Miasto A, 26 lutego 2017 r.

Kinematyka

V. Prędki

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Przyśpieszamy!

1 Zadanie – Startujący samolot

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyśpieszeniem 7,86 m/s^2. Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 8 s?

Odpowiedź: 62,88 m/s

2 Zadanie – W ile sekund do setki?

Samochód, ruszając z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej, osiągnął po pierwszej sekundzie ruchu szybkość 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę przebędzie ten samochód w drugiej sekundzie ruchu, a jaką w piątej? Ile czasu potrzebuje ten samochód, aby rozpędzić się do 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Odpowiedź: W drugiej sekundzie ruchu samochód przejechał około 8,33 m, a w piątej 25 m. Natomiast do setki samochód rozpędzi się w 5 s.

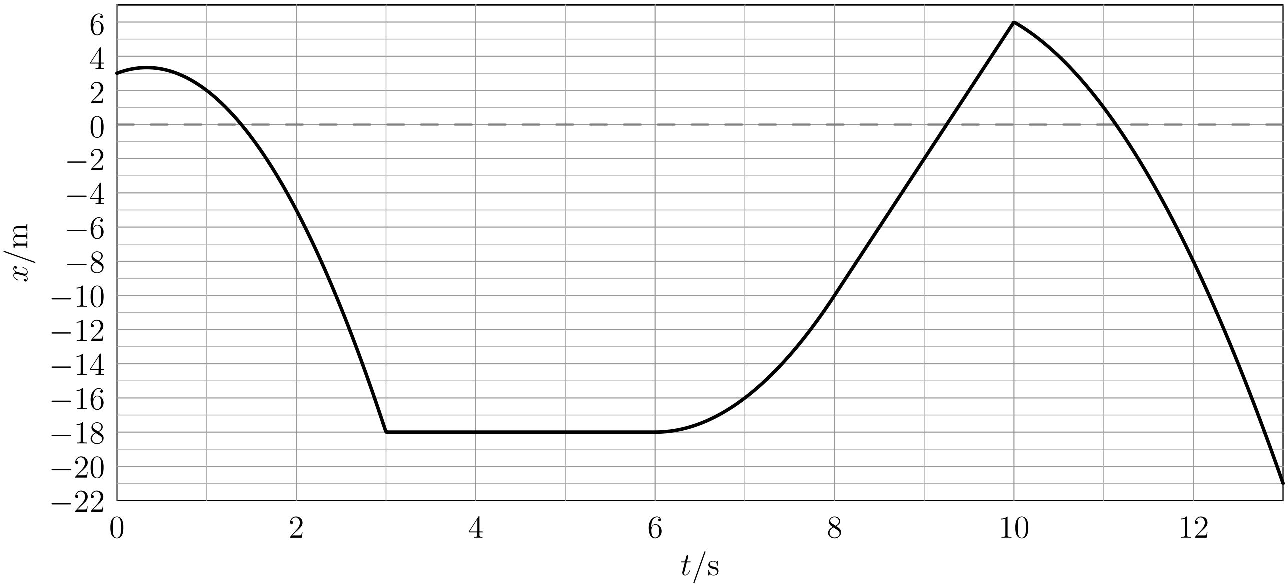
3 Zadanie – Kolumna wojskowa

Piesza kolumna wojskowa o długości 7 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 4 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 5 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 33 km/h.
a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?
b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.
Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

Odpowiedź:
a) Wykonanie zadania zajmie mu $t = l(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_2 + V_1}) + t_1 \approx 30{,}8$ min, gdzie l to długość kolumny wojskowej, V_1 to szybkość kolumny, t_1 to czas przekazywania informacji, a V_2 to szybkość żołnierza na rowerze.
b) W tym czasie pokona on drogę $s = lV_2(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_1 + V_2}) + t_1 V_1 \approx 14{,}5$ km.

4 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

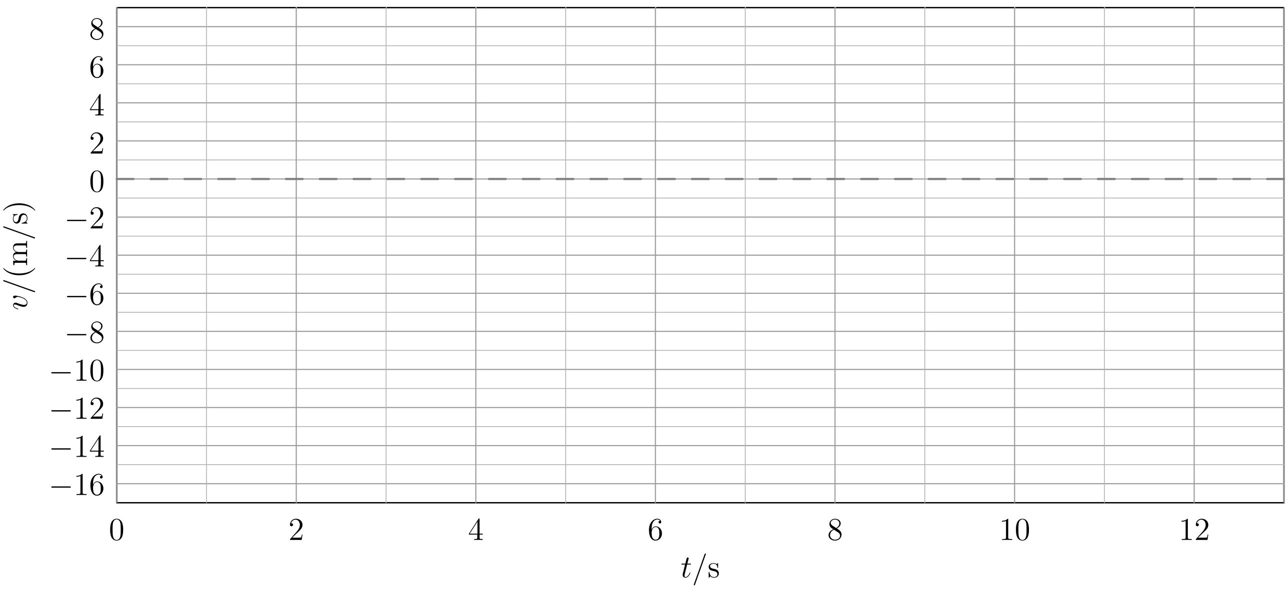
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



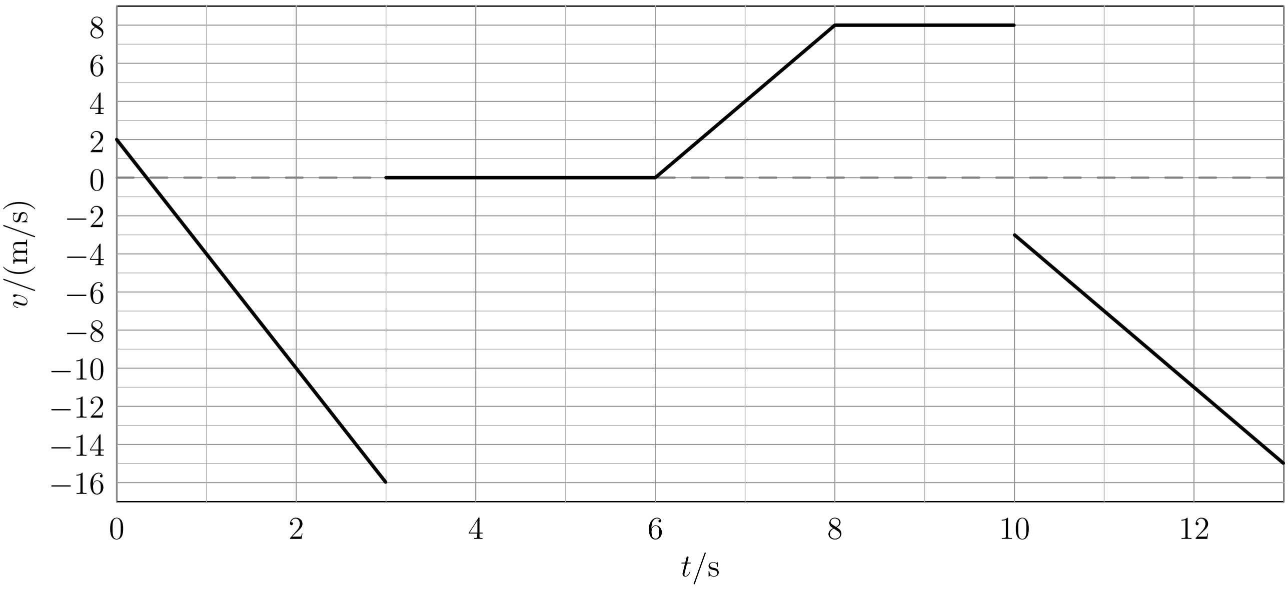
W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,3[$	$]3,6[$	$]6,8[$	$]8,10[$	$]10,13]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	-6	0	4	0	-4

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0,13]$ s.



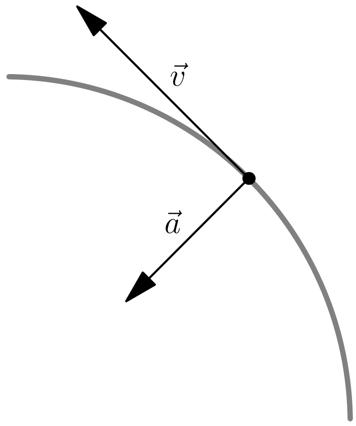
Odpowiedź: Poprawny wykres:



5 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 45 m ze stałą wartością prędkości 81 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

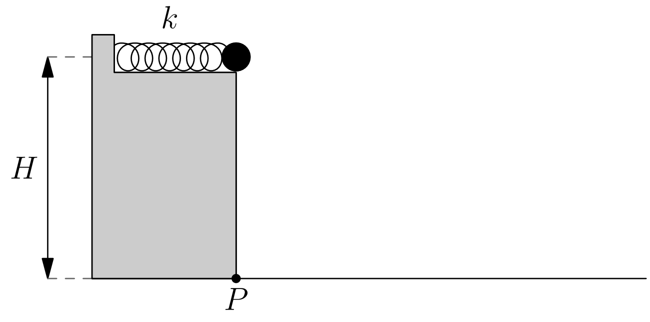
Odpowiedź: a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.



b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 11,3 m/s^2.

6 Zadanie – Rzut poziomy

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 10$ N/m, ściśnięto o 16 cm, naciskając ją kulką o masie równej 160 g. Jaka będzie odległość kulki od punktu P do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości $H = 3{,}4$ m nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominąć. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



Odpowiedź: Zasięg rzutu kulki o masie m wyniesie $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 105$ cm, gdzie x to ściśnięcie sprężyny.

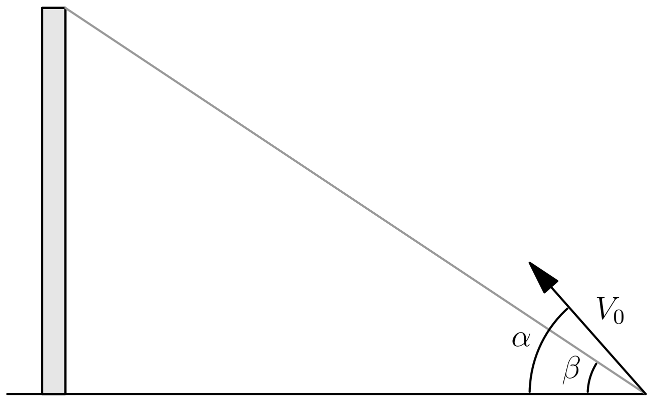
7 Zadanie – Strzelec

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 170 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 960 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Odpowiedź: Pocisk opadł o około 15 cm.

8 Zadanie – Rzut ukośny

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 60°$ do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 12 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem $\beta = 40°$ względem powierzchni ziemi. Jaką wartość prędkości V_0 powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.



Odpowiedź: Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan\alpha - \tan\beta)\cos^2\alpha\tan\beta}} \approx 17{,}7 \text{ m/s},$$

gdzie y to wysokość słupa.

9 Zadanie – Podaj piłkę

Krzysiek został poproszony przez kolegów znajdujących się na boisku, by ten przyniósł im piłkę do gry. Jednak Krzysiek nie miał ochoty wychodzić z mieszkania, w związku z tym wpadł na pomysł, że dorzuci piłkę na boisko ze swojego balkonu. Postanowił rzucić ją w taki sposób, jakby wykonywał rzut z autu na meczu piłki nożnej. Chłopak wyrzucił piłkę stojąc na środku balkonu z wysokości 31,4 m nad ziemią i nadał jej prędkość 12 m/s, wybijając ją pod kątem 30° do poziomu. Boisko zaczyna się w odległości 44 m od rzutu środka balkonu na ziemię. Oblicz, czas lotu piłki, zasięg tego rzutu oraz odpowiedz, czy Krzysiek dorzucił piłkę na boisko. W obliczeniach pomiń opory powietrza i przyjmij, że g = 9,81 m/s^2 oraz, że teren w tej okolicy jest poziomy.

Odpowiedź: Całkowity czas lotu piłki:

$$t_k = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh_0}{v_0^2 \sin^2\alpha}}) \approx 3{,}22 \text{ s},$$

gdzie t_k - całkowity czas lotu, v_0 - prędkość początkowa, $alpha$ - kąt wyrzutu względem osi x, h_0 - wysokość względem początku układu współrzędnych, z której została wyrzucona piłka oraz g - przyspieszenie ziemskie.
Zasięg rzutu:

$$Z = v_0 t_k \cos\alpha \approx 33{,}46 \text{ m}$$

Krzysiek nie dorzuci piłki do boiska.

10 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

Odpowiedź:
I sposób – graniczna wartość v.
Minimalna wartość prędkości v_m spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l-y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l-y) + y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l-y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości v_m, gdyż dla większych wartości prędkości v parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości v_m. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.
II sposób – równanie na y.
Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l-y)$. Z równania okręgu, $A(l-y) + y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l-y)(l+y-A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0, l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A - l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości y dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l, l]$. Stąd $A \in [0, 2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

III sposób – równanie na x.
Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$, istnieje, jeśli $2lB - 1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

11 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 2{,}3$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + B\, t^2$$

gdzie $A = 2{,}6$ m, $\omega = 1{,}7\ \mathrm{s}^{-1}$, $\phi = 2{,}9$ oraz $B = 0{,}9\ \mathrm{m/s^2}$.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\omega \cos(\omega t + \phi) + 2B\, t$$

$$v(t_1) \approx 7{,}96\ \mathrm{m/s}$$

$$a(t) = -A\,\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + 2B$$

$$a(t_1) \approx -1{,}98\ \mathrm{m/s^2}$$

12 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 2D

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ A e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

v_0	A	λ	ω
2 m/s	3 m	0,3 s^{-1}	5 s^{-1}

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 6$ s.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}529 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

13 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
$2\ \mathrm{m/s^2}$	$-5\ \mathrm{m/s}$	$2\ \mathrm{m}$	$-1\ \mathrm{m/s}$	$-16\ \mathrm{m}$	$3\ \mathrm{m/s^3}$	$2\ \mathrm{m/s^2}$	$-2\ \mathrm{m/s}$

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 5$ s.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} 15 \\ -1 \\ 243 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 94 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

14 Zadanie – Jednostki długości

Przelicz kilometry na metry:
61 km to .... m
624 km to .... m

Przelicz metry na centymetry:
2 m to .... cm
2009 m to .... cm

Przelicz milimetry na centymetry:
270 mm to .... cm
5030 mm to .... cm

Odpowiedź:
kilometry na metry:
61000 m
624000 m

metry na centymetry:
200 cm
200900 cm

milimetry na centymetry:
27 cm
503 cm

15 Zadanie – Jednostki czasu

Przelicz minuty na sekundy:
19 min to .... s
90 min to .... s

Przelicz godziny na minuty:
8 godz. to .... min
12 godz. to .... min

Przelicz sekundy na godziny:
18000 s to .... godz.
57600 s to .... godz.

Odpowiedź:
minuty na sekundy:
1140 s
5400 s

godziny na minuty:
480 min
720 min

sekundy na godziny:
5 godz.
16 godz.

16 Zadanie – Prędkość człowieka

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 95550 metrów w ciągu 195 minut?

Odpowiedź: Człowiek porusza się z prędkością 29,4 km/h.

17 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 340 m/s.

Odpowiedź: Minimalna odległości od ściany to około 13,6 m.

18 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 8,3 m/s. Maciek, który wyruszył 10 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 30 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 830 s?

Odpowiedź: Maciek jechał z prędkością 8,7 m/s.

19 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 200 cm/s przez 9 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 220 cm/s przez 2,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 180 cm/s przez 4,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Odpowiedź: Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 220 cm/s.

20 Zadanie – Droga do szkoły

Jaś pokonuje swoją drogę do szkoły ze średnią szybkością 21 km/h. Pierwszą część drogi pokonuje rowerem miejskim, a drugą autobusem. Oba odcinki drogi są sobie równe. Rowerem porusza się ze średnią szybkością 18 km/h. Oblicz średnią szybkość jazdy autobusem. Wynik podaj z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

Odpowiedź: Autobus jedzie ze średnią szybkością ok. 25 km/h.

21 Zadanie – Samochód

Samochód pana Krzysztofa spala 5 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 6 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 3 zł?

Odpowiedź: Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 10 pełnych km.

22 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 14,7 min wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 1323 m od kładki. Przyjmij, że wartość prędkości łodzi względem wody była stała i taka sama, gdy łódź płynęła w górę i gdy płynęła w dół rzeki. Załóż również, że koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h.

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki to 2,7 km/h.

23 Zadanie – Przejażdżka metrem

Uczeń wsiadł do metra na początku pociągu. Postanowił przejść podczas jazdy na jego koniec korytarzem o długości $l = 112$ m. Gdy tam dotarł, pociąg wjechał na kolejną stację. Uczeń szedł ze średnią szybkością $v_p = 4{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ względem pociągu. Pociąg przejechał drogę $s = 1000$ m. Oblicz średnią szybkość, z jaką jechał pociąg względem stacji metra u, oraz średnią szybkość ucznia względem ziemi v_z.

Odpowiedź: Pociąg jechał ze średnią szybkością $41{,}1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, uczeń względem ziemi poruszał się ze średnią szybkością $36{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

24 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 8 mm zakończony jest otworem o średnicy 2 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 10 cm/s?

Odpowiedź: Szybkość wody w otworze to ok. 160 cm/s.

25 Zadanie – Pościg za Dumbledoorem

Pociąg do Hogwartu, w którym jedzie dyrektor Dumbledoor, odjeżdża z peronu $9\frac{3}{4}$ o godzinie 10:00 i dojedzie do celu o 12:45. Ron i Harry zaspali i zdołali wyjechać samochodem dopiero o 11:45. Gdy wjechali na plac przed uczelnią, na prędkościomierzu widniała prędkość 125 km/h. Zakładając, że poruszali się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem równym 120 km/h^2, odpowiedz, czy udało im się zdążyć przed dyrektorem Dumbledoorem.

Odpowiedź: Droga chłopców trwała około 1,04 h, to jest około 62 minuty, czyli przyjechali po profesorze Dumbledorze.

26 Zadanie – Roztargniony Harry

Harry podczas mycia okien niefortunnie wypchnął doniczkę z mandragorą za okno. Spadała ona przez 2 s i tuż przed upadkiem miała prędkość 24 m/s. Załóż, że prędkość początkowa doniczki była równa zero.
a) Czy doniczka spadała swobodnie?
b) Harry w magiczny sposób próbował uchronić mandragorę przed upadkiem. Czy spowolnił upadek mandragory, czy go przyspieszył?

Odpowiedź:
a) Doniczka z mandragorą poruszała się z przyspieszeniem równym 12 m/s^2, czyli nie spadała swobodnie z przyspieszeniem ziemskim równym w przybliżeniu 10 m/s^2.
b) Harry rzucił zaklęcie, które sprawiło, że przyspieszenie doniczki wzrosło, ponieważ Harry pomylił zaklęcia i niestety przyspieszył ten upadek.

27 Zadanie – Spotkanie

Ron i Harry wyjechali jednocześnie sobie na spotkanie swoimi rowerami z punktów oddalonych od siebie o 12 km. Ron jechał z prędkością 20 km/h, a Harry 20 km/h. Zakładając, że poruszali się ruchem jednostajnym prostoliniowym, oblicz, po jakim czasie się spotkają. Wynik wyraź w minutach.

Odpowiedź: Chłopcy spotkali się po około 18 minutach.

28 Zadanie – Uniknąć mandatu

Harry i Ron jadą autem Pana Weasleya. Wjechali na autostradę dla mugoli, na której ustawione są bramki pomiaru prędkości na odcinku 90 km. Przez połowę drogi poruszali się z prędkością 110 km/h. Wtedy też zorientowali się, że jadą zbyt szybko. Jeśli ich średnia prędkość na tym odcinku przekroczy 90 km/h, dostaną mandat. Zaczęli więc poruszać się ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem o wartości 63 km/h^2. Wyjeżdżali przez końcową bramkę z prędkością 80 km/h. Czy Ron i Harry unikną mandatu?

Odpowiedź: Średnia prędkość samochodu, którym jadą Harry i Ron, wynosi około 102 km/h, czyli chłopcy dostaną mandat.