

## Sprawdzian dla chętnych, wakacyjny

*Nauczyciel Twojego ulubionego przedmiotu może niedługo skorzystać z tej maszynki...*

Prześlij nam informację, jeśli znalazłeś błąd w GEZMAT... ;-)

### 1 (3) Zadanie – Kamyki

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-08, id: pl-liczby-0003000, diff: 1*

Daria i Nela zebrały na plaży kamyki. Jeśli Daria dałaby Neli 5 kamyków, to miałyby po tyle samo kamyków. A jeśli Nela dałaby Darii 10 kamyków, to Daria miałaby 6 razy tyle kamyków, co Nela. Ile kamyków ma każda z dziewczynek?

**Wskazówka:**  $D - 5 = N + 5$  oraz  $D + 10 = 6(N - 10)$

**Odpowiedź:** Daria miała 26 kamyków, a Nela 16 kamyków.

*Nowość!*

### 2 (6) Zadanie – Ceglany dom

*Małgorzata Berajter, update: 2017-09-19, id: pl-ciepło-0002100, diff: 3*

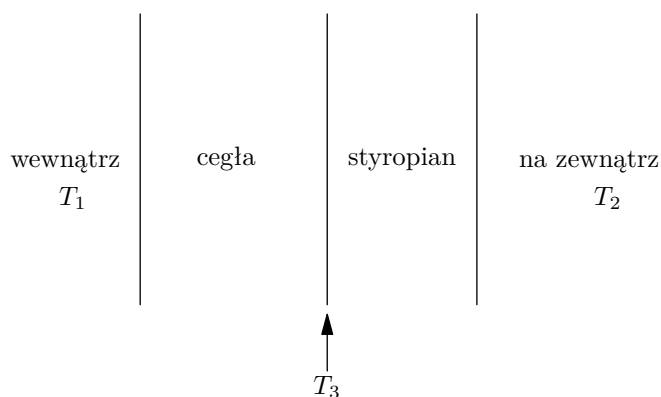
Ceglany dom ma ściany o grubości 30 cm. Wewnątrz domu utrzymywana jest stała temperatura 20°C. Temperatura powietrza na zewnątrz wynosi 12°C.

a) Oblicz, ile ciepła stracimy w ciągu sekundy przez jedną ze ścian o powierzchni 24 m<sup>2</sup>. Przyjmij, że przewodnictwo cieplne cegły wynosi 0,8 W/(K·m).

b) Aby zapobiec utracie ciepła, ocieplono budynek z zewnątrz warstwą styropianu o grubości 40 cm. Ile teraz tracimy ciepła przez tę samą ścianę? Przyjmij, że przewodnictwo cieplne styropianu wynosi 0,04 W/(K·m).

c) Jaka temperatura panuje na złączeniu materiałów?

**Wskazówka:**



**Wskazówka:**

$$H = \frac{Q}{t} = k \cdot \frac{S}{L} \cdot (T_1 - T_2)$$

$H$  - strumień ciepła,  $Q$  - przekazane ciepło,  $k$  - współczynnik przewodnictwa cieplnego,  $S$  - powierzchnia ciała,  $L$  - grubość ciała,  $T_1$  - temperatura powietrza wewnątrz domu,  $T_2$  - temperatura powietrza na zewnątrz.

**Wskazówka:**

$$H_1 \cdot \frac{L_1}{k_1} = S \cdot (T_1 - T_3)$$

$$H_2 \cdot \frac{L_2}{k_2} = S \cdot (T_3 - T_2)$$

W warunkach stacjonarnych strumienie ciepła przepływające przez obie warstwy muszą być równe, stąd:

$$H_1 = H_2 = H$$

Dodając dwa pierwsze równania stronami i porządkując je, uzyskujemy:

$$H = S \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

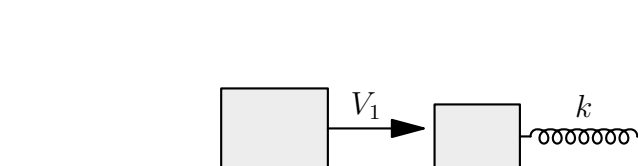
$H_1$  - strumień ciepła płynący przez cegłę,  $H_2$  - strumień ciepła płynący przez styropian,  $k_1$  - współczynnik przewodnictwa cieplnego cegły,  $k_2$  - współczynnik przewodnictwa cieplnego styropianu,  $L_1$  - grubość cegły,  $L_2$  - grubość styropianu,  $T_3$  - temperatura panująca między cegłą a styropianem.

**Odpowiedź:** Przez ceglany mur tracimy około 512 J na sekundę, a przez mur ocieplony warstwą styropianu 18,5 J na sekundę. Temperatura między cegłą a styropianem jest równa 19,3°C.

### 3 (4) Zadanie – Zderzenie niesprężyste

Magda Gładka, update: 2018-02-08, id: pl-dynamika-0008100, diff: 2

Na poziomym, bardzo śliskim stole znajduje się sześcienny klocek o masie 0,9 kg. Do jednej z jego ścian jest przymocowana nieodkształcona sprężyna o współczynniku sprężystości  $k = 168$  N/m, której drugi koniec jest przyczepiony do ściany, a sprężyna jest równoległa do blatu stołu. W pewnym momencie z klockiem tym zderza się drugi sześciąt o masie 1,1 kg, poruszający się z prędkością  $V_1 = 3$  m/s. Oblicz maksymalne ściśnięcie sprężyny, jeśli klocki w momencie zderzenia zlepiają się.



**Wskazówka:** Skorzystaj z zasady zachowania pędu

$$p_1 = p_2,$$

$$m_1 V_1 = V_2 (m_1 + m_2),$$

gdzie  $V_2$  to prędkość zlepionych klocków po zderzeniu.

**Wskazówka:** Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej - energia kinetyczna  $E_k$  zmienia się w energię potencjalną sprężystości  $E_{ps}$

$$E_k = E_{ps},$$

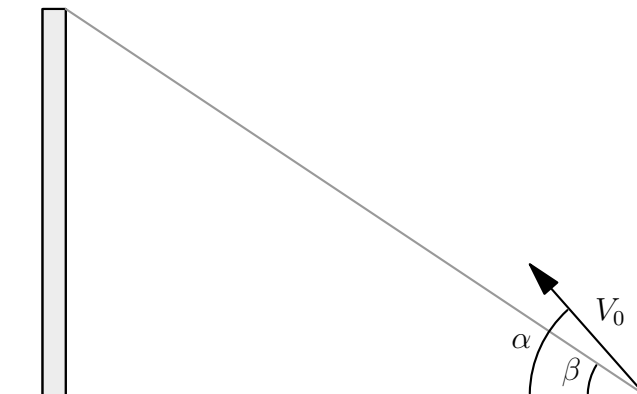
$$\frac{(m_1 + m_2)V_2^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}.$$

**Odpowiedź:** Maksymalne ściśnięcie sprężyny wynosi  $x_{max} = m_1 V_1 \sqrt{\frac{1}{k(m_1 + m_2)}} = 18$  cm, gdzie  $m_1$  to masa uderzającego klocka, a  $m_2$  to masa klocka zaczepionego do sprężyny.

#### 4 (4) Zadanie – Rzut ukośny

Magda Gładka, update: 2017-07-09, id: pl-kinematyka-0005000, diff: 2

Marcin chce kopnąć małą piłkę z powierzchni ziemi pod kątem  $\alpha = 65^\circ$  do poziomu tak, aby uderzyła w wierzchołek słupa znajdujący się na wysokości równej 10 m, a widoczny, z punktu wyrzutu, pod kątem  $\beta = 45^\circ$  względem powierzchni ziemi. Jaka wartość prędkości  $V_0$  powinien nadać piłce? Opory powietrza pominąć.



**To też nowości!**

**Wskazówka:** Widać, że  $\tan \beta$  to stosunek wysokości słupa do odległości jego podstawy od miejsca wyrzutu piłki

$$\frac{y}{x} = \tan \beta.$$

**Wskazówka:** Przyjmując za początek ruchu początek kartezjańskiego układu współrzędnych, położenie ciała po czasie  $t$  określają równania (w pionie mamy do czynienia z ruchem jednostajnie opóźnionym, a w poziomie z jednostajnym)

$$y = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x = V_{0x}t,$$

gdzie  $V_{0y}$  to składowa pionowa prędkości  $V_0$ , a  $V_{0x}$  to składowa pozioma prędkości  $V_0$

$$V_{0y} = V_0 \sin \alpha,$$

$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha.$$

**Odpowiedź:** Wartość prędkości piłki w momencie wyrzutu wynosi

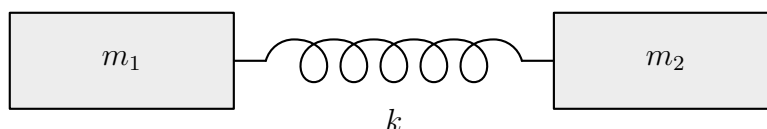
$$V_0 = \sqrt{\frac{gy}{2(\tan \alpha - \tan \beta) \cos^2 \alpha \tan \beta}} \approx 15,5 \text{ m/s},$$

gdzie  $y$  to wysokość słupa.

### 5 (3) Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

*Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-25, id: pl-dynamika-0008200, diff: 1*

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości  $k$ . Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla  $k = 41 \text{ N/m}$ ,  $m_1 = 1 \text{ kg}$  oraz  $m_2 = 2 \text{ kg}$ .



**Wskazówka:** Opiszmy położenie ciężarków za pomocą współrzędnych  $x_1$  oraz  $x_2$ , przyjmijmy zwrot osi  $X$  w prawo. Odstęp między nimi to  $u \equiv x_2 - x_1$ .

**Wskazówka:** Niech  $l$  będzie długością swobodną sprężyny. Siła sprężystości działająca na drugi ciężarek będzie równa:  $-k(u - l)$ .

**Wskazówka:** Równania ruchu dla obu ciężarków:

$$m_1 \ddot{x}_1 = +k(u - l)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(u - l)$$

**Wskazówka:** Po wyznaczeniu przyśpieszeń i odjęciu równań stronami otrzymujemy:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (u - l)$$

Ale

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{u}$$

Prowadzi to do równania oscylatora

$$\ddot{u} = -k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (u - l)$$

**Odpowiedź:** Okres drgań będzie równy

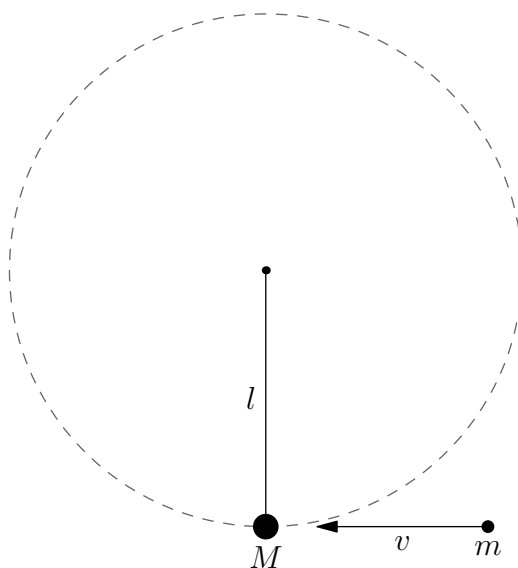
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy  $T \approx 0,801 \text{ s}$ .

## 6 (4) Zadanie – Postrzelone wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0010000, diff: 2

Metalowy ciężarek o masie  $M = 203$  g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości  $l = 49$  cm. Sznupek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości  $v$  pocisk o masie  $m = 28$  g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu  $l$  w płaszczyźnie pionowej? Przyspieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe  $9,8$  m/s<sup>2</sup>. Pomiń opory ruchu bryły.



**Wskazówka:** Jaka będzie prędkość powstałej bryły tuż po zderzeniu i zlepieniu się ciężarka i pocisku?

**Wskazówka:** Jaka będzie prędkość bryły w najwyższym punkcie okręgu?

**Wskazówka:** Jaki warunek musi być spełniony w najwyższym punkcie okręgu, by torem bryły był właśnie okrąg?

**Wskazówka:** Ile jest równa minimalna wartość prędkości spełniająca ten warunek?

**Odpowiedź:** Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech  $\mu \equiv m + M$ . Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

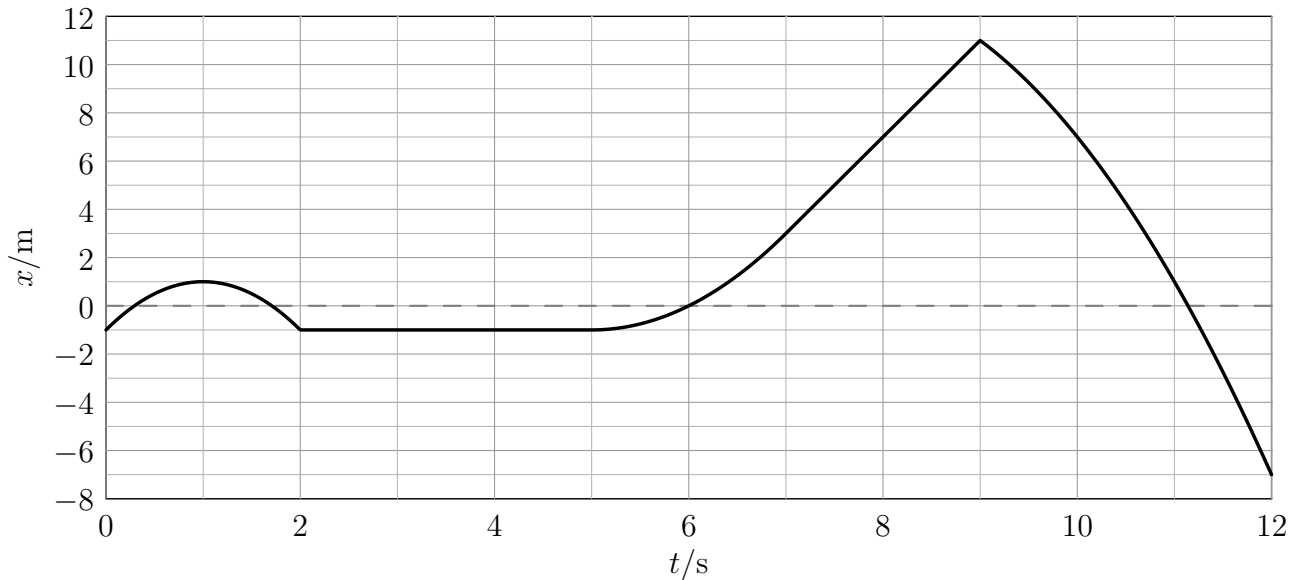
$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest  $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 40,4$  m/s.

**7 (4) Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny**

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-21, id: pl-kinematyka-0001000, diff: 2

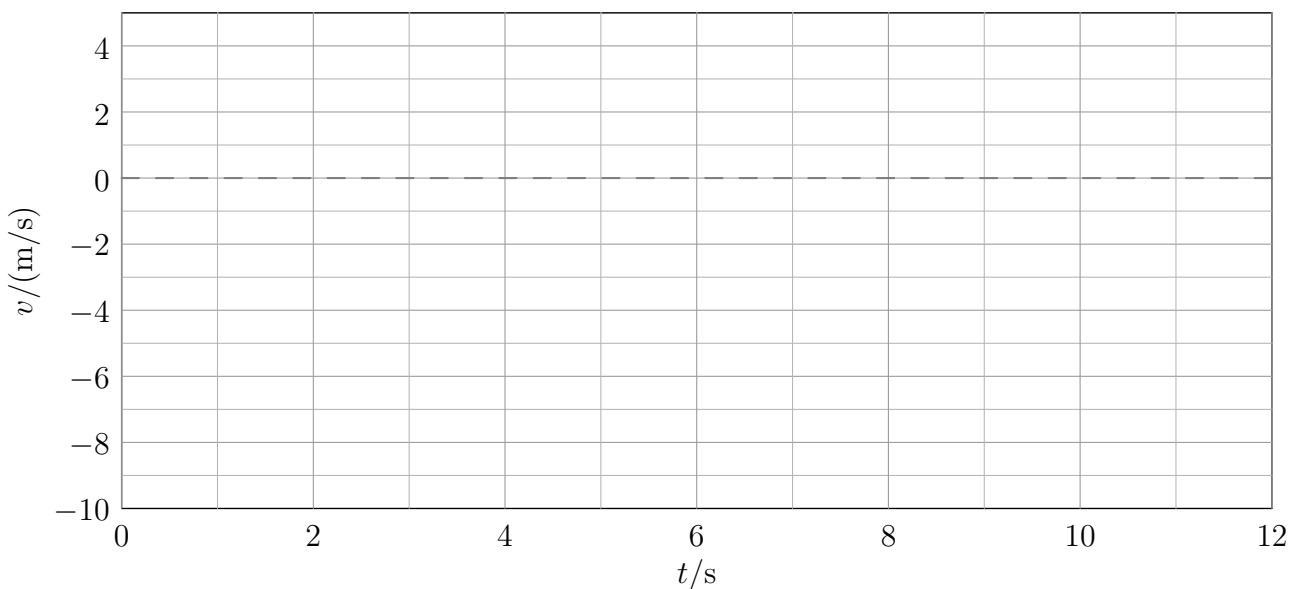
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi  $X$ . Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia  $x$  od czasu  $t$ .



W tabeli podano przyśpieszenie  $a$  punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

$t/s$	$[0, 2[$	$]2, 5[$	$]5, 7[$	$]7, 9[$	$]9, 12]$
$a/(m/s^2)$	-4	0	2	0	-2

Wykonaj wykres zależności prędkości  $v$  od czasu dla tego punktu materialnego dla  $t \in [0, 12]$  s.



**Wskazówka:** Jeśli  $v$  jest dodatnie, to punkt materialny porusza się zgodnie ze zwrotem osi  $X$ , a jeśli  $v$  jest ujemne, to punkt materialny porusza się w przeciwną stronę.

**Wskazówka:**

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

**Wskazówka:** Wygodniej będzie posłużyć się zmianami wielkości. Po danym interwale czasowym  $\Delta t$  mamy:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2,$$

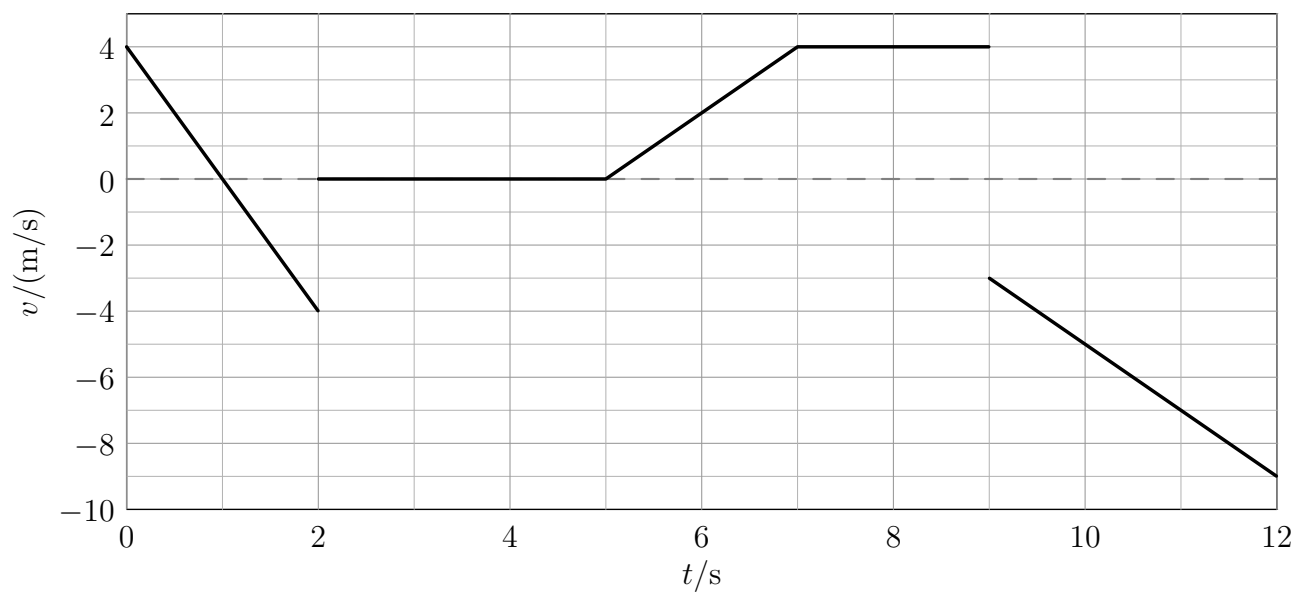
więc prędkość na początku przedziału to

$$v_0 = \Delta x / \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t$$

**Wskazówka:** Na końcu interwału czasowego  $\Delta t$  prędkość to

$$v_f = v_0 + a \Delta t = \Delta x / \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t$$

**Odpowiedź:** Poprawny wykres:

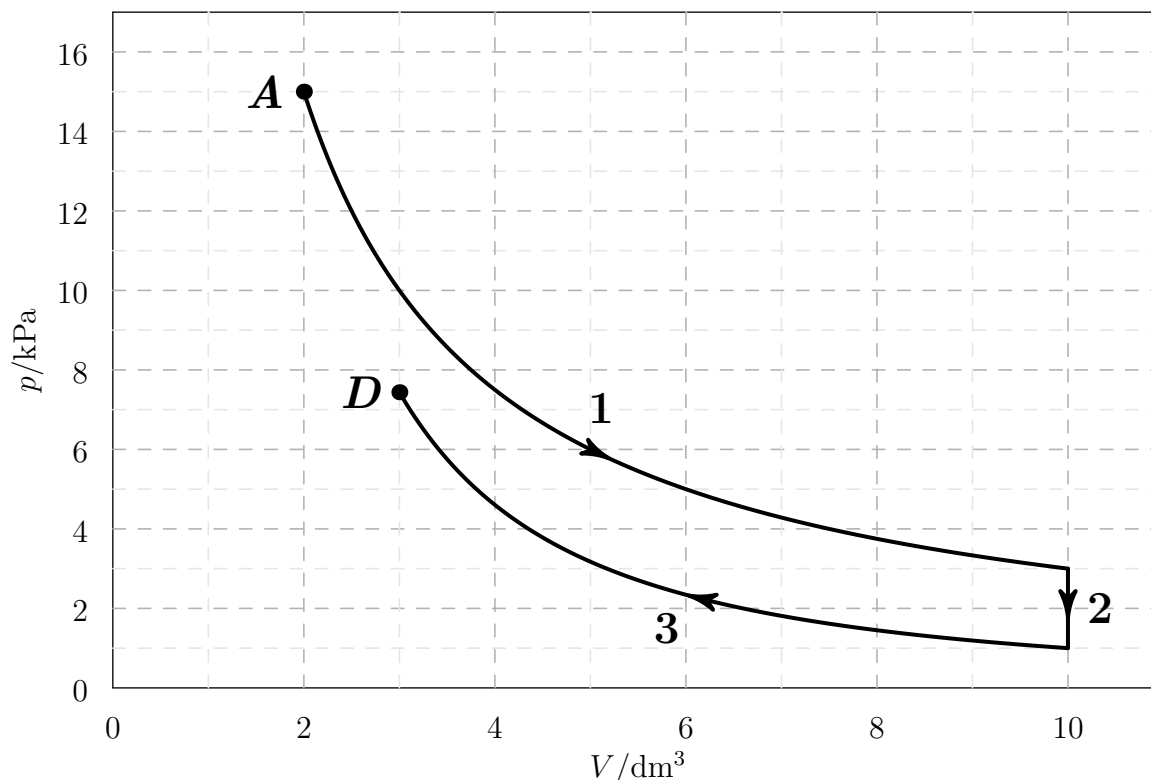


## 8 (3) Zadanie – Przemiany gazowe

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-03, id: pl-termodynamika-0020000, diff: 1

Ustalona porcja gazowego neonu przeszła przemiany 1, 2 i 3 przedstawione na poniższym wykresie, gdzie  $p$  oznacza ciśnienie gazu, a  $V$  jego objętość. Początkowo parametry gazu opisywał punkt  $A$ . Wiadomo, że przemiana 3 była adiabatyczna.

- Podaj nazwy przemian 1 i 2. W przypadku przemiany 1 swoją hipotezę dotyczącą rodzaju przemiany sprawdź w 3 różnych punktach.
- Dla każdej z przemian wskaż wielkości, które są zawsze równe 0 w trakcie tej przemiany.
- Czy gaz w punkcie  $D$  ma większą temperaturę niż w punkcie  $A$ ?
- Czy z punktu  $D$  może ta porcja gazu dotrzeć do punktu  $A$  w przemianie izobarycznej?



**Wskazówka:** W przemianie 1 iloczyn  $pV$  jest stały.

**Wskazówka:** Dla gazu doskonałego  $T \propto pV$ .

**Odpowiedź:**

- Przemiana 1 to przemiana izotermiczna, gdyż  $pV$  ma zawsze tę samą wartość, np.  $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$  (w jednostkach  $\text{kPa} \cdot \text{dm}^3$ ). Przemiana 2 jest przemianą izochoryczną.
- W trakcie przemiany 1 zmiana temperatury oraz zmiana energii wewnętrznej są równe 0, w trakcie przemiany 2 zmiana objętości oraz praca (wykonana nad gazem lub wykonana przez gaz), a w trakcie przemiany 3 wymienione z otoczeniem ciepło.
- Nie. Iloczyn  $pV$  w punkcie  $A$  jest równy  $2 \cdot 15 = 30$ , a w punkcie  $D$  jest mniejszy niż  $8 \cdot 3 = 24$  (w jednostkach  $\text{kPa} \cdot \text{dm}^3$ ).
- Nie, gdyż ciśnienia w tych punktach są różne.



## 9 (4) Zadanie – Działania na zbiorach

*Piotr Nieżurawski, update: 2016-07-30, id: pl-zbiory-0003000, diff: 2*

Uprość poniższe wyrażenia, w których występują zbiory  $A$  i  $B$ :

- a)  $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
- b)  $(B \cup B) \setminus A$
- c)  $A \cap (B \setminus A)$
- d)  $A \cup (B \setminus A)$

**Odpowiedź:**

- a)  $\{\}$
- b)  $B \setminus A$
- c)  $\{\}$
- d)  $A \cup B$

## 10 (3) Zadanie – Samochód

*Joanna Drabarz, update: 2016-07-09, id: pl-prędkość-droga-czas-0005000, diff: 1*

Samochód pana Krzysztofa spala 4 litrów benzyny na sto kilometrów, a litr benzyny kosztuje 6 zł. Ile **pełnych** kilometrów przejedzie pan Krzysztof samochodem za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej, czyli za 3 zł?

**Wskazówka:** Na ile litrów benzyny wystarczy równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej? Odpowiedź: 0,5 litra.

**Odpowiedź:** Za równowartość hot-doga zakupionego na stacji benzynowej samochód przejedzie 12 pełnych km.

## 11 (3) Zadanie – Prędkość człowieka

*Joanna Drabarz, update: 2016-07-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0003000, diff: 1*

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 86700 metrów w ciągu 255 minut?

**Wskazówka:** Ile metrów pokonuje w ciągu minuty? Odpowiedź: 340 m.

**Wskazówka:** Ile metrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 20400 m.

**Wskazówka:** Ile kilometrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 20,4 km.

**Odpowiedź:** Człowiek porusza się z prędkością 20,4 km/h.

## 12 (3) Zadanie – Prędkość człowieka

*Joanna Drabarz, update: 2016-07-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0003000, diff: 1*

Z jaką prędkością – w kilometrach na godzinę – porusza się człowiek, który pokonuje 83850 metrów w ciągu 195 minut?

**Wskazówka:** Ile metrów pokonuje w ciągu minuty? Odpowiedź: 430 m.

**Wskazówka:** Ile metrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 25800 m.

**Wskazówka:** Ile kilometrów przejedzie w ciągu godziny? Odpowiedź: 25,8 km.

**Odpowiedź:** Człowiek porusza się z prędkością 25,8 km/h.

### 13 (4) Zadanie – Fotografia

*Joanna Drabarz, update: 2016-07-07, id: pl-skala-0003000-dpc, diff: 2*

Łazik marsjański przesłał zdjęcie znalezionego obiektu do analizy. Na zdjęciu w skali 1:60 obiekt miał 7,5 mm. Aby go dokładniej zbadać, powiększono zdjęcie. Jaka wielkość będzie miał ten obiekt w skali 2:1?

**-dpc na końcu id oznacza możliwość kontroli miejsc dziesiętnych**

**Wskazówka:** 7,5 mm na fotografii to ile milimetrów w rzeczywistości (w skali 1:1)?

Odpowiedź: 450 mm.

**Wskazówka:** 450 mm to ile mm w skali 2:1? Odpowiedź: 900 mm.

**Odpowiedź:** Na powiększonym zdjęciu obiekt będzie miał długość 900 mm.