Miasto A, 26 lutego 2017 r.

Kinematyka

V. Prędki

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na oddzielnej, podpisanej kartce z wyraźnie zaznaczonym numerem zadania. Przyśpieszamy!

1 Zadanie – Startujący samolot

Piotr Nieżurawski, update: 2016-07-09, id: pl-kinematyka-0000500-dpc, diff: 1

Samolot, stojący początkowo na lotnisku, ruszył wzdłuż pasa startowego ze stałym przyśpieszeniem 7,58 m/s^2. Jaką prędkość osiągnie po czasie równym 6 s?

Wskazówka: $v = at$

Odpowiedź: 45,48 m/s

2 Zadanie – W ile sekund do setki?

Zofia Drabek, update: 2018-05-23, id: pl-kinematyka-0000550, diff: 2

Samochód, ruszając z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej, osiągnął po pierwszej sekundzie ruchu szybkość 15 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Jaką drogę przebędzie ten samochód w drugiej sekundzie ruchu, a jaką w piątej? Ile czasu potrzebuje ten samochód, aby rozpędzić się do 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?

Wskazówka: Zastanów się, jaką drogę przebędzie ten samochód w pierwszej sekundzie ruchu.

Wskazówka: Drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej obliczamy ze wzoru:

$$s = \frac{at^2}{2},$$

gdzie a jest przyspieszeniem, a t czasem. Przyspieszenie obliczymy z zależności:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Wskazówka: Zauważ, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym długości przebytej drogi w kolejnych równych odstępach czasu są do siebie w stosunku takim jak kolejne liczby nieparzyste. W takim razie prawdziwe są zależności:

$$s_2 = 3 \cdot s_1, \qquad s_5 = 9 \cdot s_1,$$

gdzie s_1, s_2 i s_5 oznaczają odpowiednio drogę przebytą w 1, 2 i 5 sekundzie ruchu.

Wskazówka: Aby obliczyć, jak szybko samochód osiągnie 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, należy przekształcić wzór na szybkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$v = at, \qquad t = \frac{v}{a}.$$

Należy przyjąć $v = 100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Odpowiedź: W drugiej sekundzie ruchu samochód przejechał około 6,25 m, a w piątej 18,8 m. Natomiast do setki samochód rozpędzi się w 6,67 s.

3 Zadanie – Kolumna wojskowa

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-kinematyka-0000600, diff: 1

Piesza kolumna wojskowa o długości 8 km porusza się cały czas ze stałą szybkością 6 km/h. Z tyłu kolumny został wysłany żołnierz na rowerze, aby przekazać ważną informację dowódcy, który znajduje się na czele kolumny. Jego zadanie polegało na tym, aby dojechać do dowódcy, przekazać mu meldunek i wrócić na swoją początkową pozycję. Sama rozmowa z dowódcą zajęła mu 4 min. Podczas przekazywania informacji rowerzysta porusza się z prędkością kolumny wojskowej. Poza czasem składania meldunku średnia szybkość jadącego żołnierza wynosiła 30 km/h.
a) Ile czasu zajmie mu wykonanie zadania?
b) Oblicz drogę, jaką pokona podczas wykonywania zadania.
Pomiń moment zawracania rowerzysty po przekazaniu meldunku.

Wskazówka: Jaka jest wartość prędkości żołnierza jadącego na rowerze, względem kolumny wojskowej, gdy jedzie do dowódcy, a jaka gdy wraca?

Wskazówka: Podczas gdy rowerzysta jedzie do dowódcy, wartość jego prędkości względnej to różnica szybkości żołnierza i kolumny wojskowej, a gdy wraca od dowódcy, wartość jego prędkości względnej to suma tych szybkości.

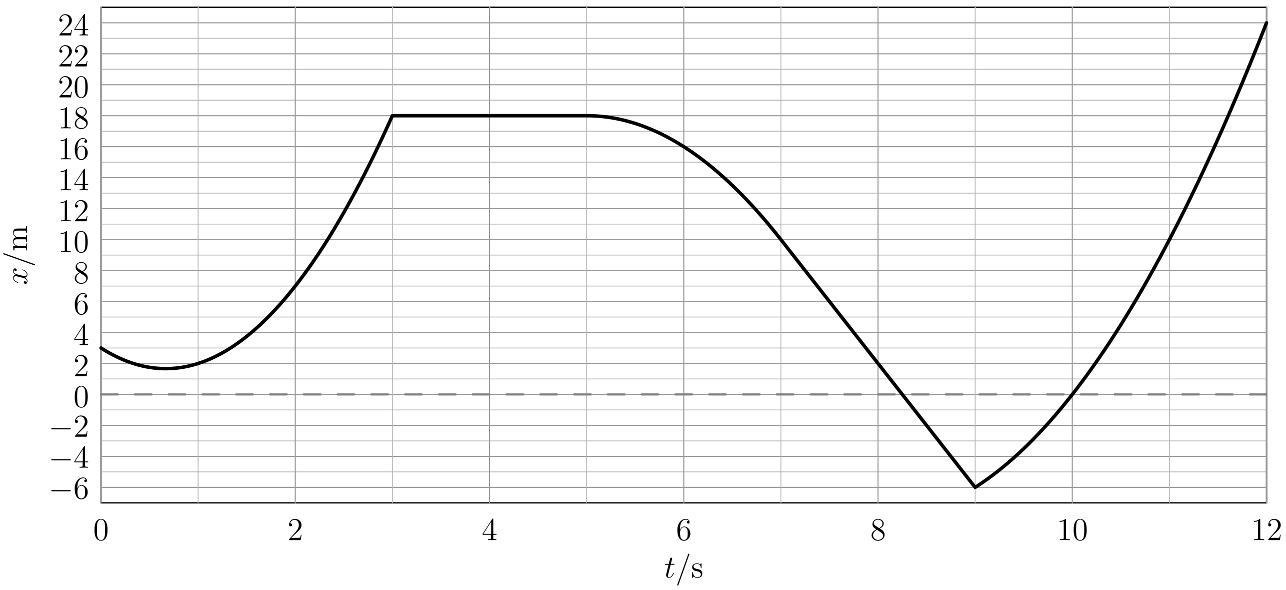
Wskazówka: Jaka jest zależność czasu od drogi w ruchu jednostajnym?

Odpowiedź:
a) Wykonanie zadania zajmie mu $t = l(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_2 + V_1}) + t_1 \approx 37{,}3$ min, gdzie l to długość kolumny wojskowej, V_1 to szybkość kolumny, t_1 to czas przekazywania informacji, a V_2 to szybkość żołnierza na rowerze.
b) W tym czasie pokona on drogę $s = lV_2(\frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{1}{V_1 + V_2}) + t_1 V_1 \approx 17{,}1$ km.

4 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-21, id: pl-kinematyka-0001000, diff: 2

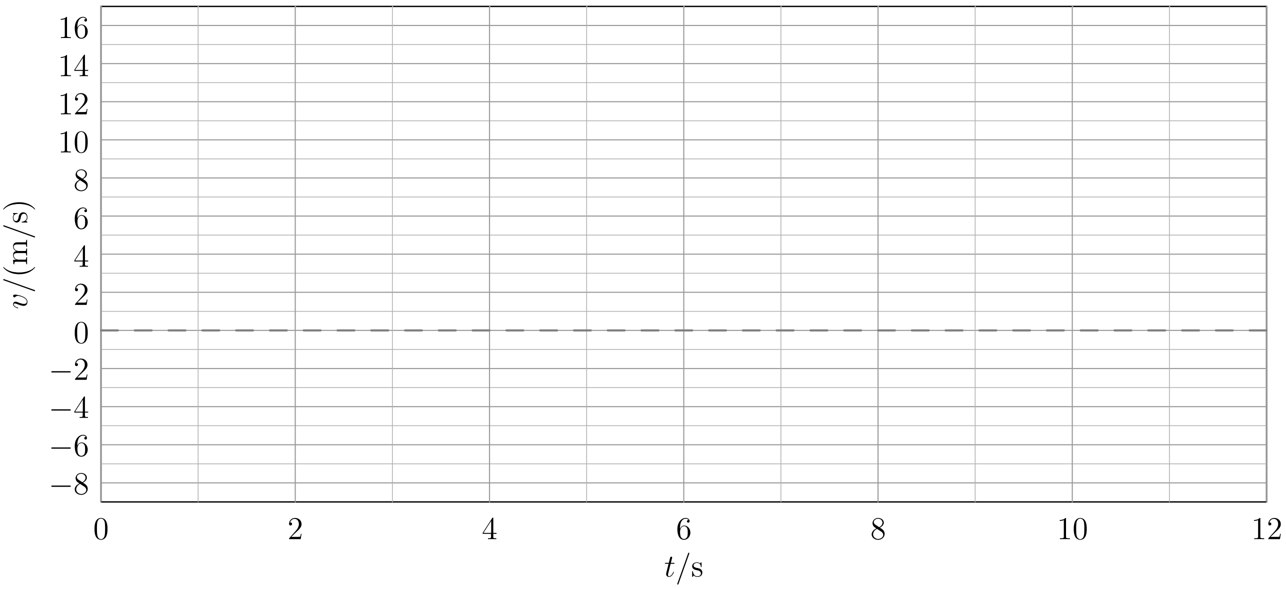
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,3[$	$]3,5[$	$]5,7[$	$]7,9[$	$]9,12]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	6	0	−4	0	4

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0,12]$ s.



Wskazówka: Jeśli v jest dodatnie, to punkt materialny porusza się zgodnie ze zwrotem osi X, a jeśli v jest ujemne, to punkt materialny porusza się w przeciwną stronę.

Wskazówka:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Wskazówka: Wygodniej będzie posłużyć się zmianami wielkości. Po danym interwale czasowym Δt mamy:

$$\Delta x = v_0 \, \Delta t + \frac{1}{2} a \, \Delta t^2,$$

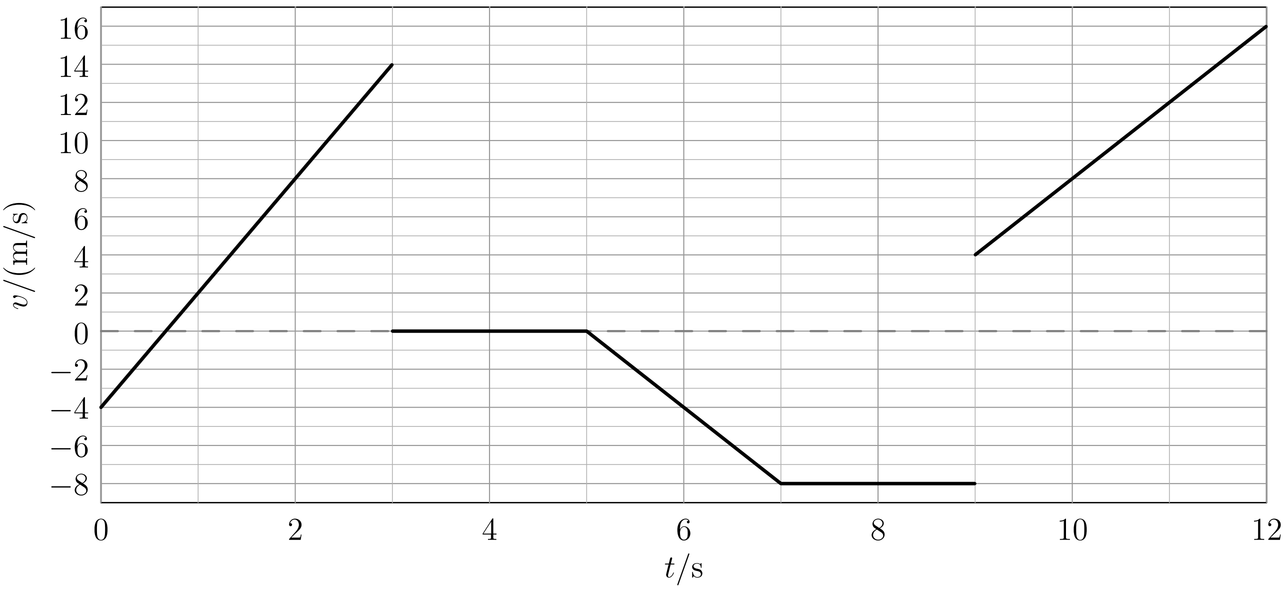
więc prędkość na początku przedziału to

$$v_0 = \Delta x / \Delta t - \frac{1}{2} a \, \Delta t$$

Wskazówka: Na końcu interwału czasowego Δt prędkość to

$$v_f = v_0 + a \, \Delta t = \Delta x / \Delta t + \frac{1}{2} a \, \Delta t$$

Odpowiedź: Poprawny wykres:



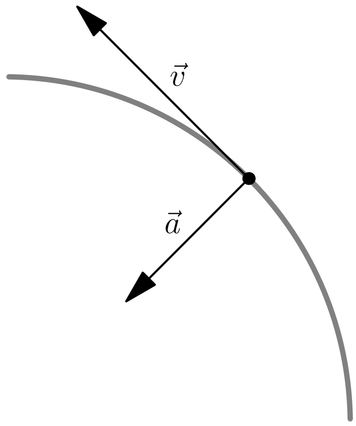
5 Zadanie – Na zakręcie

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-04, id: pl-kinematyka-0002000, diff: 2

Samochód jedzie po łuku o promieniu 45 m ze stałą wartością prędkości 48,6 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

Wskazówka: Wartość prędkości (szybkość) $v = 13{,}5$ m/s. Przyśpieszenie $a = v^2/R$.

Odpowiedź: a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.

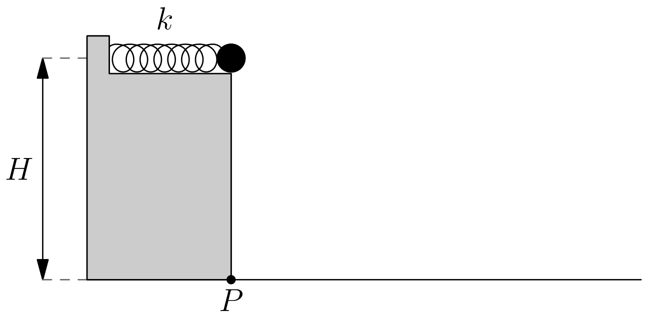


b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 4,05 m/s^2.

6 Zadanie – Rzut poziomy

Magda Gładka, update: 2017-07-07, id: pl-kinematyka-0004000, diff: 2

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 5$ N/m, ściśnięto o 10 cm, naciskając ją kulką o masie równej 150 g. Jaka będzie odległość kulki od punktu P do miejsca, w którym kulka uderzy w poziomą podłogę, jeśli kulce nadano tylko prędkość poziomą? Sprężyna znajduje się na wysokości $H = 2{,}8$ m nad powierzchnią ziemi. Opory powietrza, masę sprężyny i tarcie pominąć. Rysunek przedstawia sytuację przed ściśnięciem sprężyny.



Wskazówka: Energia potencjalna sprężystości sprężyny zostaje przekazana kulce o masie m w postaci energii kinetycznej

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mV^2}{2},$$

gdzie V to prędkość pozioma kulki.

Wskazówka: Czas spadania kulki

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Wskazówka: Zasięg w rzucie poziomym

$$z = Vt.$$

Odpowiedź: Zasięg rzutu kulki o masie m wyniesie $z = x\sqrt{\frac{2Hk}{mg}} = 43{,}6$ cm, gdzie x to ściśnięcie sprężyny.

7 Zadanie – Strzelec

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-kinematyka-0004500, diff: 1

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 290 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 985 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Wskazówka: Jaką drogę w poziomie przebył pocisk?

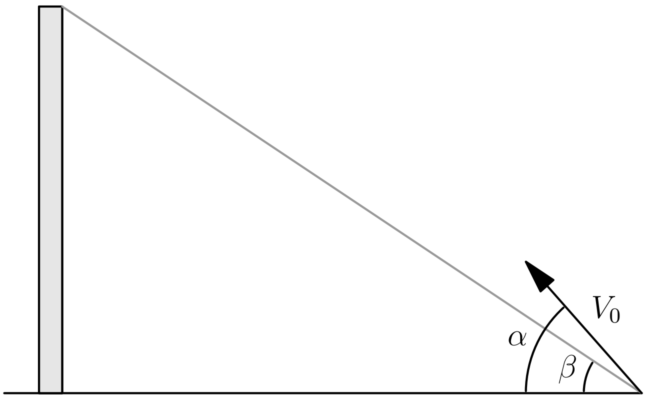
Wskazówka: Ile czasu pocisk leciał?

Odpowiedź: Pocisk opadł o około 43 cm.

8 Zadanie – Rzut ukośny

Magda Gładka, update: 2017-07-09, id: pl-kinematyka-0005000, diff: 2

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 65°$ do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 14 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem $\beta = 45°$ względem powierzchni ziemi. Jaką wartość prędkości V_0 powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.



Wskazówka: Widać, że $\operatorname{tg}\beta$ to stosunek wysokości słupa do odległości jego podstawy od miejsca wyrzutu piłki

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\beta.$$

Wskazówka: Przyjmując za początek ruchu początek kartezjańskiego układu współrzędnych, położenie ciała po czasie t określają równania (w pionie mamy do czynienia z ruchem jednostajnie opóźnionym, a w poziomie z jednostajnym)

$$y = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x = V_{0x}t,$$

gdzie V_{0y} to składowa pionowa prędkości V_0, a V_{0x} to składowa pozioma prędkości V_0

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha,$$

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha.$$

Odpowiedź: Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan\alpha - \tan\beta)\cos^2\alpha\tan\beta}} \approx 18{,}3 \text{ m/s},$$

gdzie y to wysokość słupa.

9 Zadanie – Przecięcie torów?

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-kinematyka-0009000, diff: 2

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

Wskazówka: Jaka musi być wartość prędkości v ciężarka, by poruszał się on po okręgu o promieniu l w okolicy najwyższego punktu tego okręgu?

Wskazówka: Wartość prędkości w najwyższym punkcie okręgu musi spełniać warunek $v^2/l \geq g$, czyli przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe lub równe przyśpieszeniu grawitacyjnemu. Sznurek jest wtedy rozciągnięty. Łatwo wykazać, że jeśli spełniony jest ten warunek w najwyższym punkcie, to ciężarek będzie się poruszał po okręgu. Wystarczy wykazać, że sznurek będzie zawsze napięty poniżej najwyższego punktu, a to oznacza, że przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe niż składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka. Z zasady zachowania energii wynika, że na mniejszej wysokości prędkość v' ciężarka będzie większa niż v. Z geometrii wynika, że składowa g_l przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka będzie mniejsza niż g. A więc jeśli $v^2/l \geq g$, to $v'^2/l > g_l$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań: okręgu i paraboli, po której poruszałby się cieżarek, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu.

Wskazówka: Równanie okręgu: $x^2 + y^2 = l^2$.

Wskazówka: Równanie ruchu, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu: $x = vt$ oraz $y = l - gt^2/2$.

Wskazówka: Równanie paraboli: jeśli $v \neq 0$, to $t = x/v$ i otrzymujemy równanie toru $y = l - \frac{g}{2v^2}x^2$.

Odpowiedź:
I sposób – graniczna wartość v.
Minimalna wartość prędkości v_m spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l - y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l - y) + y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l - y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości v_m, gdyż dla większych wartości prędkości v parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości v_m. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.
II sposób – równanie na y.

Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l-y)$. Z równania okręgu, $A(l-y)+y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l-y)(l+y-A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0, l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A - l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości y dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l, l]$. Stąd $A \in [0, 2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

III sposób – równanie na x.

Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB-1}/B$, istnieje, jeśli $2lB - 1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

10 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-27, id: pl-kinematyka-0010000, diff: 2

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 1$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + B\,t^2$$

gdzie $A = 1{,}1$ m, $\omega = 1{,}1$ s^{-1}, $\phi = 2{,}3$ oraz $B = 1{,}6$ m/s^2.

Wskazówka: $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\omega\cos(\omega t + \phi) + 2B\,t$$

$$v(t_1) \approx 2{,}03 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -A\,\omega^2\sin(\omega t + \phi) + 2B$$

$$a(t_1) \approx 3{,}54 \text{ m/s}^2$$

11 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 2D

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-15, id: pl-kinematyka-0010050, diff: 2

Tor punktu materialnego zawarty jest w płaszczyźnie. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

v_0	A	λ	ω
3 m/s	2 m	0,3 s^{-1}	5 s^{-1}

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 5$ s.

Wskazówka: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Wskazówka: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Wskazówka:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{db_x}{dt} \\ \dfrac{db_y}{dt} \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ Ae^{-\lambda t}(-\lambda \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ Ae^{-\lambda t}((\lambda^2 - \omega^2)\sin(\omega t) - 2\lambda\omega \cos(\omega t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\lambda^2 + \omega^2)y - 2\lambda v_y \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 3 \\ 2{,}23 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \qquad \vec{a}(t_1) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}144 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

12 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-23, id: pl-kinematyka-0010100, diff: 2

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
-1 m/s^2	-1 m/s	11 m	1 m/s	-14 m	-1 m/s^3	3 m/s^2	-2 m/s

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 3$ s.

Wskazówka: $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}b_z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2f_x t + g_x \\ g_y \\ 3e_z t^2 + 2f_z t + g_z \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} 2f_x \\ 0 \\ 6e_z t + 2f_z \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

13 Zadanie – Jednostki długości

Joanna Drabarz, update: 2016-05-04, id: pl-prędkość-droga-czas-0001000, diff: 1

Przelicz kilometry na metry:
22 km to .... m
982 km to .... m

Przelicz metry na centymetry:
15 m to .... cm
2009 m to .... cm

Przelicz milimetry na centymetry:
180 mm to .... cm
2005 mm to .... cm

Wskazówka:
1 kilometr = 1000 metrów
1 metr to 100 centymetrów
1 centymetr to 10 milimetrów

Odpowiedź:
kilometry na metry:
22000 m
982000 m

metry na centymetry:
1500 cm
200900 cm

milimetry na centymetry:
18 cm
200,5 cm

14 Zadanie – Jednostki czasu

Joanna Drabarz, update: 2016-05-04, id: pl-prędkość-droga-czas-0002000, diff: 1

Przelicz minuty na sekundy:
41 min. to .... s
131 min. to .... s

Przelicz godziny na minuty:
9 godz. to .... min.
14 godz. to .... min.

Przelicz sekundy na godziny:
7200 s to .... godz.
79200 s to .... godz.

Wskazówka:
1 godzina = 60 minut
1 minuta = 60 sekund
1 godzina = 3600 sekund

Odpowiedź:
minuty na sekundy:
2460 s
7860 s

godziny na minuty:
540 min.
840 min.

sekundy na godziny:
2 godz.
22 godz.

15 Zadanie – Prędkość człowieka

Joanna Drabarz, update: 2016-07-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0003000, diff: 2

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 41850 metrów w ciągu 135 minut?

Wskazówka: Ile metrów pokonuje w ciągu minuty? Odpowiedź: 310 m.

Wskazówka: Ile metrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 18600 m.

Wskazówka: Ile kilometrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 18,6 km.

Odpowiedź: Człowiek porusza się z prędkością 18,6 km/h.

16 Zadanie – Echo

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0003500, diff: 1

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 80 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 343 m/s.

Wskazówka: Jaką drogę przebędzie dźwięk?

Odpowiedź: Minimalna odległości od ściany to około 13,7 m.

17 Zadanie – Prędkość jazdy rowerem

Piotr Nieżurawski, update: 2016-07-30, id: pl-prędkość-droga-czas-0004000-dpc, diff: 3

Jaś wyruszył rowerem z linii startu i jechał ze średnią prędkością 3,9 m/s. Maciek, który wyruszył 8 s po Jasiu z linii startu, ukończył wyścig 16 s przed Jasiem. Obaj chłopcy przebyli tę samą odległość. Z jaką średnią prędkością jechał Maciek, jeśli całą trasę przejechał w trakcie 312 s?

Wskazówka: Ile czasu jechał Jaś? Odpowiedź: 336 s.

Wskazówka: Jaka była długość trasy? (Jaś...) Odpowiedź: 1310,4 m.

Odpowiedź: Maciek jechał z prędkością 4,2 m/s.

18 Zadanie – Sztafeta żółwi

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0004500, diff: 1

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 190 cm/s przez 14 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 230 cm/s przez 3,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 170 cm/s przez 6,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Ile czasu poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Jaką drogę przebył trzeci żółw?

Odpowiedź: Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 188 cm/s.

19 Zadanie – Droga do szkoły

Zofia Drabek, update: 2018-10-04, id: pl-prędkość-droga-czas-0004600, diff: 1

Jaś pokonuje swoją drogę do szkoły ze średnią szybkością 27 km/h. Pierwszą część drogi pokonuje rowerem miejskim, a drugą autobusem. Oba odcinki drogi są sobie równe. Rowerem porusza się ze średnią szybkością 20 km/h. Oblicz średnią szybkość jazdy autobusem. Wynik podaj z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

Wskazówka: Zastanów się, w jaki sposób obliczyć średnią szybkość przy znanej szybkości autobusu i roweru. Możesz prowadzić przekształcenia wzorów tak, jakby dystans przejechany przez Jasia do szkoły był znany, zobaczysz, że w późniejszych obliczeniach ten dystans nie będzie istotny.

Wskazówka: Przyjmijmy oznaczenia: v_a - szybkość autobusu, v_r - szybkość jazdy rowerem, v - szybkość średnia, s - długość całej drogi Jasia do szkoły, t_a - czas jazdy autobusem, t_r - czas jazdy rowerem.
Średnia szybkość jest to iloraz całej drogi i całego czasu, tj.

$$v = \frac{s}{t_a + t_r}, \qquad t_a = \frac{s}{2v_a}, \qquad t_r = \frac{s}{2v_r}.$$

Podstawiając odpowiednio czas jazdy autobusem oraz czas jazdy rowerem do pierwszego z równań, otrzymujemy równanie:

$$v = \frac{s}{\frac{s}{2v_a} + \frac{s}{2v_r}}.$$

Po skróceniu przez s i uproszczeniu równania otrzymujemy:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r}}.$$

Jest to tzw. średnia harmoniczna. Końcowy wzór na prędkość autobusu to:

$$v_a = \frac{vv_r}{2v_r - v}.$$

Odpowiedź: Autobus jedzie ze średnią szybkością ok. 42 km/h.

20 Zadanie – Samochód

Joanna Drabarz, update: 2016-07-09, id: pl-prędkość-droga-czas-0005000, diff: 2

Samochód pana Krzysztofa spala 7 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 8 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 4 zł?

Wskazówka: Na ile litrów benzyny wystarczy równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej? Odpowiedź: 0,5 litra.

Odpowiedź: Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 7 pełnych km.

21 Zadanie – Koło ratunkowe

Piotr Nieżurawski, update: 2016-08-06, id: pl-prędkość-droga-czas-0006000-dpc, diff: 2

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 11,4 min. wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 1862 m od kładki. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem i w jednakowy sposób, a koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody.

Wskazówka: Rozważ całe zdarzenie w układzie związanym z wodą.

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki to 4,9 km/h.

22 Zadanie – Przejażdżka metrem

Zofia Drabek, update: 2018-04-27, id: pl-prędkość-droga-czas-0006500, diff: 1

Uczeń wsiadł do metra na początku pociągu. Postanowił przejść podczas jazdy na jego koniec korytarzem o długości $l = 110$ m. Gdy tam dotarł, pociąg wjechał na kolejną stację. Uczeń szedł ze średnią szybkością $v_p = 4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ względem pociągu. Pociąg przejechał drogę $s = 1300$ m. Oblicz średnią szybkość, z jaką jechał pociąg względem stacji metra u, oraz średnią szybkość ucznia względem ziemi v_z.

Wskazówka: Aby otrzymać średnią szybkość jazdy pociągu, należy obliczyć iloraz całej drogi pokonanej przez pociąg s oraz czasu przejazdu pociągu pomiędzy stacjami t:

$$u = \frac{s}{t}.$$

W takim samym czasie uczeń pokonuje długość całego pociągu l ze średnią szybkością v_p względem pociągu:

$$v_p = \frac{l}{t}, \qquad t = \frac{l}{v_p}.$$

W ten sposób otrzymujemy ostateczne wyrażenie na szybkość pociągu względem peronu:

$$u = \frac{s \cdot v_p}{l}.$$

Wskazówka: Z transformacji Galileusza wynika zależność:

$$v_z = u - v_p.$$

Odpowiedź: Pociąg jechał ze średnią szybkością 47,3 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, uczeń względem ziemi poruszał się ze średnią szybkością 43,3 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

23 Zadanie – Wąż ogrodowy

Piotr Nieżurawski, update: 2016-08-29, id: pl-prędkość-droga-czas-0007000, diff: 1

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 9 mm zakończony jest otworem o średnicy 2 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 60 cm/s?

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że wodę w tym przypadku można uznać za ciecz nieściśliwą.

Wskazówka: $v_1 t A_1 = v_2 t A_2$, gdzie $A_i \propto d_i^2$

Odpowiedź: Szybkość wody w otworze to ok. 1220 cm/s.