

## Kinematyka

### V. Prędkości

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Przyspieszamy!

#### 1 Zadanie – Startujący samolot

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyspieszeniem  $7,58 \text{ m/s}^2$ . Jaką prędkość osiągnie po czasie równym  $6 \text{ s}$ ?

**Odpowiedź:**  $45,48 \text{ m/s}$

#### 2 Zadanie – W ile sekund do setki?

Samochód, ruszając z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej, osiągnął po pierwszej sekundzie ruchu szybkość  $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Jaką drogę przebędzie ten samochód w drugiej sekundzie ruchu, a jaką w piątej? Ile czasu potrzebuje ten samochód, aby rozpędzić się do  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ?

**Odpowiedź:** W drugiej sekundzie ruchu samochód przejechał około  $6,25 \text{ m}$ , a w piątej  $18,8 \text{ m}$ . Natomiast do setki samochód rozpędzi się w  $6,67 \text{ s}$ .

#### 3 Zadanie – Kolumna wojskowa

Piesza kolumna wojskowa o długości  $8 \text{ km}$  porusza się cały czas ze stałą szybkością  $6 \text{ km/h}$ . Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu  $4 \text{ min}$ . Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła  $30 \text{ km/h}$ .

a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?

b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.

Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

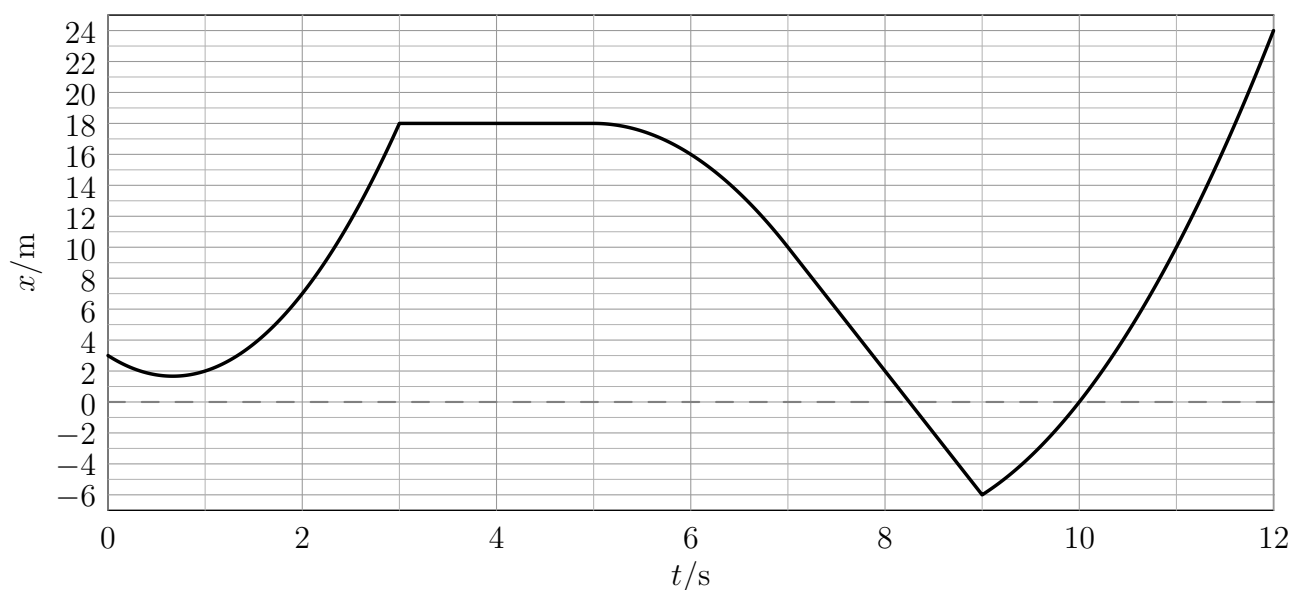
**Odpowiedź:**

a) Wykonanie zadania zajmie mu  $t = l(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_2 + V_1}) + t_1 \approx 37,3 \text{ min}$ , gdzie  $l$  to długość kolumny wojskowej,  $V_1$  to szybkość kolumny,  $t_1$  to czas przekazywania informacji, a  $V_2$  to szybkość żołnierza na rowerze.

b) W tym czasie pokona on drogę  $s = lV_2(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_2 + V_1}) + t_1V_1 \approx 17,1 \text{ km}$ .

#### 4 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

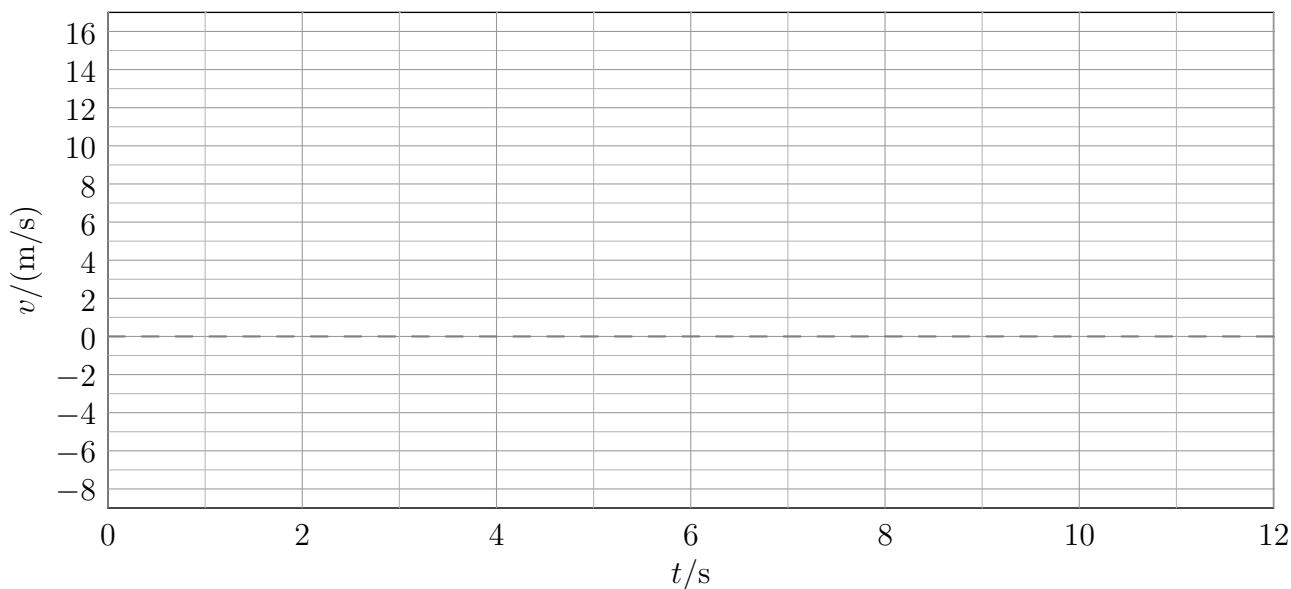
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi  $X$ . Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia  $x$  od czasu  $t$ .



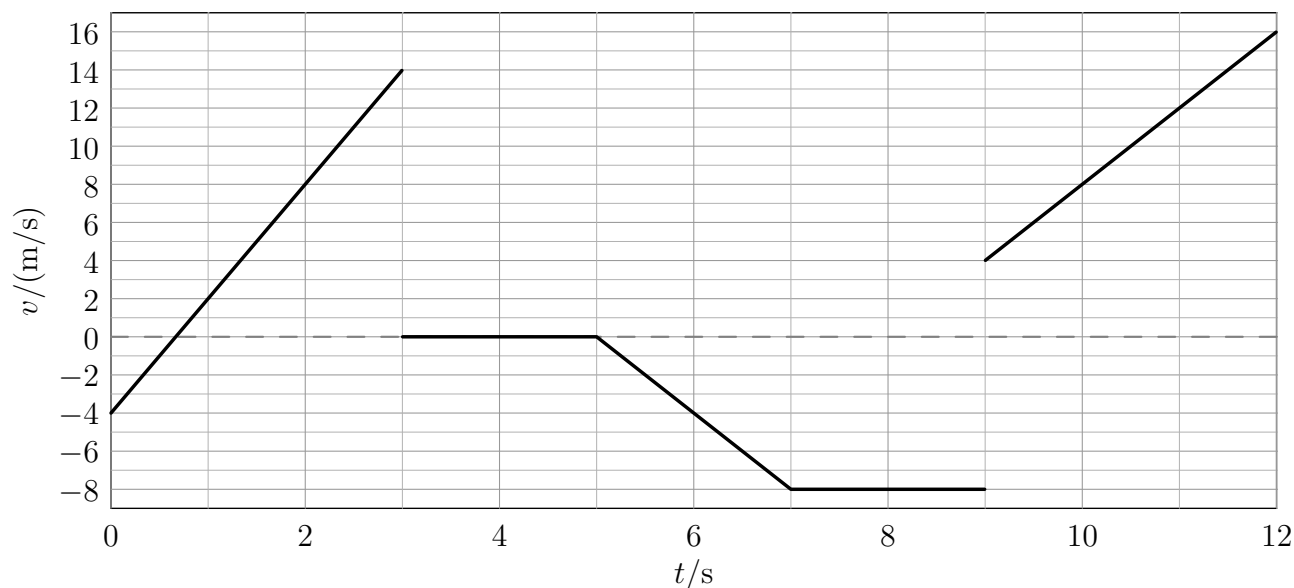
W tabeli podano przyspieszenie  $a$  punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

$t/s$	$[0, 3[$	$]3, 5[$	$]5, 7[$	$]7, 9[$	$]9, 12]$
$a/(m/s^2)$	6	0	-4	0	4

Wykonaj wykres zależności prędkości  $v$  od czasu dla tego punktu materialnego dla  $t \in [0, 12]$  s.



**Odpowiedź:** Poprawny wykres:



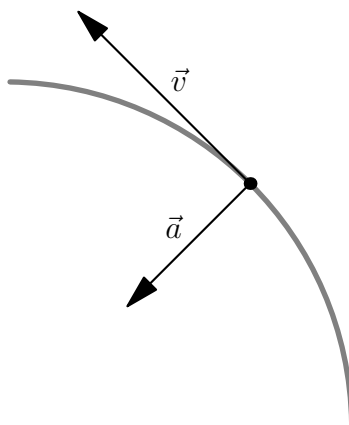
## 5 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 45 m ze stałą wartością prędkości 48,6 km/h.

a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyspieszenia, opisz elementy rysunku.

b) Oblicz wartość przyspieszenia samochodu w  $\text{m/s}^2$ .

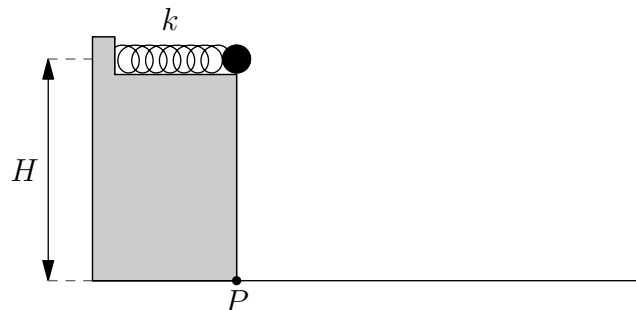
**Odpowiedź:** a) Wektor prędkości  $\vec{v}$  jest styczny do toru, a wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.



b) Wartość przyspieszenia dośrodkowego to ok.  $4,05 \text{ m/s}^2$ .

## 6 Zadanie – Rzut poziomy

Sprężynę o współczynniku sprężystości  $k = 5 \text{ N/m}$ , ściśnięto o  $10 \text{ cm}$ , naciskając ją kulką o masie równej  $150 \text{ g}$ . Jaka będzie odległość kulki od punktu  $P$  do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości  $H = 2,8 \text{ m}$  nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominać. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



**Odpowiedź:** Zasięg rzutu kulki o masie  $m$  wyniesie  $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 43,6 \text{ cm}$ , gdzie  $x$  to ściśnięcie sprężyny.

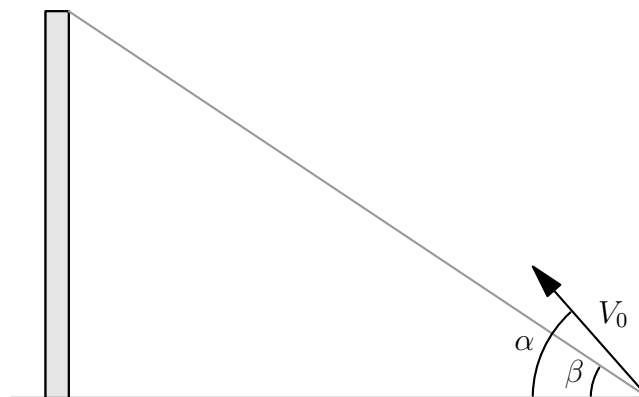
## 7 Zadanie – Strzelec

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o  $290 \text{ m}$ . Pocisk opuścił lufę z szybkością  $985 \text{ m/s}$ . Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyspieszenia ziemskiego  $9,8 \text{ m/s}^2$ , oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraż w centymetrach.

**Odpowiedź:** Pocisk opadł o około  $43 \text{ cm}$ .

## 8 Zadanie – Rzut ukośny

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem  $\alpha = 65^\circ$  do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej  $14 \text{ m}$ , a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem  $\beta = 45^\circ$  względem powierzchni ziemi. Jaka wartość prędkości  $V_0$  powinien nadać piłce? Opory powietrza pominać.



**Odpowiedź:** Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan \alpha - \tan \beta) \cos^2 \alpha \tan \beta}} \approx 18,3 \text{ m/s},$$

gdzie  $y$  to wysokość słupa.

## 9 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

### Odpowiedź:

#### I sposób – graniczna wartość $v$ .

Minimalna wartość prędkości  $v_m$  spełnia równanie  $v_m^2 = gl$ . Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci  $x^2 = 2l(l - y)$ . Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie  $2l(l - y) + y^2 = l^2$ , a ono sprowadza się do  $(l - y)^2 = 0$ , a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek  $y_{1,2} = l$ . Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie  $(0, l)$ , ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzeć ruch z minimalną wartością prędkości  $v_m$ , gdyż dla większych wartości prędkości  $v$  parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości  $v_m$ . Sprawdzenie:  $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$  prowadzi do warunku  $v \geq v_m$ .

#### II sposób – równanie na $y$ .

Oznaczenie:  $A \equiv \frac{2v^2}{g}$ . Z równania paraboli otrzymujemy  $x^2 = A(l - y)$ . Z równania okręgu,  $A(l - y) + y^2 = l^2$ , otrzymujemy  $(l - y)(l + y - A) = 0$ . Równanie to ma pierwiastek  $y_1 = l$ , czyli punkt  $(0, l)$  jest wspólny dla paraboli i okręgu. Drugi pierwiastek,  $y_2 = A - l$ , powinien też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości  $y$  dla punktów okręgu, czyli  $y \in [-l, l]$ . Stąd  $A \in [0, 2l]$ , a więc  $v^2 \leq gl$ . Wymagamy jednak  $v^2 \geq gl$ . W przypadku równości otrzymujemy  $y_2 = y_1 = l$ . W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

#### III sposób – równanie na $x$ .

Oznaczenie:  $B \equiv \frac{g}{2v^2}$ . Równanie paraboli:  $y = l - Bx^2$ . Z równania okręgu,  $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$ , otrzymujemy  $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$ . Równanie to ma podwójny pierwiastek  $x_{1,2} = 0$ , czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie  $(0, l)$ . Drugi pierwiastek,  $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$ , istnieje, jeśli  $2lB - 1 \geq 0$ , czyli gdy  $v^2 \leq gl$ . Wymagamy jednak  $v^2 \geq gl$ . W przypadku równości otrzymujemy  $x_{3,4} = 0$  (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

## 10 Zadanie – Prędkość i przyspieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyspieszenie punktu materialnego w chwili  $t_1 = 1$  s, którego położenie na osi  $X$  jest opisane równaniem

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + B t^2$$

gdzie  $A = 1,1$  m,  $\omega = 1,1$  s<sup>-1</sup>,  $\phi = 2,3$  oraz  $B = 1,6$  m/s<sup>2</sup>.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyspieszenie:

$$v(t) = A \omega \cos(\omega t + \phi) + 2B t$$

$$v(t_1) \approx 2,03 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi) + 2B$$

$$a(t_1) \approx 3,54 \text{ m/s}^2$$

## 11 Zadanie – Prędkość i przyspieszenie punktu materialnego 2D

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie  $t$  oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

$v_0$	$A$	$\lambda$	$\omega$
3 m/s	2 m	0,3 s <sup>-1</sup>	5 s <sup>-1</sup>

Oblicz prędkość i przyspieszenie tego punktu materialnego w chwili  $t_1 = 5$  s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyspieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 3 \\ 2,23 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0,144 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

## 12 Zadanie – Prędkość i przyspieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie  $t$  oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

$f_x$	$g_x$	$h_x$	$g_y$	$h_y$	$e_z$	$f_z$	$g_z$
-1 m/s <sup>2</sup>	-1 m/s	11 m	1 m/s	-14 m	-1 m/s <sup>3</sup>	3 m/s <sup>2</sup>	-2 m/s

Oblicz prędkość i przyspieszenie tego punktu materialnego w chwili  $t_1 = 3$  s.

**Odpowiedź:** Prędkość i przyspieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### 13 Zadanie – Jednostki długości

Przelicz kilometry na metry:

22 km to ..... m

982 km to ..... m

Przelicz metry na centymetry:

15 m to ..... cm

2009 m to ..... cm

Przelicz milimetry na centymetry:

180 mm to ..... cm

2005 mm to ..... cm

#### Odpowiedź:

kilometry na metry:

22000 m

982000 m

metry na centymetry:

1500 cm

200900 cm

milimetry na centymetry:

18 cm

200,5 cm

### 14 Zadanie – Jednostki czasu

Przelicz minuty na sekundy:

41 min. to ..... s

131 min. to ..... s

Przelicz godziny na minuty:

9 godz. to ..... min.

14 godz. to ..... min.

Przelicz sekundy na godziny:

7200 s to ..... godz.

79200 s to ..... godz.

#### Odpowiedź:

minuty na sekundy:

2460 s

7860 s

godziny na minuty:

540 min.

840 min.

sekundy na godziny:

2 godz.

22 godz.

## 15 Zadanie – Prędkość człowieka

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 41850 metrów w ciągu 135 minut?

**Odpowiedź:** Człowiek porusza się z prędkością 18,6 km/h.

## 16 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 343 m/s.

**Odpowiedź:** Minimalna odległości od ściany to około 13,7 m.

## 17 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 3,9 m/s. Maciek, który wyruszył 8 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 16 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 312 s?

**Odpowiedź:** Maciek jechał z prędkością 4,2 m/s.

## 18 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 190 cm/s przez 14 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 230 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 170 cm/s przez 6,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

**Odpowiedź:** Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 188 cm/s.

## 19 Zadanie – Droga do szkoły

Jaś pokonuje swoją drogę do szkoły ze średnią szybkością 27 km/h. Pierwszą część drogi pokonuje rowerem miejskim, a drugą autobusem. Oba odcinki drogi są sobie równe. Rowerem porusza się ze średnią szybkością 20 km/h. Oblicz średnią szybkość jazdy autobusem. Wynik podaj z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

**Odpowiedź:** Autobus jedzie ze średnią szybkością ok. 42 km/h.

## 20 Zadanie – Samochód

Samochód pana Krzysztofa spala 7 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 8 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 4 zł?



**Odpowiedź:** Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 7 pełnych km.

## 21 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 11,4 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 1862 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

**Odpowiedź:** Prędkość prądu rzeki to 4,9 km/h.

## 22 Zadanie – Przejażdżka metrem

Uczeń wsiadł do metra na początku pociągu. Postanowił przejść podczas jazdy na jego koniec korytarzem o długości  $l = 110$  m. Gdy tam dotarł, pociąg wjechał na kolejną stację. Uczeń szedł ze średnią szybkością  $v_p = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  względem pociągu. Pociąg przejechał drogę  $s = 1300$  m. Oblicz średnią szybkość, z jaką jechał pociąg względem stacji metra  $u$ , oraz średnią szybkość ucznia względem ziemi  $v_z$ .

**Odpowiedź:** Pociąg jechał ze średnią szybkością  $47,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , uczeń względem ziemi poruszał się ze średnią szybkością  $43,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

## 23 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrznej średnicy 9 mm zakończony jest otworem o średnicy 2 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w węży porusza się ona z szybkością 60 cm/s?

**Odpowiedź:** Szybkość wody w otworze to ok. 1220 cm/s.