonej energii cząstki.
b) Zapisz formułę określającą możliwe wartości energii cząstki.
c) Dla cząstki znajdującej się w stanie

$$\Psi_s(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} \sin(kx) \left(1 + 4\sqrt{2}\cos(kx)e^{-i3\omega t}\right) \sin(ky)\sin(kz)e^{-i3\omega t}$$

gdzie $k \equiv \frac{\pi}{L}$ oraz $\omega \equiv \frac{\hbar}{2m}k^2$, wyznacz możliwe mierzone wartości energii.

d) Oblicz prawdopodobieństwo pomiaru największej możliwej wartości energii dla cząstki znajdującej się w stanie opisanym w poprzednim punkcie.

*Wskazówka.* Dla dodatnich liczb całkowitych $p$ i $r$

$$\int_0^L \sin\left(p\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(r\frac{\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{pr}$$

**Wskazówka:** Spróbuj rozwiązać równanie Schrödingera, zakładając rozwiązanie postaci

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,t)\,\psi(y,t)\,\psi(z,t)$$

gdzie

$$\psi(x,t) = \eta(x)\,e^{-i\omega_x t}$$

**Wskazówka:** Zapisz $\Psi_s$ jako sumę stanów o określonej energii.
*Albo:* Skorzystaj z tego, że $\left\langle \Psi_{n_x n_y n_z} \middle| \Psi_s \right\rangle$ jest równe współczynnikowi przy $\Psi_{n_x n_y n_z}$ w rozkładzie $\Psi_s$ na stany o określonej energii.

**Odpowiedź:** a) Dla dodatnich liczb całkowitych $n_x$, $n_y$, $n_z$ unormowane funkcje falowe stanów o określonej energii to

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z,t) = \psi_{n_x}(x,t)\,\psi_{n_y}(y,t)\,\psi_{n_z}(z,t)$$

gdzie

$$\psi_{n_x}(x,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n_x k x) e^{-i n_x^2 \omega t}$$

b) Możliwe wartości energii:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

c) Możliwe mierzone wartości energii dla stanu $\Psi_s$ to

$$E_{111} = 3\hbar\omega \text{ oraz } E_{211} = 6\hbar\omega$$

gdyż stan ten jest superpozycją stanów $\Psi_{111}$ oraz $\Psi_{211}$.
d) Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości energii $6\hbar\omega$ jest równe $\frac{8}{9} \approx 0{,}889$.