Miasto A, 26 lutego 2017 r.

Kinematyka

V. Prędki

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Przyśpieszamy!

1 Zadanie – Startujący samolot

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyśpieszeniem 5,52 m/s^2. Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 8 s?

Odpowiedź: 44,16 m/s

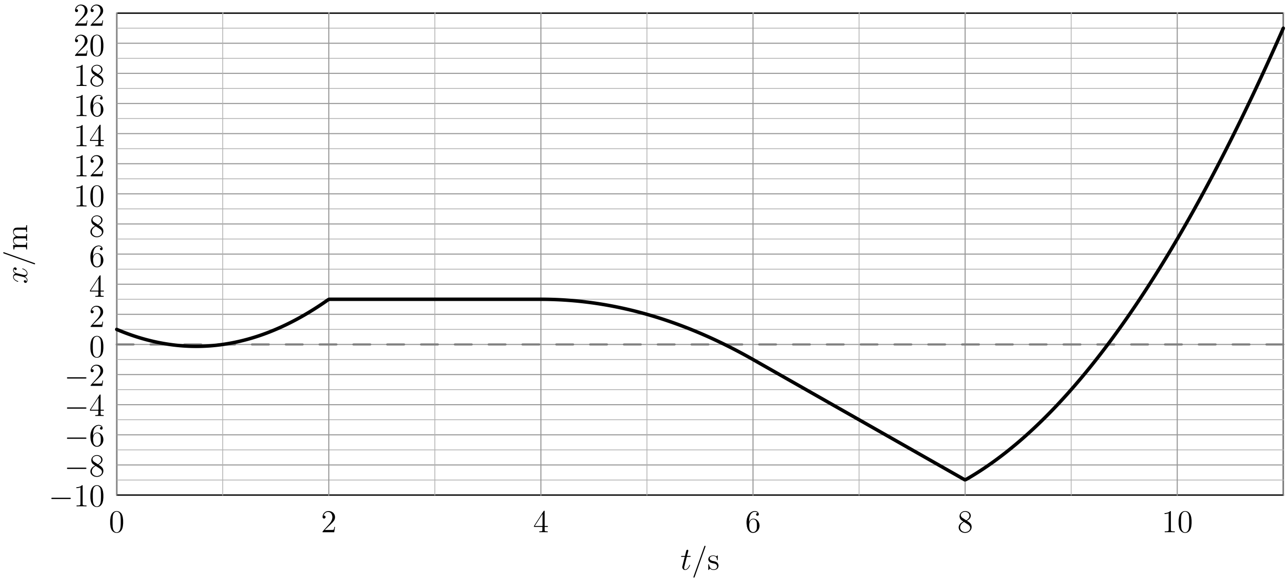
2 Zadanie – Kolumna wojskowa

Piesza kolumna wojskowa o długości 6 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 5 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 5 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 35 km/h.
a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?
b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.
Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

Odpowiedź:
a) Wykonanie zadania zajmie mu $t = l(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_2 + V_1}) + t_1 \approx 26$ min, gdzie l to długość kolumny wojskowej, V_1 to szybkość kolumny, t_1 to czas przekazywania informacji, a V_2 to szybkość żołnierza na rowerze.
b) W tym czasie pokona on drogę $s = lV_2(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_1 + V_2}) + t_1 V_1 \approx 12{,}7$ km.

3 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

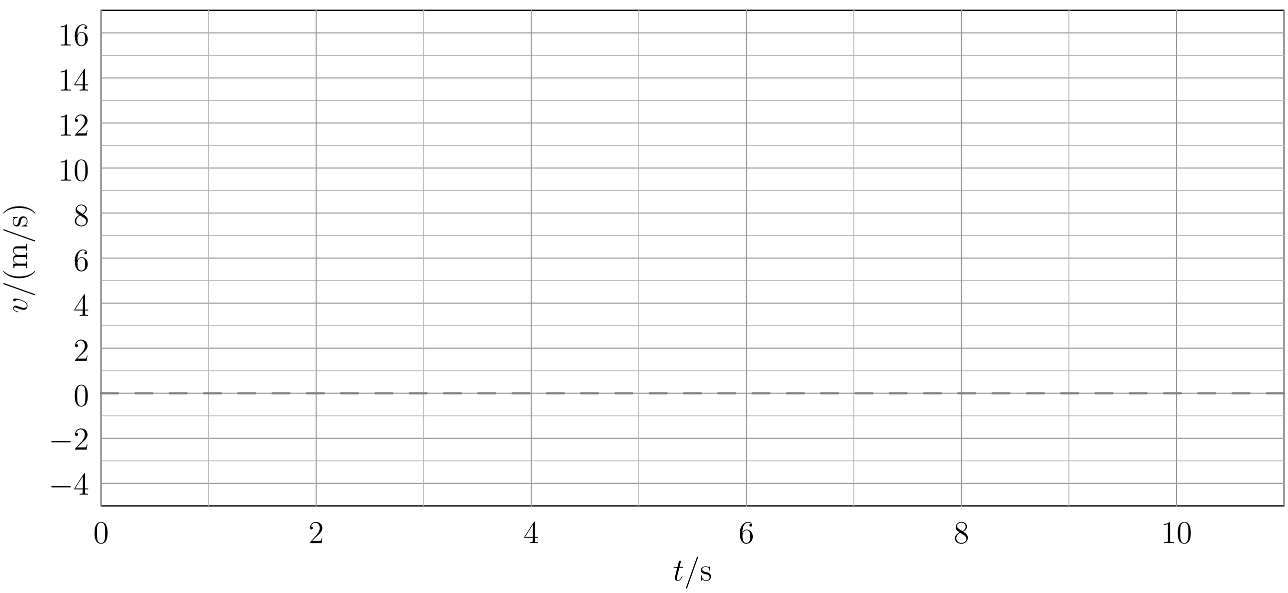
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



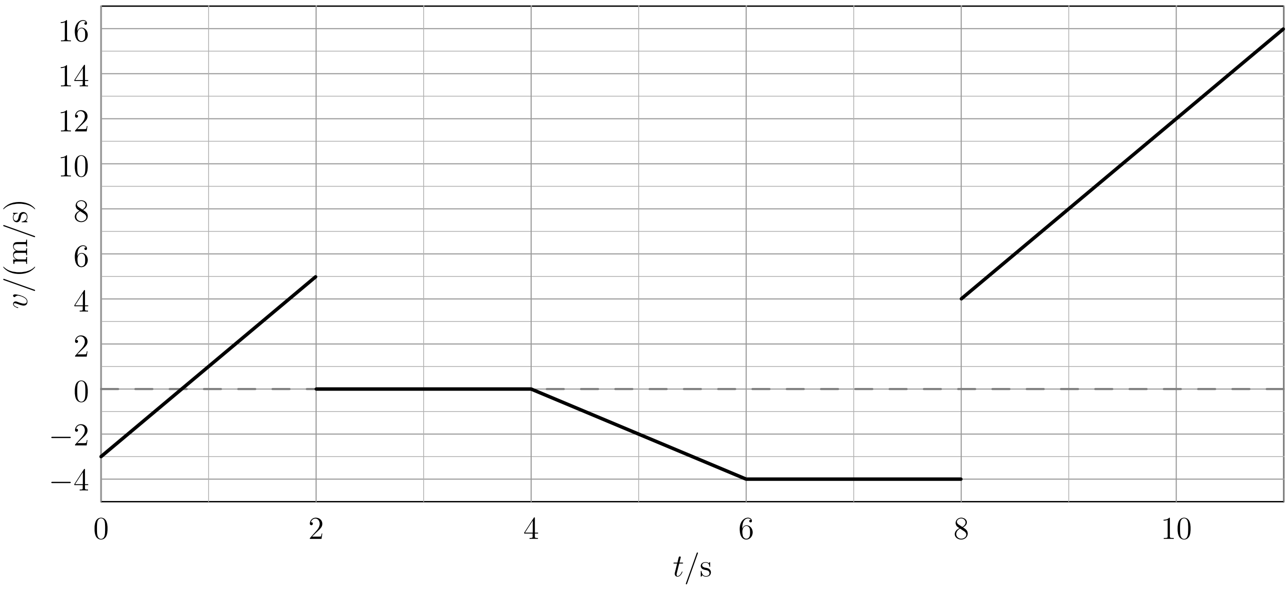
W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,2[$	$]2,4[$	$]4,6[$	$]6,8[$	$]8,11]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	4	0	−2	0	4

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0, 11]$ s.



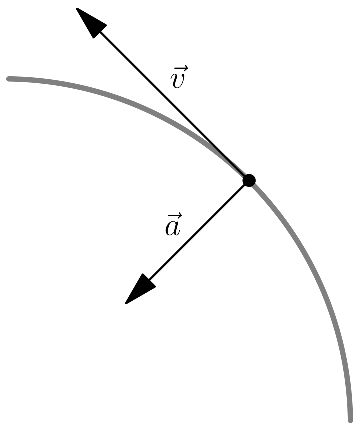
Odpowiedź: Poprawny wykres:



4 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 65 m ze stałą wartością prędkości 93,6 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

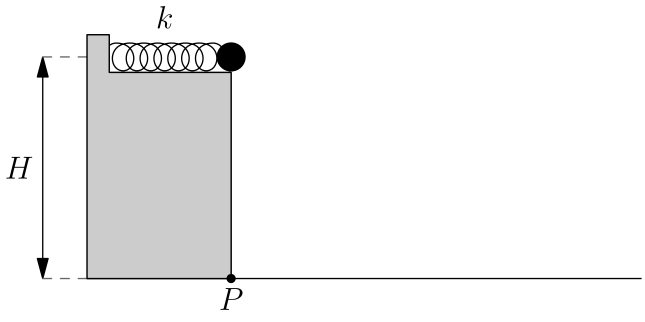
Odpowiedź: a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.



b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 10,4 m/s^2.

5 Zadanie – Rzut poziomy

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 15$ N/m, ściśnięto o 9 cm, naciskając ją kulką o masie równej 100 g. Jaka będzie odległość kulki od punktu P do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości $H = 3{,}1$ m nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominąć. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



Odpowiedź: Zasięg rzutu kulki o masie m wyniesie $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 87{,}7$ cm, gdzie x to ściśnięcie sprężyny.

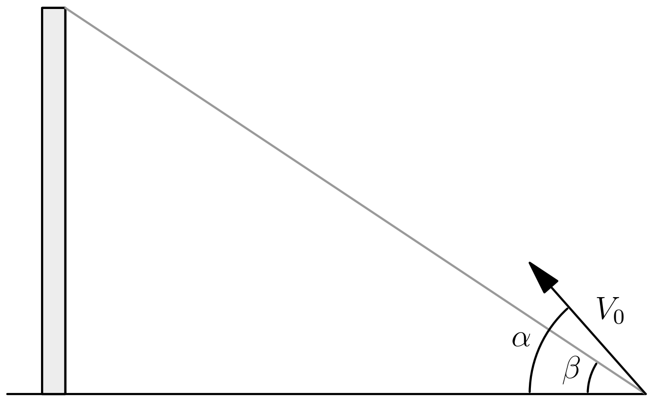
6 Zadanie – Strzelec

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 240 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 945 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Odpowiedź: Pocisk opadł o około 32 cm.

7 Zadanie – Rzut ukośny

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 55°$ do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 12 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem $\beta = 35°$ względem powierzchni ziemi. Jaką wartość prędkości V_0 powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.



Odpowiedź: Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan\alpha - \tan\beta)\cos^2\alpha\tan\beta}} \approx 18{,}7 \text{ m/s},$$

gdzie y to wysokość słupa.

8 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pominiń opory ruchu.

Odpowiedź:
I sposób – graniczna wartość v.
Minimalna wartość prędkości v_m spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l-y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l-y)+y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l-y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0,l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości v_m, gdyż dla większych wartości prędkości v parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości v_m. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.
II sposób – równanie na y.
Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l-y)$. Z równania okręgu, $A(l-y)+y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l-y)(l+y-A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0,l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A-l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości y dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l,l]$. Stąd $A \in [0,2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.
III sposób – równanie na x.
Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l-Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1-2lB+B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0,l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB-1}/B$, istnieje, jeśli $2lB-1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

9 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 1{,}7$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + B\,t^2$$

gdzie $A = 2{,}4$ m, $\omega = 1{,}9$ s^{-1}, $\phi = 2{,}1$ oraz $B = 1{,}9$ m/s^2.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\omega\cos(\omega t + \phi) + 2B\,t$$
$$v(t_1) \approx 9{,}1 \text{ m/s}$$
$$a(t) = -A\,\omega^2\sin(\omega t + \phi) + 2B$$
$$a(t_1) \approx 10{,}9 \text{ m/s}^2$$

10 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 2D

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

v_0	A	λ	ω
2 m/s	2 m	0,2 s^{-1}	5 s^{-1}

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 4$ s.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}67 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -21{,}2 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

11 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
1 m/s^2	−5 m/s	16 m	3 m/s	−6 m	2 m/s^3	2 m/s^2	−3 m/s

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 3$ s.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 63 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

12 Zadanie – Jednostki długości

Przelicz kilometry na metry:
82 km to .... m
344 km to .... m

Przelicz metry na centymetry:
10 m to .... cm
1002 m to .... cm

Przelicz milimetry na centymetry:
250 mm to .... cm
3002 mm to .... cm

Odpowiedź:
kilometry na metry:
82000 m
344000 m

metry na centymetry:
1000 cm
100200 cm

milimetry na centymetry:
25 cm
300,2 cm

13 Zadanie – Jednostki czasu

Przelicz minuty na sekundy:
24 min. to .... s
141 min. to .... s

Przelicz godziny na minuty:
8 godz. to .... min.
14 godz. to .... min.

Przelicz sekundy na godziny:
10800 s to .... godz.
86400 s to .... godz.

Odpowiedź:
minuty na sekundy:
1440 s
8460 s

godziny na minuty:
480 min.
840 min.

sekundy na godziny:
3 godz.
24 godz.

14 Zadanie – Prędkość człowieka

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 87750 metrów w ciągu 195 minut?

Odpowiedź: Człowiek porusza się z prędkością 27 km/h.

15 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 70 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 342 m/s.

Odpowiedź: Minimalna odległości od ściany to około 12 m.

16 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 4,1 m/s. Maciek, który wyruszył 5 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 5 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 205 s?

Odpowiedź: Maciek jechał z prędkością 4,3 m/s.

17 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 190 cm/s przez 12 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 220 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 180 cm/s przez 4,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Odpowiedź: Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 175 cm/s.

18 Zadanie – Samochód

Samochód pana Krzysztofa spala 5 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 4 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 2 zł?

Odpowiedź: Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 10 pełnych km.

19 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 15 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 2350 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki to 4,7 km/h.

20 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 8 mm zakończony jest otworem o średnicy 2 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 70 cm/s?

Odpowiedź: Szybkość wody w otworze to ok. 1120 cm/s.

